中国科学（A 辑）
第 27 卷　第 1 期　　SCIENCE IN CHINA (Series A)　　1997 年 1 月

Riemann 流形第一特征值下界估计的一般公式*

陈木法　王凤雨
（北京师范大学数学系，北京 100875）

摘要　给出紧 Riemann 流形上第一特征值下界估计的一个一般公式．该公式改进了已知的最优估计，包括 Lichnerowicz 估计和钟-杨估计，并被拓广到非紧流形上．所使用的主要工具是耦合方法．

关键词　第一特征值　耦合方法　Riemann 流形

设 M 是紧连通 Riemann 流形，无边或具凸边界 ∂M．令 $L=\Delta+\nabla V$, $V\in C^2(M)$．以 λ_1 表 L 在 M 上的第一(非零)特征值，当 $\partial M\neq\emptyset$ 时，考虑 Neumann 边界条件．

关于 λ_1 的估计是几何学著名的研究课题[1~3]．最近，我们使用耦合方法，获得若干新进展[4~7]．作为这项研究的继续，本文给出了 λ_1 的一个一般下界公式．基本想法来自对 $\mathbb{R}^d$ 上椭圆算子谱隙的研究1)．

1　主要结果

设 $\mathrm{Ric}_M\geqslant -K$, $K\in\mathbb{R}$．令 $K(V)=\inf\{r:\mathrm{Hess}_V-\mathrm{Ric}_M\leqslant r\}$．以 $\mathrm{cut}(x)$ 记 x 的割迹，分别以 d, D 和 ρ 表示流形的维数，直径和 Riemann 距离．定义

$$\begin{aligned}\alpha(r) = \sup\{&\langle\nabla\rho(x,\cdot)(y),\nabla V(y)\rangle+\langle\nabla\rho(\cdot,y)(x),\nabla V(x)\rangle:\\ &\rho(x,y)=r,\ y\notin \mathrm{cut}(x)\},\quad r\in(0,D].\end{aligned}$$

约定 $\alpha(0)=0$．此外，记 $K^+=\max\{0,K\}$, $K^-=(-K)^+$ 并选取 $\gamma\in C[0,D]$ 使得

$$\begin{aligned}\gamma(r)\geqslant \min\Big\{&K(V)r,\ 2\sqrt{K^+(d-1)}\tanh\Big[\frac{r}{2}\sqrt{K^+/(d-1)}\Big]-\\ &2\sqrt{K^-(d-1)}\tan\Big[\frac{r}{2}\sqrt{K^-/(d-1)}\Big]+\alpha(r)\Big\}.\end{aligned}$$

定义

$$C(r)=\exp\Big[\frac{1}{4}\int_0^r\gamma(s)\,\mathrm{d}s\Big],\qquad r\in[0,D].$$

1996-01-22 收稿，1996-09-06 收修改稿
* 国家自然科学基金、求是科技基金与国家教育委员会博士点基金资助项目

1) Chen M F, Wang F Y. Estimation of spectral gap for elliptic operators. Trans AMS（待发表）

本文的主要结果如下:

定理 1　任给 $f\in C[0,D]$满足 $f|_{(0,D)}>0$, 有

$$\lambda_1 \geqslant 4 \inf_{r\in(0,D)} f(r)\left\{\int_0^r C(s)^{-1}\mathrm{d}s \int_s^D C(u)f(u)\mathrm{d}u\right\}^{-1}. \tag{1.1}$$

注 1　设 $\mu(\mathrm{d}x)=Z^{-1}\mathrm{e}^{V(x)}\mathrm{d}x,\ Z=\int_M \mathrm{e}^{V(x)}\mathrm{d}x$. 由经典的变分公式知, 任给 $f\in C^1(M)$ 满足 $\mu(f):=\int_M f\mathrm{d}\mu=0$, 有 $\lambda_1\leqslant\mu(\|\nabla f\|^2)/\mu(f^2)$. 由此, 可把定理 1 看成经典变分公式的一种对偶, 然而这两个公式之间, 并没有共同之处. 定理 1 的证明基于文献[4]和[6]的耦合方法, 这与以往的几何和分析证法(如 Lichnerowicz[8]方法和 Li-Yau[3]梯度估计方法)完全不同. 目前还不知道公式(1.1)是否可由其他方法得到.

注 2　文献[4]～[6]的所有估计都可由(1.1)式导出, 而这些估计已经覆盖了许多已知的最优估计(参考推论 3 后的评注). 首先, 取 $f\equiv1$, (1.1)式即导出文献[4]的定理 1.4 和 1.5 及文献[6]的定理 1.4 和 1.5.

