流数据驱动的多层非线性动力学网络重构

吴凯¹, 王超², 刘静^{2*}

1. 西安电子科技大学人工智能学院, 西安 710071;

2. 西安电子科技大学广州研究院, 广州 510555

* E-mail: neouma@mail.xidian.edu.cn

收稿日期: 2020-12-12; 接受日期: 2021-02-22; 网络版发表日期: 2021-06-28

科技部科技创新2030 – “新一代人工智能”重大项目(编号: 2018AAA0101302)和国家自然科学基金(批准号: 61773300)资助项目

摘要 现实世界中许多复杂的非线性动力学系统需要用多层网络来描述. 如何从观测到的流数据中揭示多层非线性动力学网络结构的重构问题是对动力学系统研究的核心问题之一. 虽然学者们提出了许多从静态数据中重构多层动力学网络结构的方法, 但是它们很难从流数据中重构多层网络结构. 由于该问题的困难性, 截止目前, 还没有适用于流数据的多层非线性动力学网络重构模型及其优化算法. 针对此, 本文提出流数据驱动的多层动力学网络重构框架, 称为OMNR(online multilayer network reconstruction). OMNR首先建立了流数据驱动的在线多层非线性动力学网络重构模型, 然后提出一种基于FTRL(follow-the-regularized-leader)的在线学习方法来优化该模型. OMNR每次只考虑一个事例来更新网络结构, 非常适合处理流数据. 而且, OMNR空间复杂度非常低, 适合大数据任务. 最后, 在多层网络的Lorenz和Rössler动力学系统上验证了OMNR可以有效地解决流数据驱动的多层动力学网络重构问题, 填补了流数据驱动的多层非线性动力学网络重构技术的空白.

关键词 网络重构, 非线性动力学, 在线学习, 多层网络, 数据流

1 引言

近十年来, 网络结构和非线性动力学的研究成为受到广泛关注的重要领域^[1~4]. 无论在社会科学、生命科学还是信息科学中, 都存在着拥有十分复杂的拓扑结构特征的网络结构, 如生命科学领域的各种网络——细胞网络、蛋白质交互作用网络、蛋白质折叠网络、神经网络、生态网络、Internet/WWW网络、社会网络, 包括流行性疾病的传播网络、科学家合作网络、人类性关系网络、气象网络等. 复杂网络是分

析复杂系统及其动力学的有效工具, 在控制与同步非线性复杂动力系统方面发挥着重要作用^[5~10]. 非线性动力学系统中的每一个关键因素或部分都可以看作是复杂网络中的一个节点. 然而, 非线性动力学系统的网络结构和节点动力学往往是未知的, 但是复杂系统各部分的运作会产生大量的状态数据, 人们可以记录系统各个单元显示出的各类数据. 因此, 如何根据非线性动力学系统观测的数据来揭示隐藏的网络结构成为网络数据分析的重要课题, 称为网络重构^[11~16].

引用格式: 吴凯, 王超, 刘静. 流数据驱动的多层非线性动力学网络重构. 中国科学: 技术科学, 2022, 52: 971–982

Wu K, Wang C, Liu J. Multilayer nonlinear dynamical network reconstruction from streaming data (in Chinese). Sci Sin Tech, 2022, 52: 971–982, doi: 10.1360/SST-2020-0491

现实中存在大量的由网络数据来探索网络结构的需求. 例如, 大脑功能活动可以被核磁共振、弥散张量成像、红外血氧探测等多种大脑神经活动信号采集技术记录成为各类数据^[17], 它们极大地促进了脑功能网络构建和脑活动分析的发展. 从数据分析到大脑功能网络的构建就是网络重构的重要任务之一. 为了解决网络重构问题, 人们开发了各种各样的网络重构方法^[14,17~22]. 现有的网络重构方法可以分为无模型方法和基于模型的方法. 前者通过测量两个节点之间的相关性^[23,24]、互信息^[25]、最大熵分布^[26,27]、格兰杰因果关系^[28]、因果熵^[29]、显式依赖矩阵^[15]和贝叶斯估计^[30,31]来确定两个节点之间连接的存在和强度. 仅这些网络重构方法不能提供有关动态的信息, 而这对于预测复杂系统中关键的过渡是必不可少的. 基于模型的方法提供了动力学和交互作用的估计或假设具有先验知识, 并使用此知识来重构网络结构. 当相互作用很强时, 网络结构就可以重构^[14,16,32~51]. 这两类方法能够很好地处理静态数据并重构出较好的单一网络结构. 但是, 随着社会的发展, 各种类型的网络时时相连. 很多网络化系统是由多个相互交互、相互依存的单个网络所构成的, 使用单一的网络模型很难对其准确建模. 例如, 新的朋友加入了你的社交圈, 将你的交际网络和他们的连接起来; 电话、银行、电厂全部登陆互联网, 并在网上互联互通. 因此, 人们需要更加贴合实际系统的网络模型, 比如多层网络^[52,53]. 以上工作主要集中在单层网络上, 但由于多层网络中不同层之间的互连性, 以上方法难以应用于多层网络的重构. 为了确定多层网络的结构, 有学者提出了基于压缩感知^[54~56]或最大似然估计^[57]的优化框架来重构多层网络结构.

然而, 在大数据的推动下, 规模巨大的非线性动力学系统运作必将产生规模巨大的数据, 不仅数量增长快而且更新十分迅速, 不断产生数据形成流. 流数据已成为主流的动力学系统观测数据类型^[58]. 现有的多层动力学网络重构方法均属于批量方法, 它们假设所有数据在学习阶段之前都是可用的. 然而, 现有的多层网络重构模型并不适用流数据^[54~56], 同时它们的模型优化算法也不适用于流数据驱动的多层非线性动力学重构模型. 因此, 在大数据时代下, 为了更加切合实际问题, 迫切需求能够高效地处理流数据的多层动力学网络重构模型和算法. 与此同时, 流数据驱动的多

层网络重构问题对高性能的建模和优化技术提出了新的需求. 因此, 如何打破现有多层非线性动力学网络重构模型无法处理流数据的禁锢, 并提出能够高效地处理流数据的多层动力学网络重构算法是本文要回答的问题.

与传统的批量网络重构方法不同, 本文首先提出了一个流数据驱动的在线多层非线性动力学网络重构框架, 称之为OMNR(online multilayer network reconstruction). 然后, 对于流数据驱动的多层非线性动力学网络重构问题, 本文提出了适应于流数据的在线多层非线性动力学网络重构模型. 该模型每次考虑一个事例, 依次迭代地更新网络结构, 这使得所提模型非常适合于处理数据按顺序到达的任务. 然而, 现有的非线性动力学网络重构算法并不能优化流数据驱动的多层非线性动力学网络重构模型. McMahan^[59]提出的FTRL-Proximal(follow-the-regularized-leader-Proximal)算法是解决大规模在线凸优化问题的有效算法. FTRL-Proximal算法具有良好的稀疏性和收敛性, 并已成功应用于预测广告点击率^[60]等应用. 由于FTRL-Proximal算法在处理具有稀疏性的在线问题^[59~61]中的良好性能, 本文提出了一种基于FTRL-Proximal的算法来优化所提出的在线多层非线性动力学网络重构模型. 为了验证所提框架的有效性, 本文使用发生在不同类型的双层网络的Lorenz和Rössler系统进行仿真. 实验结果展示了所提方法能够很好地从流数据中重构多层非线性动力学网络结构. 本文的主要贡献点总结如下.

(1) 为了打破现有方法无法从流数据中重构多层非线性动力学网络结构的禁锢, 本文提出了一种流数据驱动的在线多层网络重构框架. 所提出的OMNR是第一个在线多层非线性动力学网络重构框架, 它将批量多层非线性动力学网络重构模型扩展到在线多层非线性动力学网络重构模型, 使其能够很好地契合流数据.

(2) 受在线学习中的FTRL-Proximal方法的启发, 本文提出了一种有效的在线多层非线性动力学网络重构算法来优化所建立的重构模型. 所提算法每次只使用一个事例来更新网络结构, 适合处理流数据. 而且, 所提算法的空间复杂度非常低, 适合大数据任务. 实验结果表明该框架能够高精度地从流数据中重构多层非线性动力学网络结构.

2 多层动力学网络重构问题

本节首先介绍多层网络的动力学系统, 然后给出相关的多层网络重构模型. 多层网络定义了一个丰富的交互结构来动态描述多层系统^[62]. 与单层网络重构问题相比, 从动态观测和控制的角度来看, 由于多层网络之间存在相互作用, 多层网络的结构识别更加困难. 两层网络作为多层网络的一个基本例子, 已经在许多领域得到了应用^[63]. 图1展示了不同层的节点之间的一一对应关系. 不同层次节点的动态演化可以是相同的, 也可以是不同的.

在每层具有 N_c 节点的 K 层网络模型中, 节点的动态演化表示如下:

$$\dot{\mathbf{x}}_i^k = \mathbf{f}_i^k(\mathbf{x}_i^k) + D_k \sum_{j=1}^{N_c} c_{ij}^k \Gamma(\mathbf{x}_j^k - \mathbf{x}_i^k) + \sum_{l=1}^K D_{kl} \Gamma(\mathbf{x}_i^l - \mathbf{x}_i^k), \quad (1)$$

$$i = 1, 2, \dots, N_c, \quad k = 1, 2, \dots, K,$$

其中, $\mathbf{x}_i^k = (x_{i1}^k, x_{i2}^k, \dots, x_{ir}^k)^\top$ 和 $\mathbf{f}_i^k = (f_{i1}^k, f_{i2}^k, \dots, f_{ir}^k)^\top$ 分别表示状态向量和节点 i 在 k 层的动力学方程. c_{ij}^k 表示节点 i 和 j 在 k 层的耦合权重. D_k 和 D_{kl} 分别为层内和层间耦合常数. 内耦合矩阵 $\Gamma \in \mathbb{R}^{r \times r}$ 表示变量间的相互作用. $\mathbf{x}^\top$ 表示向量 $\mathbf{x}$ 的转置. 在式(1)中, 等式右边的第一项表示节点 i 的自我动力学, 第二项表示层内的节点对节点 i 的影响, 第三项表示层外的节点对节点 i 的影响.

基于式(1), 在不失概括性的前提下, K 层网络模型的节点动力学方程描述如下:

图1 (网络版彩图) 一个两层网络的例子, 层内连接和层间连接分别用实线和虚线表示

Figure 1 (Color online) For an example of a two-layer network, the intra-layer connections and the inter-layer connections are represented by solid lines and dashed lines, respectively.

$$\dot{\mathbf{X}}^k = \mathbf{F}^k - \left(D_k L_k + \sum_{i=1}^K D_{ki} \Gamma \right) \otimes \Gamma \mathbf{X}^k + \sum_{i=1}^K D_{ki} \mathbf{I} \otimes \Gamma \mathbf{X}^i, \quad (2)$$

$$\mathbf{X}^k = \left(\mathbf{x}_1^k, \mathbf{x}_2^k, \dots, \mathbf{x}_{N_c}^k \right)^\top, \quad \mathbf{F}^k = \left(\mathbf{f}_1^k, \mathbf{f}_2^k, \dots, \mathbf{f}_{N_c}^k \right)^\top,$$

$$k = 1, 2, \dots, K,$$

其中 $\mathbf{I}$ 和 $\otimes$ 分别表示单位矩阵和Kronecker积. k 层的拉普拉斯矩阵 $\mathbf{L}_k$ 表示如下:

$$\mathbf{L}_k = \mathbf{G}_k - \mathbf{C}_k = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & d_{N_c} \end{pmatrix}_k - \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1N_c} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{N_c 1} & \cdots & c_{N_c N_c} \end{pmatrix}_k, \quad (3)$$

其中 $\mathbf{G}_k$ 和 $\mathbf{C}_k$ 分别是 k 层的度矩阵和邻接矩阵. d_i 是节点 i 的度数.