注 3　为覆盖文献[4]～[6]的所有结果, 只需证明(1.1)式等价于如下的微分公式: 任给 $g\in C^2[0,D]$满足 $g(0)=0,\ g'|_{[0,D)}>0$, 有

$$\lambda_1\geqslant -\sup_{r\in(0,D)}\{4g''(r)+\gamma(r)g'(r)\}/g(r). \tag{1.2}$$

事实上, 对于(1.1)式中的 f, 令 $g(r)=\int_0^r C(s)^{-1}\mathrm{d}s\int_s^D C(u)f(u)\mathrm{d}u$. 则(1.2)式蕴含(1.1)式. 另一方面, 给定(1.2)式中的 g, 若 $-\sup_{r\in(0,D)}\{4g''(r)+\gamma(r)g'(r)\}/g(r):=\delta>0$, 那么

$$\frac{1}{4}\int_0^r C(s)^{-1}\mathrm{d}s\int_s^D C(u)g(u)\mathrm{d}u\leqslant\frac{1}{\delta}\int_0^r C(s)^{-1}\mathrm{d}s\int_s^D(-Cg')'(u)\mathrm{d}u=$$

$$\frac{1}{\delta}\int_0^r C(s)^{-1}[C(s)g'(s)-C(D)g'(D)]\mathrm{d}s\leqslant\frac{1}{\delta}g(r).$$

由此令 $f=g$, 则(1.1)式蕴含(1.2)式. 当然, 这两个公式有各自的优点, (1.2)式的计算比较容易, 但对于相同的试验函数(即 $f\equiv g$), (1.1)式优于(1.2). 由于(1.2)式在以前的文章中已反复用过, 这里集中讨论(1.1)式.

注 4　以 $\bar\lambda_1$ 记算子 $4\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}+\gamma(x)\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$在$(0,D)$上的第一混合特征值, 在 0 处取 Dirichlet 条件. D 处取 Neumann 条件, 设 $f(>0)$是相应的特征函数. 由定理 1 知 $\lambda_1\geqslant\bar\lambda_1$, 且当 $M=S^d$ 及 $V\equiv0$ 时等式成立.

由于试验函数可自由选取, (1.1)式自然会给出众多新估计. 且关于 λ_1 下界估计的研究可由此得到相当的改观. 为说明这一点, 给出如下推论.

推论 1　一般地, 有

$$\lambda_1\geqslant K(V)\left\{\exp\left[\frac{1}{8}K(V)D^2\right]-1\right\}^{-1}\geqslant\frac{8}{D^2}-\frac{1}{2}K(V). \tag{1.3}$$

此外,

$$\lambda_1 \geqslant \frac{\pi^2}{8}K(V)\left\{\exp\left[\frac{1}{8}K(V)D^2\right]-1\right\}^{-1} \geqslant \frac{\pi^2}{D^2}-\frac{\pi^2}{16}K(V),\text{若 } K(V)\geqslant 0, \quad (1.4)$$

$$\lambda_1 \geqslant \frac{\pi^2}{D^2}-\left(1-\frac{2}{\pi}\right)K(V), \qquad \text{若 } K(V)\leqslant 0. \quad (1.5)$$

推论 2 设 $V\equiv 0$. 如果 $K\leqslant 0$, 则

$$\lambda_1 \geqslant \frac{\pi^2}{D^2}-\max\left\{\frac{\pi}{4d},1-\frac{2}{\pi}\right\}K, \quad (1.6)$$

$$\lambda_1 \geqslant -\frac{dK}{d-1}\left\{1-\cos^d\left[\frac{D}{2}\sqrt{-K/(d-1)}\right]\right\}^{-1} \geqslant \frac{8}{D^2}-\frac{K}{2}, d>1. \quad (1.7)$$

推论 3 设 $V\equiv 0$. 如果 $K\geqslant 0$, 则

$$\lambda_1 \geqslant \frac{\pi^2}{D^2}-\left(\frac{\pi}{2}-1\right)K, \quad (1.8)$$

$$\lambda_1 \geqslant \frac{\pi^2}{D^2}\sqrt{1+2D^2K/\pi^4}\cosh^{1-d}\left[\frac{D}{2}\sqrt{K/(d-1)}\right],\ d>1. \quad (1.9)$$

现在,把如上估计与一些已知最优估计作比较. 显然,当 $K(V)<0$ 时,(1.3)式和(1.5)式都改进了文献[4]的一个估计:$\lambda_1\geqslant 8/D^2-K(V)/3$. 当 $K<0$ 时,(1.5)式和(1.6)式都改进了钟家庆和杨洪苍的估计[9]:$\lambda_1\geqslant\pi^2/D^2$. 当 $K>0$ 时,(1.4)式和(1.6)式都改进了蔡开仁的估计[10]: $\lambda_1\geqslant\pi^2/D^2-K$, 而(1.9)式改进了杨洪苍和贾方的估计[11,12]: $\lambda_1\geqslant\frac{\pi^2}{D^2}\times\exp\left[-\frac{1}{2}D\sqrt{K(d-1)}\right]$(文献[12]仅对 $d\geqslant 5$ 证明了该估计). 最后,由于 $K\leqslant 0$ 时 $D\sqrt{-K/(d-1)}\leqslant\pi$ 且通常严格不等式成立,(1.7)式改进了 Lichnerowicz 估计:$\lambda_1\geqslant -dK/(d-1)$.