为了便于分析, 根据式(2), 定义 $\mathbf{B}^k$ 如下:

$$\mathbf{B}^k = \dot{\mathbf{X}}^k - \mathbf{F}^k - \sum_{i=1}^K D_{ki} \mathbf{I} \otimes \Gamma(\mathbf{X}^i - \mathbf{X}^k) = -D_k(\mathbf{G}_k - \mathbf{C}_k) \otimes \Gamma \mathbf{X}^k, \quad (4)$$

$$k = 1, 2, \dots, K.$$

假设 K 层网络中节点的演化是在一系列时间点 $1, 2, \dots, m-1$ 处观察到的. 然后式(4)可以表示为

$$(\mathbf{B}_1^k, \mathbf{B}_2^k, \dots, \mathbf{B}_{m-1}^k) = -D_k(\mathbf{G}_k - \mathbf{C}_k) \otimes \Gamma(\mathbf{X}_1^k, \mathbf{X}_2^k, \dots, \mathbf{X}_{m-1}^k), \quad (5)$$

$$k = 1, 2, \dots, K.$$

因为 $\mathbf{G}_k - \mathbf{C}_k$ 的行和为0, 所以有

$$\mathbf{1}_{N_c \times r} (-D_k(\mathbf{G}_k - \mathbf{C}_k) \otimes \Gamma)^\top = \mathbf{0}_{N_c \times r}, \quad (6)$$

$$\mathbf{1}_{N_c \times r} = \begin{pmatrix} 1, 1, \dots, 1 \\ \hline N_c \times r \end{pmatrix}, \quad \mathbf{0}_{N_c \times r} = \begin{pmatrix} 0, 0, \dots, 0 \\ \hline N_c \times r \end{pmatrix}.$$

$$\text{令 } \mathbf{Y}^k = (\mathbf{B}_1^k, \mathbf{B}_2^k, \dots, \mathbf{B}_{m-1}^k, \mathbf{0}_{N_c \times r}^\top)^\top, \quad \mathbf{A}^k = (\mathbf{X}_1^k, \mathbf{X}_2^k, \dots, \mathbf{X}_{m-1}^k, \mathbf{1}_{N_c \times r}^\top)^\top, \quad \text{式(5)可以重写为}$$

$$\mathbf{Y}^k = \mathbf{A}^k \mathbf{M}_k^\top, \quad k = 1, 2, \dots, K, \quad (7)$$

其中, $\mathbf{M}_k = -D_k(\mathbf{G}_k - \mathbf{C}_k) \otimes \Gamma$. 对于第 k 层, 假设内部耦合矩阵 Γ , 层内耦合函数 D_k , 层间的耦合常数 D_{kl} , 观测数据 $\mathbf{A}_k$ 和动态函数 $\mathbf{F}_k$ 已知, 则可以通过式(4)计算 $\mathbf{Y}_k$. 本文的优化目标是通过 $\mathbf{Y}_k$ 和 $\mathbf{A}_k$ 重构出网络结构 $\mathbf{M}_k$. 由于多层网络的稀疏性, 多层网络重构问题可表示为

$$\begin{cases} \min_{\mathbf{M}_k} \|\mathbf{M}_k\|_1, & k = 1, 2, \dots, K, \\ \text{s.t. } \mathbf{Y}^k = \mathbf{A}^k \mathbf{M}_k^\top, & k = 1, 2, \dots, K, \end{cases} \quad (8)$$

其中 $\|\mathbf{M}_k\|_1$ 是 $\mathbf{M}_k$ 的 l_1 正则化. 值得注意的是, 基于式(4)和(8), 每层网络重构可以视为一个优化任务. 为了从 $\mathbf{Y}^k$ 和 $\mathbf{A}^k$ 重建 $\mathbf{M}_k$, 给出了以下折衷形式:

$$\min_{\mathbf{M}_k} \left(\frac{1}{2} \|\mathbf{Y}^k - \mathbf{A}^k \mathbf{M}_k^\top\|_2^2 + \lambda \|\mathbf{M}_k\|_1 \right), \quad k = 1, 2, \dots, K, \quad (9)$$

其中, λ 是平衡重建误差和网络稀疏性的常数. 为了解决这个多层网络重构问题, Mei等人^[54]利用压缩感知方法识别两层网络中的一层结构.

3 在线多层非线性动力学网络重构

可以观察到现有的网络重构模型(9)假设所有的数据是已知的. 然而, 当有新的数据来临时, 网络重构算法需要重新优化式(9), 这非常耗时和浪费资源. 与此同时, 对于大数据而言, 很难将所有实例存储到计算机的内存中. 在线多层动力学网络重构问题的核心是如何利用实时流数据定义损失函数. 在线网络重构模型与批量网络重构模型的区别如图2所示.

为了解决这个问题, 本文将式(9)改写为 t 轮损失的总和, 如下所示:

$$\min_{\mathbf{W}_k} \sum_{i=1}^m L_t(\mathbf{M}_k), \quad k = 1, 2, \dots, K, \quad (10)$$

其中 $L_t(\mathbf{M}_k)$ 被定义如下:

图2 (网络版彩图)面向流数据的网络重构方法与批量网络重构方法的区别

Figure 2 (Color online) The difference between online network reconstruction methods and batch network reconstruction methods.

$$L_t(\mathbf{M}_k) = \frac{1}{2} (\mathbf{B}_t^k - \mathbf{A}_t^k \mathbf{M}_k^\top)^2, \quad k = 1, 2, \dots, K. \quad (11)$$

可以发现, 所建立的模型并不储存已经获取的数据, 而且每次目标函数的计算只与当前获得的数据有关. 该模型的建立为相应的优化算法建立起多个挑战. 首先, 针对梯度类方法, 如何根据新来的数据来更新梯度? 第二, 如何确保网络结构的稀疏性?

定义 为了简化算法描述, 以重建第 k 层的网络结构为例, 简化 $\mathbf{M}_k$ 为 $\mathbf{W}$, 也假设 $\mathbf{w}_i$ 为 $\mathbf{W}$ 的第 i 列.