第 2 节开头给出定理 1 的简短证明,该节的大部分用于证明诸推论,这些证明虽属技术性但包含了统计物理中著名的 FKG 不等式的应用. 第 3 节处理非紧情形.

2 定理与推论的证明

定理 1 的证 设(x_t,y_t)是 L 扩散过程的反射耦合[13,14],当$\partial M\neq\varnothing$ 时,赋反射边界[6]. 有

$$\mathrm{d}\rho(x_t,y_t)\leqslant 2\sqrt{2}\mathrm{d}b_t+\gamma(\rho(x_t,y_t))\mathrm{d}t, \quad (2.1)$$

其中 b_t 是一维 Brown 运动[4,6]. Kendall[13]首先证明当 $V\equiv 0$ 时(2.1)式对 $\gamma(r)=Kr$ 成立. 而 γ 的目前取法属于 Cranston[14]($K\geqslant 0$ 时)和 Chen-Wang[4]($K\leqslant 0$ 时). 任给 $f\in C[0,D]$满足 $f|_{(0,D)}>0$, 设 δ 是由定理 1 给出的下界. 定义 $g(r)=\int_0^r C(s)^{-1}\mathrm{d}s\times\int_s^D C(u)f(u)\mathrm{d}u$, $r\in[0,D]$. 由(2.1)式及 Itô 公式,有

$$\mathrm{d}g(\rho(x_t,y_t))\leqslant 2\sqrt{2}g'(\rho(x_t,y_t))\mathrm{d}b_t-\delta g(\rho(x_t,y_t))\mathrm{d}t.$$

由文献[4]的定理 1.7 立得定理 1.

在余下的证明中,将经常用到如下的基本不等式:

引理 1(FKG 不等式) 设 $p,q\in[-\infty,\infty]$, $p<q$,而$\nu(\mathrm{d}x)$是(p,q)上的概率测度. 如

果 $f, g \in C_b(p, q)$ 是非降函数，则 $\int_p^q f(x)g(x)\nu(\mathrm{d}x) \geqslant \int_p^q f(x)\nu(\mathrm{d}x)\int_p^q g(x)\nu(\mathrm{d}x)$.

证 易见

$$\int_p^q fg\mathrm{d}\nu - \int_p^q f\mathrm{d}\nu\int_p^q g\mathrm{d}\nu = \frac{1}{2}\int_p^q\int_p^q [f(x)-f(y)][g(x)-g(y)]\nu(\mathrm{d}x)\nu(\mathrm{d}y) \geqslant 0.$$

推论 1 的证　(i) 取 $\gamma(r) = K(V)r$，则 $C(r) = \exp\left[\frac{1}{8}K(V)r^2\right]$．令 $f(r) = r$，则 (1.3) 式中的第 1 个估计由定理 1 得到．为证第 2 个估计，令 $g(r) = r - \left(\exp\left[\frac{1}{8}D^2 r\right] - 1\right)\left(\frac{8}{D^2} - \frac{r}{2}\right)$，$r \in \mathbb{R}$．则 $g(0) = g'(0) = 0$ 且 $g''(r) = \frac{D^4 r}{128}\exp\left[\frac{1}{8}D^2 r\right]$．因此 $g'(r) \geqslant 0$，$r \in \mathbb{R}$．从而 $g(r) \geqslant 0$，$r \geqslant 0$ 且 $g(r) \leqslant 0$，$r \leqslant 0$．由此立得(1.3)式的第 2 个不等式.

(ii) 设 $K(V) \geqslant 0$．在以下的证明中，总记 $\beta = \pi/(2D)$．取 $f(r) = \sin(\beta r)$，$\nu(\mathrm{d}r) = Z^{-1}r\mathrm{d}r$，这里(及下文)$Z$ 是归一化常数．由 FKG 不等式得

$$\begin{aligned}\int_s^D \exp\left[\frac{1}{8}K(V)r^2\right]\sin(\beta r)\mathrm{d}r &= \int_s^D \exp\left[\frac{1}{8}K(V)r^2\right]\frac{\sin(\beta r)}{r}r\mathrm{d}r \leqslant \\ \frac{2}{D^2 - s^2}\left(\int_s^D \sin(\beta r)\mathrm{d}r\right)\int_s^D \exp\left[\frac{1}{8}K(V)r^2\right]r\mathrm{d}r &= \\ \frac{8\cos(\beta s)\left(\exp\left[\frac{1}{8}K(V)D^2\right] - \exp\left[\frac{1}{8}K(V)s^2\right]\right)}{K(V)\beta(D^2 - s^2)}.\end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned}\int_0^r C(s)^{-1}\mathrm{d}s\int_s^D C(u)f(u)\mathrm{d}u &\leqslant \int_0^r \frac{8\cos(\beta s)}{K(V)\beta(D^2 - s^2)}\left\{\exp\left[\frac{1}{8}(D^2 - s^2)\right] - 1\right\}\mathrm{d}s \leqslant \\ \frac{8}{D^2\beta^2 K(V)}&\left\{\exp\left[\frac{1}{8}D^2\right] - 1\right\}f(r),\quad r \in [0, D].\end{aligned}$$

由定理 1 得(1.4)式的第 1 个不等式，而第 2 个估计由(1.3)式的第 2 个不等式得到.