不同于根据 $\sum L_t(\mathbf{W})$ 更新梯度的批处理网络重构方法, OMNR在第 t 次迭代中的梯度 $\nabla L_t(\mathbf{W})$ 是根据当前函数 $L_t(\mathbf{W})$, $i=1, 2, \dots, t$ 计算的. 在获得该梯度后, 在线梯度下降算法可以被用来更新 $\mathbf{w}_{i,t}$ ($\mathbf{w}_{i,t+1} = \mathbf{w}_{i,t} - C \nabla L_t(\mathbf{w}_i)$). 然而, 该算法并不能有效地生成稀疏模型. 事实上, 多层网络具有稀疏结构^[62]. 在第 t 轮, OMNR使用以下公式更新 $\mathbf{w}_{i,t}$:

$$\mathbf{w}_{i,t+1} = \underset{\mathbf{w}_i}{\operatorname{argmin}} \left(\sum_{s=1}^t \nabla L_s(\mathbf{w}_{i,s}) \mathbf{w}_i + \lambda_1 \|\mathbf{w}_i\|_1 + \frac{\lambda_2}{2} \|\mathbf{w}_i\|_2^2 + \frac{1}{2} \sum_{s=1}^t \sigma_s \|\mathbf{w}_i - \mathbf{w}_{i,s}\|_2^2 \right), \quad (12)$$

其中 λ_1 和 λ_2 是正常数, σ_s 为学习率且 $\sigma_{1:t} = (t)^{0.5}$. 为了简便, 假设 $\mathbf{g}_t = \nabla L_t(\mathbf{w}_i)$ 和 $\mathbf{g}_{1:t} = \sum_{s=1}^t \mathbf{g}_s$, 则式(12)可为

$$\begin{aligned} & \sum_{s=1}^t \nabla L_s(\mathbf{w}_{i,s}) \mathbf{w}_i + \lambda_1 \|\mathbf{w}_i\|_1 + \frac{\lambda_2}{2} \|\mathbf{w}_i\|_2^2 + \frac{1}{2} \sum_{s=1}^t \sigma_s \|\mathbf{w}_i - \mathbf{w}_{i,s}\|_2^2 \\ &= \mathbf{g}_{1:t} \mathbf{w}_i + \lambda_1 \|\mathbf{w}_i\|_1 + \frac{\lambda_2}{2} \|\mathbf{w}_i\|_2^2 + \frac{1}{2} \sum_{s=1}^t \sigma_s \|\mathbf{w}_i - \mathbf{w}_{i,s}\|_2^2 \\ &= \mathbf{g}_{1:t} \mathbf{w}_i + \lambda_1 \|\mathbf{w}_i\|_1 + \frac{\lambda_2}{2} \|\mathbf{w}_i\|_2^2 + \frac{1}{2} \sum_{s=1}^t \sigma_s \|\mathbf{w}_i\|_2^2 \\ & \quad + \frac{1}{2} \sum_{s=1}^t \sigma_s \|\mathbf{w}_{i,s}\|_2^2 - 2 \times \frac{1}{2} \sum_{s=1}^t \sigma_s \mathbf{w}_{i,s} \mathbf{w}_i \\ &= \left(\mathbf{g}_{1:t} - \sum_{s=1}^t \sigma_s \mathbf{w}_{i,s} \right) \mathbf{w}_i + \lambda_1 \|\mathbf{w}_i\|_1 + \frac{1}{2} \left(\lambda_2 + \sum_{s=1}^t \sigma_s \right) \|\mathbf{w}_i\|_2^2 \\ & \quad + \frac{1}{2} \sum_{s=1}^t \sigma_s \|\mathbf{w}_{i,s}\|_2^2. \end{aligned} \quad (13)$$

最终, 得到的更新公式为

$$\mathbf{w}_{i,t+1} = \underset{\mathbf{w}_i}{\operatorname{argmin}} \left(\left(\mathbf{g}_{1:t} - \sum_{s=1}^t \sigma_s \mathbf{w}_{i,s} \right) \mathbf{w}_i + \lambda_1 \|\mathbf{w}_i\|_1 + \frac{1}{2} \left(\lambda_2 + \sum_{s=1}^t \sigma_s \right) \|\mathbf{w}_i\|_2^2 + \frac{1}{2} \sum_{s=1}^t \sigma_s \|\mathbf{w}_{i,s}\|_2^2 \right), \quad (14)$$

其中, 由于 $w_{i,s}$ 在上一轮被计算, 所以最后一项为常数. 如果假设 $\mathbf{z}_t = \mathbf{g}_{1:t} - \sum_{s=1}^t \sigma_s \mathbf{w}_{i,s} = \mathbf{z}_{t-1} + \mathbf{g}_t - \sigma_t \mathbf{w}_{i,t}$, 上式可以简化为

$$w_{i,t+1} = \underset{w_i}{\operatorname{argmin}} \left(\mathbf{z}_t \mathbf{w}_i + \lambda_1 \|\mathbf{w}_i\|_1 + \frac{1}{2} \left(\lambda_2 + \sum_{s=1}^t \sigma_s \right) \|\mathbf{w}_i\|_2^2 \right). \quad (15)$$

在这种情况下, 最小化式(15)可以分解为 N_c 个独立的标量最小化问题, 每种形式如下所示:

$$w_{il,t+1} = \underset{w_{il}}{\operatorname{argmin}} \left(z_{it} w_{il} + \lambda_1 |w_{il}| + \frac{1}{2} \left(\lambda_2 + \sum_{s=1}^t \sigma_s \right) (w_{il})^2 \right), \quad (16)$$

其中 w_{il} 代表 $\mathbf{w}_i$ 中第 l 个元素, z_{it} 代表 $\mathbf{z}_t$ 中第 l 个元素. 式(16)是一个无约束非光滑凸优化问题, 可以得到一个封闭解. 式(16)的最优性条件是当且仅当存在 $\tau \in \nabla |w_{il}|^*$ 使

$$z_{it} + \lambda_1 \tau + \left(\lambda_2 + \sum_{s=1}^t \sigma_s \right) w_{il}^* = 0 \quad (17)$$

成立时, w_{il}^* 是最优解. $|w|$ 的次微分为 $\operatorname{sgn}(w)$, 定义如下:

$$\operatorname{sgn}(w) = \begin{cases} \{\tau \in \mathbb{R} | -1 \leq \tau \leq 1\}, & w = 0, \\ 1, & w > 0, \\ -1, & w < 0. \end{cases} \quad (18)$$

本节讨论三种不同情况下式(17)的解^[59,60].