(iii) 假定 $K(V) \leqslant 0$．取 $f(r) = \sin(\beta r)$．则

$$\begin{aligned}I(s) := \int_s^D \exp\left[\frac{1}{8}K(V)r^2\right]\sin(\beta r)\mathrm{d}r &= \\ \frac{\cos(\beta s)}{\beta}\exp\left[\frac{1}{8}K(V)s^2\right] &+ \frac{K(V)}{4\beta}\int_s^D \exp\left[\frac{1}{8}K(V)r^2\right]r\cos(\beta r)\mathrm{d}r.\end{aligned}\tag{2.2}$$

取 $\nu(\mathrm{d}r) = Z^{-1}\sin(\beta r)\mathrm{d}r$，由 FKG 不等式得

$$\begin{aligned}\int_s^D \exp\left[\frac{1}{8}K(V)r^2\right]r\cos(\beta r)\mathrm{d}r &\geqslant I(s)\left(\int_s^D \sin(\beta r)\mathrm{d}r\right)^{-1}\int_s^D r\cos(\beta r)\mathrm{d}r = \\ \cos^{-1}(\beta s)I(s)[D - s\sin(\beta s) - \beta^{-1}\cos(\beta s)] &\geqslant I(s)D\left(1 - \frac{2}{\pi}\right)\cos(\beta s).\end{aligned}\tag{2.3}$$

此处，用到了不等式 $\pi/2 - r\sin r - \cos r \geqslant (1 - 2/\pi)\cos^2 r$，$r \in [0, \pi/2]$．结合(2.2)和(2.3)式，有

$$I(s) \leqslant \frac{\cos(\beta s)}{\beta}\exp\left[\frac{1}{8}K(V)s^2\right] + \frac{DK(V)}{4\beta}\left(1 - \frac{2}{\pi}\right)I(s)\cos(\beta s).\tag{2.4}$$

此外,易证 $g(s):=I(s)\exp\left[-\frac{1}{8}K(V)s^2\right]$是 s 的非增函数. 事实上,由于 $r^{-1}\sin(\beta r)$是减函数,有

$$g'(s)=\frac{-K(V)}{4}s\ \exp\left[-\frac{1}{8}K(V)s^2\right]\int_s^D\exp\left[\frac{1}{8}K(V)r^2\right]\sin(\beta r)\mathrm{d}r-\sin(\beta s)\leqslant$$
$$\frac{-K(V)}{4}\sin(\beta s)\exp\left[-\frac{1}{8}K(V)s^2\right]\int_s^D\exp\left[\frac{1}{8}K(V)r^2\right]r\mathrm{d}r-\sin(\beta s)=$$
$$-\sin(\beta s)\exp\left[\frac{1}{8}K(V)(D^2-s^2)\right]\leqslant 0.$$

取 $\nu(\mathrm{d}r)=Z^{-1}\mathrm{d}r$,由 FKG 不等式得

$$\int_0^r g(s)\cos(\beta s)\mathrm{d}s\geqslant\frac{\sin(\beta r)}{\beta r}\int_0^r g(s)\mathrm{d}s\geqslant\frac{2}{\pi}\int_0^r g(s)\mathrm{d}s.$$

最后,将(2.4)式两边乘以 $\exp\left[-\frac{1}{8}K(V)s^2\right]$并在$[0,r]$上取积分,得

$$\int_0^r g(s)\mathrm{d}s\leqslant\left[1-\frac{D^2K(V)}{\pi^2}\left(1-\frac{2}{\pi}\right)\right]^{-1}\frac{\sin(\beta r)}{\beta^2}.$$

由此及定理 1,立得(1.5)式.

对于 $V\equiv 0$ 情形,选取

$$\gamma(r)=2\sqrt{K^+(d-1)}\tanh\left[\frac{r}{2}\sqrt{K^+/(d-1)}\right]-2\sqrt{K^-(d-1)}\tan\left[\frac{r}{2}\sqrt{K^-/(d-1)}\right].$$

则

$$C(r)=\begin{cases}\cosh^{d-1}\left[\frac{r}{2}\sqrt{K/(d-1)}\right], & 若\ K\geqslant 0,\\ \cos^{d-1}\left[\frac{r}{2}\sqrt{-K/(d-1)}\right], & 若\ K\leqslant 0.\end{cases}$$

从现在起,记 $\alpha=\frac{1}{2}\sqrt{|K|/(d-1)}$. 在以下的讨论中,将经常用到如下引理.