(a) 如果 $|z_{it}| \leq \lambda_1$.

(1) $w_{il}^* = 0$, $\operatorname{sgn}(0) \in (-1, 1)$, 式(17)满足.

(2) $w_{il}^* > 0$, $z_{it} + \lambda_1 \operatorname{sgn}(w_{il}^*) = z_{it} + \lambda_1 \geq 0$, $\left(\lambda_2 + \sum_{s=1}^t \sigma_s \right) w_{il}^* >$

0. 式(17)不满足.

(3) $w_{il}^* < 0$, $z_{it} + \lambda_1 \operatorname{sgn}(w_{il}^*) = z_{it} - \lambda_1 \leq 0$, $\left(\lambda_2 + \sum_{s=1}^t \sigma_s \right) w_{il}^* <$

0. 式(17)不满足.

(b) 如果 $|z_{it}| > \lambda_1$.

(1) $w_{il}^* = 0$, $\operatorname{sgn}(0) \notin (-1, 1)$, 式(17)不满足.

(2) $w_{il}^* > 0$, $z_{it} + \lambda_1 \operatorname{sgn}(w_{il}^*) = z_{it} + \lambda_1 > 0$, $\left(\lambda_2 + \sum_{s=1}^t \sigma_s \right) w_{il}^* >$

0. 式(17)不满足.

(3) $w_{il}^* < 0$, $z_{it} + \lambda_1 \operatorname{sgn}(w_{il}^*) = z_{it} - \lambda_1 < 0$, $\left(\lambda_2 + \sum_{s=1}^t \sigma_s \right) w_{il}^* <$

0. 可以得到

$$w_{il}^* = - \left(\lambda_2 + \sum_{s=1}^t \sigma_s \right)^{-1} (z_{it} - \lambda_1). \quad (19)$$

(c) 如果 $z_{it} < -\lambda_1$.

(1) $w_{il}^* = 0$, $\operatorname{sgn}(0) \notin (-1, 1)$, 式(17)不满足.

(2) $w_{il}^* > 0$, $z_{it} + \lambda_1 \operatorname{sgn}(w_{il}^*) = z_{it} + \lambda_1 > 0$, $\left(\lambda_2 + \sum_{s=1}^t \sigma_s \right) w_{il}^* >$

0. 可以得到

$$w_{il}^* = - \left(\lambda_2 + \sum_{s=1}^t \sigma_s \right)^{-1} (z_{it} + \lambda_1). \quad (20)$$

(3) $w_{il}^* < 0$, $z_{it} + \lambda_1 \operatorname{sgn}(w_{il}^*) = z_{it} - \lambda_1 < 0$, $\left(\lambda_2 + \sum_{s=1}^t \sigma_s \right) w_{il}^* <$

0. 式(17)不满足.

经过上面的讨论, 更新公式如下所示:

$$w_{il}^* = \begin{cases} 0, & |z_{it}| \leq \lambda_1, \\ - \left(\lambda_2 + \sum_{s=1}^t \sigma_s \right)^{-1} (z_{it} - \lambda_1 \operatorname{sgn}(z_{it})), & |z_{it}| > \lambda_1. \end{cases} \quad (21)$$

在线梯度下降算法建议所有坐标的全局学习率为 $\eta_t = (t)^{-0.5}$ ^[59,61]. 与在线梯度下降的标准理论不同, 全局学习率可以设置为^[59,64]

$$\eta_{t,i} = \frac{\alpha}{\beta + \sqrt{\sum_{s=1}^t (g_{s,i})^2}}, \quad (22)$$

其中, $g_{s,i}$ 是梯度 $\mathbf{g}_s$ 的第 i 个坐标, $\eta_{t,i}$ 是梯度 $\mathbf{g}_s$ 的第 i 个坐标的学习速率, α 和 β 是正常数, 可通过交叉验证过程选择. 学习率 $\sigma_t = (\eta_t)^{-1} - (\eta_{t-1})^{-1}$, 且式(21)可为

$$w_{il,t} = \begin{cases} 0, & |z_{it}| \leq \lambda_1, \\ \frac{\lambda_1 \operatorname{sgn}(z_{it}) - z_{it}}{\lambda_2 + \frac{1}{\eta_{t,i}}}, & |z_{it}| > \lambda_1. \end{cases} \quad (23)$$

最后, 算法1给出了OMNR的具体算法流程. 根据算法1所示, 很容易得到OMNR的时间复杂度为 $O(mN_c^3)$. OMNR的空间复杂度为 $O(N_c)$, 这与数据量无关. 因此, OMNR不需要存储所有实例就可以处理大规模数据流.

算法1 OMNR

输入: $\alpha, \beta, \lambda_1, \lambda_2$: OMNR的参数;
 $\{A, B\}$: 流数据;
 m : 流数据的参数.

输出: W .

```

1:  for 每个节点  $i \in \{1:1:N_c\}$  do
2:      设置  $z_i=0$  和  $\eta_i=0$ ;
3:      for  $t \in \{1:1:m\}$  do
4:          接受事例对  $(A_{it}, B_{it})$  和设置  $I = \{l | A_{it,l} \neq 0\}$ ;
5:          for 每个元素  $l \in I$  do
6:              用式(23)计算  $w_{it,l}$ ;
7:          end for
8:          for 每个元素  $l \in I$  do
9:               $g_{s,l} = (A_{it} X_t - B_{it}) A_{it,l}$ ;
10:              $\sigma_k = (\eta_{t,l})^{-1} - (\eta_{t-1,l})^{-1}$ ;
11:              $Z_t = z_t + g_{s,l} - \sigma_l(w_{it,l})$ ;
12:          end for
13:      end for
14:  end for
15: 返回  $W$ .
    
```

4 仿真实验

本节由三部分组成: 第一部分介绍了所用的评价指标与Lorenz和Rössler动力学系统. 第二部分验证OMNR从流数据重构多层网络结构的能力. 第三部分讨论了三个参数对OMNR性能的影响.

4.1 实验设置

为了量化重构方法的性能, 本文采用了测量指标SR(success rate). SR是正确鉴别的元素与 W 中总元素之和的比值. 所有实验均在两层合成网络上的经典Lorenz振荡器(LO)和Rössler振荡器(RO)动力学仿真上进行. 网络类型为Erdős-Rényi(ER)随机网络^[65]、Newman-Watts(NW)小世界网络^[66]、Watts-Strogatz(WS)小世界网络^[1]和Barabási-Albert(BA)无标度网络^[2]. LO和RO的动力学方程分别由式(24)和(25)描述.

在以下数值实验中, 本文从相空间体积中选择随机初始条件 $[-15, 15] \times [-15, 15] \times [0, 35]$ 作为数值模拟的动力学变量, 并确保系统处理混沌状态^[67,68]. 本文使用Runge-Kutta方法从给定的两层网络模型(1)中以 10^{-3} 的相等时间步长生成时间序列数据. 设定数据相

对长度 $R_m = m/(N_c \times r)$, 其中非线性动力学的变量数目 $r=3$, m 是流数据的长度, N_c 是网络的节点数. 在所有问题中, 层内和层间耦合常数 D 设置为1, 而复杂网络的稀疏性设置为0.1. 此外, 内耦合矩阵 Γ 是根据两层网络的节点动态选择的, 如表1所示. 所有实验均在128 GB内存, 3.20 GHz CPU的计算机工作站上用MATLAB运行.

$$\begin{cases} \dot{x} = 10(y-x), \\ \dot{y} = 28x - y - xz, \\ \dot{z} = xy - \frac{8}{3}z, \end{cases} \quad (24)$$

$$\begin{cases} \dot{x} = -y - z, \\ \dot{y} = x + 0.2y, \\ \dot{z} = 0.2 + z(x - 5.7). \end{cases} \quad (25)$$

4.2 验证OMNR处理流数据的能力

本小节以ER-ER, NW-NW, WS-WS和BA-BA四种双层网络中模拟的流数据为例来验证OMNR从流数据中重构非线性动力学网络结构的能力. 每层网络大小 N_c 设置为40. 为了模拟实时流数据, OMNR每次考虑一个事例来顺序更新 $w_{i,t}$. 当 $R_m=0.2, 0.4, 0.6, \dots, 2.0$ 时, 记录重建精度SR. OMNR的参数设置如下: $\alpha=2^{-4}$, $\beta=1$, $\lambda_1=2^3$ 和 $\lambda_2=2^2$. 图3~5分别展示了当双层网络节点动力学类型为LO-LO, LO-RO和RO-LO时, SR与 R_m 之间的关系. 对于每组实验, 进行20次独立运行. 由图3可知, 随着 R_m 的增加, OMNR获取的SR值增加. 此外, 即使 R_m 的值相对较小, OMNR也能识别出节点之间的大部分连接, 这表明OMNR在处理有限的流数据方面表现良

表 1 内耦合矩阵 Γ 的取值

Table 1 The chosen value of coupling matrix Γ

节点动力学类型(层1~层2)	内耦合矩阵 Γ
LO-LO	$\Gamma = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
LO-RO	$\Gamma = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
RO-LO	$\Gamma = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

图 3 (网络版彩图)当双层节点动力学类型为LO-LO时, SR与 R_m 之间的关系. (a) 第一层网络; (b) 第二层网络

Figure 3 (Color online) When the dynamics type of the two-layer node is LO-LO, the relationship between SR and R_m obtained by OMNR. (a) The first layer network; (b) the second layer network.

图 4 (网络版彩图)当双层节点动力学类型为LO-RO时, SR与 R_m 之间的关系. (a) 第一层网络; (b) 第二层网络

Figure 4 (Color online) When the dynamics type of the two-layer node is LO-RO, the relationship between SR and R_m obtained by OMNR. (a) The first layer network; (b) the second layer network.

图 5 (网络版彩图)当双层节点动力学类型为RO-LO时, OMNR获得的SR与 R_m 之间的关系. (a) 第一层网络; (b) 第二层网络

Figure 5 (Color online) When the dynamics type of the two-layer node is RO-LO, the relationship between SR and R_m obtained by OMNR. (a) The first layer network; (b) the second layer network.

好. 我们也发现在四种网络组合中, OMNR在BA-BA双层网络重构任务上的表现最差. 这是由于BA网络具有严重的异质性, 各节点拥有的连接数服从幂律分布.

也就是说, 大多数节点拥有很少的连接, 而少数枢纽节点拥有极其多的连接. 这将引起某些子图不符合稀疏性这一特性, 因此, OMNR不能很好地处理这些问题. OMNR在ER-ER网络重建问题中表现最好, 这也是由于ER网络比较符合网络具有稀疏性这一特性. 在图4和5中, 我们发现随着 R_m 的增加, OMNR获取的SR值处于稳定的状态. 导致该现象的原因是: LO-RO和RO-LO系统随着时间的增加, 所产生的数据处于稳定的状态. 随着 R_m 的增加, OMNR获得的信息并没有增加, 这导致了如图4和5所示的现象出现.

OMNR在ER-ER网络重构问题中的表现最好, 这跟在LO-LO动力学类型中的实验结果一致, 也是由于ER网络比较符合网络具有稀疏性这一特性. 在RO-LO和LO-RO动力学系统中, OMNR的性能排名为: ER-ER, BA-BA, WS-WS, NW-NW. OMNR在BA-BA网络重构问题上的性能较差的理由与LO-LO系统一致. 不同的是, OMNR在小世界网络上的性能最差. 这种现象可归结于两个因素: (1) 小世界网络现象; (2) RO-LO和LO-RO动力学系统的内耦合矩阵 Γ 比LO-LO系统具有更多的“1”元素. 这两个因素将加大层内节点和层外节点对某一节点动力学表征的影响, 使RO-LO和LO-RO动力学系统更加复杂. 因此, 相对于ER-ER和BA-BA重构问题, OMNR在小世界网络上的性能较差.