引理 2 设 $f\in C^1[0,D]$. 如存在 $r_0\in[0,D]$使得 $f'|_{[0,r_0]}\leqslant 0$, $f'|_{[r_0,D]}\geqslant 0$, 则 $f\leqslant\max\{f(0),f(D)\}$.

推论 2 的证 (i) 由(1.5)式及 $\pi/(4d)<1-2/\pi$ $(d>2)$, 为证(1.6)式, 只需证 $d=2$ 时 $\lambda_1\geqslant\pi^2/D^2-\pi K/(4d)$. 为此,取 $f(r)=\sin(\beta r)$. 由于 $\alpha\leqslant\beta$,有

$$I(s):=\int_s^D\cos(\alpha r)\sin(\beta r)\mathrm{d}r=\frac{1}{\beta}\cos(\alpha s)\cos(\beta s)-\frac{\alpha}{\beta}\int_s^D\sin(\alpha r)\cos(\beta r)\mathrm{d}r\leqslant$$
$$\frac{1}{\beta}\cos(\alpha s)\cos(\beta s)-\frac{\alpha^2}{\beta^2}\int_s^D\sin(\beta r)\cos(\beta r)\mathrm{d}r=$$
$$\frac{1}{\beta}\cos(\alpha s)\cos(\beta s)-\frac{\alpha^2}{2\beta^3}\cos^2(\beta s).$$

此外,由引理 2 知 $g(r):=\frac{D}{2}\sin(\beta r)-\int_0^r\cos^2(\beta s)\mathrm{d}s\leqslant 0$, $r\in[0,D]$. 因此

$$\int_0^r I(s)\cos^{-1}(\alpha s)\mathrm{d}s=\frac{\sin(\beta r)}{\beta^2}-\frac{\alpha^2}{2\beta^3}\int_0^r\cos^{-1}(\alpha s)\cos^2(\beta s)\mathrm{d}s\leqslant$$

$$\frac{\sin(\beta r)}{\beta^2}\left(1-\frac{\alpha^2 D}{4\beta}\right)=\frac{\sin(\beta r)}{\beta^2}\left(1-\frac{\alpha^2 D}{4\beta}\right).$$

由定理 1 得

$$\lambda_1 \geqslant \frac{\pi^2}{D^2}\left(1-\frac{\alpha^2 D}{4\beta}\right)^{-1} \geqslant \frac{\pi^2}{D^2}\left(1+\frac{\alpha^2 D}{4\beta}\right)=\frac{\pi^2}{D^2}-\frac{\pi}{8}K.$$

(ii) 为证(1.7)式，令 $f(r)=\sin(\alpha r)$，有

$$\int_0^r \cos^{1-d}(\alpha s)\mathrm{d}s\int_s^D \cos^{d-1}(\alpha u)f(u)\mathrm{d}u=\frac{1}{d\alpha}\int_0^r \cos^{1-d}(\alpha s)[\cos^d(\alpha s)-\cos^d(\alpha D)]\mathrm{d}s \leqslant$$
$$\alpha^{-2}d^{-1}[1-\cos^d(\alpha D)]f(r).$$

由定理 1 立得第 1 个估计. 为验证第 2 个估计，只需证明

$$g(r):=\frac{dr^2}{d-1}-\left(\frac{8}{D^2}+\frac{r^2}{2}\right)[1-\cos^d(\sigma r)]\geqslant 0,\ r\geqslant 0,$$

其中 $\sigma=D/(2\sqrt{d-1})$. 注意到

$$g'(r)=\frac{2dr}{d-1}-r[1-\cos^d(\sigma r)]-\left(\frac{8}{D^2}+\frac{r^2}{2}\right)d\sigma\cos^{d-1}(\sigma r)\sin(\sigma r)\geqslant$$
$$\frac{2dr}{d-1}-r[1-\cos^d(\sigma r)]-\left(\frac{8}{D^2}+\frac{r^2}{2}\right)d\sigma^2 r\cos^{d-1}(\sigma r)=rh(r),$$

其中 $h(r)=2d/(d-1)-1+\cos^d(\sigma r)-(8/D^2+r^2/2)d\sigma^2\cos^{d-1}(\sigma r)$. 有 $h(0)=0$ 且

$$h'(r)=-d\sigma\cos^{d-1}(\sigma r)\sin(\sigma r)-rd\sigma^2\cos^{d-1}(\sigma r)+$$
$$\left(\frac{8}{D^2}+\frac{r^2}{2}\right)d\sigma^3(d-1)\cos^{d-2}(\sigma r)\sin(\sigma r)\geqslant$$
$$\sigma d\cos^{d-2}(\sigma r)\sin(\sigma r)\left(-2+\frac{8}{D^2}(d-1)\sigma^2\right)=0.$$

因而 $g'(r)\geqslant rh(r)\geqslant rh(0)=0$. 由此得 $g(r)\geqslant g(0)=0$.

推论 3 的证 (i) 取 $f(r)=\sin(\beta r)$. 则

$$I(s):=\int_s^D C(u)f(u)\mathrm{d}u=\int_s^D \cosh^{d-1}(\alpha u)\sin(\beta u)\mathrm{d}u=$$
$$\frac{1}{\beta}\cosh^{d-1}(\alpha s)\cos(\beta s)+\frac{\alpha}{\beta}(d-1)\int_s^D \cosh^{d-2}(\alpha u)\sinh(\alpha u)\cos(\beta u)\mathrm{d}u\leqslant$$
$$\frac{1}{\beta}\cosh^{d-1}(\alpha s)\cos(\beta s)+\frac{\alpha^2}{\beta}(d-1)\int_s^D \cosh^{d-1}(\alpha u)u\cos(\beta u)\mathrm{d}u. \tag{2.5}$$

这里最后一步用到了不等式 $\sinh r\leqslant r\cosh r$, $r\geqslant 0$. 令 $\nu(dr)=Z^{-1}\sin(\beta r)$，由于 $u\cot(\beta u)$ 是减函数而 $\cosh^{d-1}(\alpha u)$ 是增函数，由 FKG 不等式得

$$\int_s^D \cosh^{d-1}(\alpha u)u\cos(\beta u)\mathrm{d}u=\int_s^D \cosh^{d-1}(\alpha u)u\cot(\beta u)\sin(\beta u)\mathrm{d}u\leqslant$$
$$I(s)\left(\int_s^D \sin(\beta u)\mathrm{d}u\right)^{-1}\int_s^D u\cos(\beta u)\mathrm{d}u=$$
$$I(s)\cos^{-1}(\beta s)[D-s\sin(\beta s)-\beta^{-1}\cos(\beta s)]\leqslant$$
$$(D-\beta^{-1})I(s)=D\left(1-\frac{2}{\pi}\right)I(s). \tag{2.6}$$

此处,使用了不等式 $D - s\sin(\beta s) \leqslant D\cos(\beta s)$,这可由引理2导出. 由(2.5)和(2.6)式得

$$I(s) \leqslant \frac{1}{\beta}\cosh^{d-1}(\alpha s)\cos(\beta s)\left[1 - \left(1 - \frac{2}{\pi}\right)\frac{D^2K}{2\pi}\right]^{-1}.$$

由定理1立得(1.8)式.

(ii) 取 $f(r) = \cosh^{1-d}(\alpha r)\sin(\beta r)$,有

$$\int_0^r C(s)^{-1}\mathrm{d}s\int_s^D C(u)f(u)\mathrm{d}u = \frac{1}{\beta}\int_0^r \cosh^{1-d}(\alpha s)\cos(\beta s)\mathrm{d}s \leqslant$$
$$\frac{1}{\beta}\cosh^{d-1}(\alpha D)f(r)\int_0^D \cosh^{1-d}(\alpha s)\cos(\beta s)\mathrm{d}s. \tag{2.7}$$

为验证这一不等式,令 $c = \int_0^D \cosh^{1-d}(\alpha s)\cos(\beta s)\mathrm{d}s$,定义

$$g(r) = \int_0^r \cosh^{1-d}(\alpha s)\cos(\beta s)\mathrm{d}s - c\cosh^{d-1}(\alpha D)f(r).$$

则 $g'(r) = \cosh^{1-d}(\alpha r)\cos(\beta r)h(r)$,其中

$$h(r) = 1 + c(d-1)\alpha\cosh^{d-1}(\alpha D)\tanh(\alpha r)\tan(\beta r) - c\beta\cosh^{d-1}(\alpha D).$$

由于 h 关于 r 增且 $h(0) < 0$, $h(D) = \infty$,由引理2得 $g(r) \leqslant \max\{g(0), g(D)\} = 0$. 从而(2.7)式得证. 由此及定理1得

$$\lambda_1 \geqslant \frac{\pi^2}{D^2}\cosh^{1-d}(\alpha D)\left\{\beta\int_0^D \cosh^{1-d}(\alpha s)\cos(\beta s)\mathrm{d}s\right\}^{-1}. \tag{2.8}$$

(iii) 现估计(2.8)式右边的积分项. 令 $c = D^2K/(2\pi^2)$, $g(r) = \cosh^{d-1}(\alpha r) - 1 - c\sin^2(\beta r)$. 则 $g(0) = 0$ 且

$$g'(r) = (d-1)\alpha\cosh^{d-2}(\alpha r)\sinh(\alpha r) - 2c\beta\sin(\beta r)\cos(\beta r) \geqslant$$
$$(d-1)\alpha^2 r - 2c\beta^2 r = 0.$$