同时, 我们也发现OMNR在WS-WS网络重构问题上的性能优于NW-NW网络重构问题, 这是由于NW和WS产生机制的不同而导致的. NW网络中的边数要多于WS网络中的边数. 综合图3~5的仿真结果, 可以得到以下结论: OMNR能够以较高精度从流数据中重构多层非线性动力学网络结构.

4.3 参数分析

本小节以ER-ER双层随机网络中模拟的时间序列数据为例讨论了三个参数 α , λ_1 和 λ_2 对OMNR性能的影响. 实验设置如下: $N=40$, $m=240$, 每层网络的节点动力学类型均设置为LO. $\beta=1$ 以获得较高的重建精度. α , λ_1 和 λ_2 的取值范围均设置为 2^i , $i=-5, -4, -3, \dots, 5$. 对于每组实验, 进行20次独立运行. 图6展示了OMNR获得的SR与 λ_1 之间的关系(以ER-ER双层网络的第一层网

络重建问题为例, 下同).

从图6可以看出, 随着 λ_1 的增大, SR先增大后减小. λ_1 参数控制网络结构的稀疏性, 为了使OMNR获取更高的精度, 需要对网络结构的稀疏性施加更大的压力. 因此, 一般将 λ_1 设置为 2^3 . 图7展示了OMNR获得的SR与 λ_2 之间的关系. 随着 λ_2 的增大, SR先增大后减小. λ_2 控制网络结构的 L_2 范数. 一般情况下, 应将 λ_2 设置为 2^2 . 图8展示了OMNR获得的SR与 α 之间的关系. 参数 α 控制OMNR的学习速率. 由图8可知, 随着 α 的增加, OMNR获得的SR越小. 因此, 一般情况下, 建议将 α 设置为 2^{-4} . 本小节也发现当设置 $N=20$, $m=120$ 时, OMNR获得的

图6 (网络版彩图)当 $N=40$, $m=240$ 时, OMNR获得的SR与 λ_1 之间的关系

Figure 6 (Color online) When $N=40$, $m=240$, the relationship between the SR obtained by OMNR and λ_1 .

图7 (网络版彩图)当 $N=40$, $m=240$ 时, OMNR获得的SR与 λ_2 之间的关系

Figure 7 (Color online) When $N=40$, $m=240$, the relationship between the SR obtained by OMNR and λ_2 .

图 8 (网络版彩图)当 $N=40$, $m=240$ 时, OMNR获得的SR与 α 之间的关系

Figure 8 (Color online) When $N=40$, $m=240$, the relationship between the SR obtained by OMNR and α .

图 9 (网络版彩图)当 $N=20$, $m=120$ 时, OMNR获得的SR与 λ_2 之间的关系

Figure 9 (Color online) When $N=20$, $m=120$, the relationship between the SR obtained by OMNR and λ_2 .

SR与 λ_2 之间的关系如图9所示. 此外, α 和 λ_1 的趋势均与 λ_2 相似. 在这种情况下, 这些参数对OMNR的性能影响很小, OMNR可以完全重建ER-ER双层网络的结构.

5 结论

针对目前多层非线性动力学网络重构方法在处理流数据方面存在的不足, 本文提出了一种在线多层非线性动力学网络重建框架来处理流数据. 首先, 本文将离线多层非线性动力学网络重构模型拓展为在线多层非线性动力学网络重构模型. 然后, 本文提出了OMNR算法来优化这个模型. OMNR每次考虑一个实

例, 从而依次迭代地更新网络结构. 而且OMNR不需要一次将整个数据集存储到计算机的内存中. 因此, OMNR可以克服现有批量网络重构方法不能从流数据中重构多层网络的局限性. 此外, 多层网络的Lorenz和Rössler动力学系统的仿真实验支持OMNR能够很好地解决在线多层非线性动力学网络重构问题的观点.

但是, 可以观察到, OMNR具有较高的时间复杂度 $O(mN_c^3)$. 从算法1可以看出, OMNR每次只重构一个节点周围的连接, 具有非常好的并行性, 此时时间复杂度可为 $O(mN_c^2)$. 在未来的工作中, 我们将OMNR并行化以减少其计算复杂度.

参考文献

- Watts D J, Strogatz S H. Collective dynamics of 'small-world' networks. *Nature*, 1998, 393: 440–442
- Barabási A L, Albert R. Emergence of scaling in random networks. *Science*, 1999, 286: 509–512
- Strogatz S H. Exploring complex networks. *Nature*, 2001, 410: 268–276
- Boccaletti S, Latora V, Moreno Y, et al. Complex networks: Structure and dynamics. *Phys Rep*, 2006, 424: 175–308
- Newman M E J. *Networks: An Introduction*. Oxford: Oxford University Press, 2010
- Wang X F, Li X, Chen G R. *Network Science: An Introduction (in Chinese)*. Beijing: Higher Education Press, 2012 [汪小帆, 李翔, 陈关荣. 网络科学导论. 北京: 高等教育出版社, 2012]
- Wang X F, Li X, Chen G R. *Complex Network Theory and Its Applications (in Chinese)*. Beijing: Tsinghua University Press, 2006 [汪小帆, 李翔, 陈关荣. 复杂网络理论及其应用. 北京: 清华大学出版社, 2006]
- He D R, Liu Z H, Wang B H. *Complex System and Complex Networks (in Chinese)*. Beijing: Higher Education Press, 2009 [何大韧, 刘宗华, 汪秉宏. 复杂系统与复杂网络. 北京: 高等教育出版社, 2009]
- Fang J Q, Wang X F, Zheng Z G, et al. New interdisciplinary science: Network science (I) (in Chinese). *Prog Phys*, 2007, 27: 239–343 [方锦清, 汪小帆, 郑志刚, 等. 一门崭新的交叉科学: 网络科学(上). 物理学进展, 2007, 27: 239–343]
- Fang J Q, Wang X F, Zheng Z G, et al. New interdisciplinary science: Network science (II) (in Chinese). *Prog Phys*, 2008, 28: 361–448 [方锦清,