因此 $g(r) \geqslant 0$,从而由(2.8)式得

$$\lambda_1 \geqslant \frac{\pi^2}{D^2}\cosh^{1-d}(\alpha D)\left\{\frac{\pi\sqrt{2}}{D\sqrt{K}}\arctan\left[\frac{D\sqrt{K}}{\pi\sqrt{2}}\right]\right\}^{-1}. \tag{2.9}$$

令 $c = 4/\pi^2$, $g(r) = \arctan r - r/\sqrt{1 + cr^2}$. 则 $g'(r) = (1 + r^2)^{-1} - (1 + cr^2)^{-3/2} \geqslant 0$ 当且仅当

$$h(r) := c^3r^4 + (3c^2 - 1)r^2 + 3c - 2 \geqslant 0.$$

由于 $h(0) = 3c - 2 < 0$,从而存在 $r_0 > 0$ 使 $h|_{[0, r_0]} \leqslant 0$, $h|_{[r_0, \infty)} > 0$. 由引理2可得 $g(r) \leqslant \max\{g(0), g(\infty)\} = 0$. 从而 $r(\arctan r)^{-1} \geqslant \sqrt{1 + 4r^2/\pi^2}$,即(2.9)式蕴含(1.9)式.

3 非紧流形上的谱隙

设 M 是完备的连通 Riemann 流形, $D = \infty$. 设 $\mathrm{Ric}_M \geqslant -K$, $K \geqslant 0$, $K(V) < \infty$ 且 $Z := \int \exp[V(x)]\mathrm{d}x < \infty$. 则 L 扩散过程非爆炸且关于 $\mu(\mathrm{d}x) := Z^{-1}\exp[V(x)]\mathrm{d}x$ 可逆. L 的谱隙是

$$\lambda_1 = \inf\{\mu(\|\nabla f\|^2)/\mu(f^2): f \in C^1(M) \cap L^2(\mu), \mu(f) = 0\}.$$

设 γ 和 C 如第1节所定义,只是把 D 改成 ∞.

定理 2　如存在一列凸正则区域 $D_n \uparrow M$，则定理 1 对现在的 M 成立，只是把 D 改成 ∞.

证　设 $\lambda_1(n)$ 是 L 在 D_n 上的第一 Neumann 特征值．则由文献[7]引理 1 的证明知 $\lambda_1 \geqslant \overline{\lim_{n\to\infty}}\lambda_1(n)$．从而定理 2 得证．

由 Whitehead 定理(见文献[15]的定理 5.14)，当 M 的截面曲率非正且某点的割迹是空集时，定理 2 的假设成立．

给定 $p\in M$，令 $\beta(r)=\inf_{\rho(x,p)\geqslant r}\{-\mathrm{Hess}_V(X,X): X\in T_xM,\ \|X\|=1\}$．则有如下结果．

推论 4　在定理 2 的假设下，若 $\beta(\infty):=\lim_{r\to\infty}\beta(r)>0$，则 $\lambda_1>0$．进一步，如果 M 的截面曲率非正且每点的割迹都是空集，则定理 2 对如下 γ 成立

$$\gamma(r) = 2\sqrt{K(d-1)}\tanh\Big[\frac{r}{2}\sqrt{K/(d-1)}\Big] - 2\int_0^{r/2}\beta(u)\mathrm{d}u. \tag{3.1}$$

特别地，有

$$\lambda_1 \geqslant \frac{8}{a_0^2}\exp\Big[-1-\frac{1}{4}\int_0^{a_0}\gamma(u)\mathrm{d}u\Big] > 0,$$

其中 $a_0>0$ 是方程 $\gamma(a)=-8/a$ 的唯一解．

证　(i) 设 $r_0>0$ 满足 $\beta(r_0)>0$．对于任何极小测地线，其含于 $B(p,r_0)$ 部分的长度不超过 $2r_0$．设 $x,y\in M$ 满足 $\rho(x,y)=r$，$l(s):[0,r]\to M$ 是从 x 到 y 的极小测地线，U_s 是单位切向量．则

$$\begin{aligned}&\langle\nabla V(x),\nabla\rho(\cdot,y)(x)\rangle + \langle\nabla V(y),\nabla\rho(x,\cdot)(y)\rangle = \\ &\int_0^r \mathrm{Hess}_V(U_s,U_s)\mathrm{d}s \leqslant 2r_0[\beta(r_0)-\beta(0)] - r\beta(r_0).\end{aligned} \tag{3.2}$$

因此可选取 $\gamma(r)=2\sqrt{K(d-1)}+2r_0[\beta(r_0)-\beta(0)]-r\beta(r_0)$，令 $f(r)=r$，由定理 2 得 $\lambda_1>0$．

(ii) 从现在起，假定 M 的截面曲率非正且每点的割迹都是空集．设 $l:[0,\rho(x,y)]\to M$ 是极小测地线(从 x 到 y)，取 s_0 使得 $\rho(p,l(s_0))=\min_s\{\rho(p,l(s))\}$．我们有 $\rho(p,l(s))\geqslant |s-s_0|$．事实上，不失一般性，假定 $s>s_0$，令 $X_1=\exp_{l(s_0)}^{-1}(p)$，$X_2=\exp_{l(s_0)}^{-1}(l(s))$，则

$$\langle X_1,X_2\rangle = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\rho(p,l(s))\Big|_{s=s_0} \leqslant 0.$$

取 $p',q'\in\mathbb{R}^d$ 使 $|p'|=\rho(p,l(s_0))$，$|q'|=s-s_0$ 且 $\langle p',q'\rangle=\langle X_1,X_2\rangle$．设 $I:T_{l(s_0)}M\to\mathbb{R}^d$ 线性，保持内积且 $I(X_1)=p'$，$I(X_2)=q'$．最后，令 $c(t):[0,\rho(p,l(s))]\to M$ 是从 p 到 $l(s)$ 的极小测地线．则 $\bar{c}(t):=I\circ\exp_{l(s_0)}^{-1}\circ c(t)$ 是从 p' 到 q' 的曲线．由 Rauch 比较定理(见文献[15]的推论 1.30)，有

$$\rho(p,l(s)) \geqslant \bar{c}(t)\text{ 的长度} \geqslant |p'-q'| \geqslant |q'| = s-s_0.$$

此处用到了 $\langle p',q'\rangle\leqslant 0$.

(iii) 给定 $r>0$，设 $x,y,l(s)$ 及 U_s 如(i)中所给，由(3.2)式及(ii)得

$$\begin{aligned}&\langle\nabla V(x),\nabla\rho(\cdot,y)(x)\rangle + \langle\nabla V(y),\nabla\rho(x,\cdot)(y)\rangle \leqslant \\ &-\int_0^{s_0}\beta(s)\mathrm{d}s - \int_0^{r-s_0}\beta(s)\mathrm{d}s \leqslant -2\int_0^{r/2}\beta(u)\mathrm{d}u,\end{aligned}$$

其中最后一步用到了 β 的非降性. 因此定理2对(3.1)式所给的 $\gamma(r)$ 成立.

(iv) 由于 $\gamma(r)/r$ 是 r 的减函数, 而 $-8/r^2$ 是 r 的增函数, 所以当 $\beta(\infty)>0$ 时, 有唯一解 $a_0>0$. 取

$$f(r) = r\exp\left[-\frac{r}{4}\int_0^{r\wedge a_0}\left(\gamma(u)-\frac{u}{a_0}\gamma(a_0)\right)\mathrm{d}u\right].$$

由定理2得

$$\lambda_1 \geqslant -\frac{\gamma(a_0)}{a_0}\exp\left[-\frac{1}{4}\int_0^{a_0}\left(\gamma(u)-\frac{u}{a_0}\gamma(a_0)\right)\mathrm{d}u\right] =$$

$$\frac{8}{a_0^2}\exp\left[-1-\frac{1}{4}\int_0^{a_0}\gamma(u)\mathrm{d}u\right].$$

参　考　文　献

1 Bérard P H. Spectral Geometry, Direct and Inverse Problem. New York: Springer-Verlag, 1986

2 Chavel I. Eigenvalues in Riemannian Geometry. New York: Academic Press, 1984

3 丘成桐, 孙理察. 微分几何. 北京: 科学出版社, 1988

4 陈木法, 王凤雨. 耦合方法在流形第一特征值问题上的应用. 中国科学, A辑, 1993, 23(11): 1 130～1 140

5 Chen M F. Optimal Markovian couplings and applications. Acta Math Sin (New Ser), 1994, 10(3): 260～275

6 Wang F Y. Application of coupling method to the Neumann eigenvalue problem. Prob Th Re Fields, 1994, 98: 299～306

7 Wang F Y. Spectral gap for diffusion processes on noncompact manifolds. Chin Sci Bull, 1995, 40(14): 1 145～1 149

8 Lichnerowicz A. Géométrie des Groupes des Transformations. Paris: Dunod, 1958

9 Zhong J Q, Yang H C. On estimate of the first eigenvalue of a compact Riemannian manifold. Sci Sin, Ser A, 1984, 12: 1 251～1 265

10 Cai K R. Estimate on lower bound of the first eigenvalue of a compact Riemannian manifold, China Ann Math, Ser B, 1991, 12(3): 267～271

11 杨洪苍. 曲率具负下界的紧致黎曼流形第一特征值估计. 中国科学, A辑, 1989, (7): 689～700

12 贾　方. 曲率具有负下界的紧致黎曼流形第一特征值的估计. 数学年刊, A辑, 1991, 12(4): 496～502

13 Kendall W S. Nonnegative Ricci curvature and the Brownian coupling property. Stochastics, 1986, 19: 111～129

14 Cranston M. Gradient estimates on manifolds using coupling. J Funct Anal, 1991, 99: 110～124

15 Cheeger J, Ebin D G. Comparison Theorems in Riemannian Geometry. Amsterdan: North-Holland, 1975