- 汪小帆, 郑志刚, 等. 一门崭新的交叉科学: 网络科学(下). 物理学进展, 2008, 28: 361–448]
- 11 Bongard J, Lipson H. Automated reverse engineering of nonlinear dynamical systems. *Proc Natl Acad Sci USA*, 2007, 104: 9943–9948
 - 12 Sugihara G, May R, Ye H, et al. Detecting causality in complex ecosystems. *Science*, 2012, 338: 496–500
 - 13 Marbach D, Costello J C, Küffner R, et al. Wisdom of crowds for robust gene network inference. *Nat Methods*, 2012, 9: 796–804
 - 14 Wang W X, Lai Y C, Grebogi C. Data based identification and prediction of nonlinear and complex dynamical systems. *Phys Rep*, 2016, 644: 1–76
 - 15 Casadiego J, Nitzan M, Hallerberg S, et al. Model-free inference of direct network interactions from nonlinear collective dynamics. *Nat Commun*, 2017, 8: 2192
 - 16 Nitzan M, Casadiego J, Timme M. Revealing physical interaction networks from statistics of collective dynamics. *Sci Adv*, 2017, 3: e1600396
 - 17 Huang W M, Cao L C, Chen Q J, et al. Modelling and analysis of brain functional network (in Chinese). *Sci Sin-Phys Mech Astron*, 2020, 50: 010506 [黄文敏, 曹玲灿, 陈清坚, 等. 脑功能网络建模及分析研究进展. 中国科学: 物理学 力学 天文学, 2020, 50: 010506]
 - 18 Zhang Z Y, Chen Y, Mi Y Y, et al. From data to network structure—Reconstruction of dynamic networks (in Chinese). *Sci Sin-Phys Mech Astron*, 2020, 50: 010502 [张朝阳, 陈阳, 弭元元, 等. 从数据到结构——动力学网络重构. 中国科学: 物理学 力学 天文学, 2020, 50: 010502]
 - 19 Zhang H F, Wang W X. Complex system reconstruction (in Chinese). *Acta Phys Sin*, 2020, 69: 92–102 [张海峰, 王文旭. 复杂系统重构. 物理学报, 2020, 69: 92–102]
 - 20 Zou Y, Donner R V, Marwan N, et al. Complex network approaches to nonlinear time series analysis. *Phys Rep*, 2019, 787: 1–97
 - 21 Zou Y, Donner R V, Marwan N, et al. Nonlinear time series analysis by means of complex networks (in Chinese). *Sci Sin-Phys Mech Astron*, 2020, 50: 010509 [邹勇, Donner R V, Marwan N, 等. 非线性时间序列的复杂网络分析. 中国科学: 物理学 力学 天文学, 2020, 50: 010509]
 - 22 Stankovski T, Pereira T, McClintock P V E, et al. Coupling functions: Universal insights into dynamical interaction mechanisms. *Rev Mod Phys*, 2017, 89: 045001
 - 23 de la Fuente A, Bing N, Hoeschele I, et al. Discovery of meaningful associations in genomic data using partial correlation coefficients. *Bioinformatics*, 2004, 20: 3565–3574
 - 24 Reverter A, Chan E K F. Combining partial correlation and an information theory approach to the reversed engineering of gene co-expression networks. *Bioinformatics*, 2008, 24: 2491–2497
 - 25 Butte A J, Kohane I S. Mutual information relevance networks: functional genomic clustering using pairwise entropy measurements. In: *Proceedings of the Pacific Symposium on Biocomputing*. Honolulu, 2000. 418–429
 - 26 Braunstein A, Pagnani A, Weigt M, et al. Inference algorithms for gene networks: a statistical mechanics analysis. *J Stat Mech*, 2008, 2008: P12001
 - 27 Cocco S, Leibler S, Monasson R. Neuronal couplings between retinal ganglion cells inferred by efficient inverse statistical physics methods. *Proc Natl Acad Sci USA*, 2009, 106: 14058–14062
 - 28 Bressler S L, Seth A K. Wiener-Granger causality: A well established methodology. *NeuroImage*, 2011, 58: 323–329
 - 29 Ladroue C, Guo S, Kendrick K, et al. Beyond element-wise interactions: identifying complex interactions in biological processes. *PLoS ONE*, 2009, 4: e6899
 - 30 Eroglu D, Tanzi M, van Strien S, et al. Revealing dynamics, communities, and criticality from data. *Phys Rev X*, 2020, 10: 021047
 - 31 Peixoto T P. Network reconstruction and community detection from dynamics. *Phys Rev Lett*, 2019, 123: 128301
 - 32 Chen Y, Zhang C Y, Chen T Y, et al. Reconstruction of noise-driven nonlinear dynamic networks with some hidden nodes. *Sci China-Phys Mech Astron*, 2017, 60: 070511
 - 33 Wang Y F, Wu X Q, Feng H, et al. Topology inference of uncertain complex dynamical networks and its applications in hidden nodes detection. *Sci China Tech Sci*, 2016, 59: 1232–1243
 - 34 Dou P, Song G, Zhao T. Network topology inference from incomplete observation data. *Sci China Inf Sci*, 2018, 61: 028102
 - 35 Wang X, Gu H B, Wang Q Y, et al. Identifying topologies and system parameters of uncertain time-varying delayed complex networks. *Sci China Tech Sci*, 2019, 62: 94–105
 - 36 Han X, Shen Z, Wang W X, et al. Robust reconstruction of complex networks from sparse data. *Phys Rev Lett*, 2015, 114: 028701
 - 37 Wang W X, Lai Y C, Grebogi C, et al. Network reconstruction based on evolutionary-game data via compressive sensing. *Phys Rev X*, 2011, 1: 021021
 - 38 Shen Z, Wang W X, Fan Y, et al. Reconstructing propagation networks with natural diversity and identifying hidden sources. *Nat Commun*, 2014,

5: 4324

- 39 Wu K, Liu J, Hao X, et al. An evolutionary multi-objective framework for complex network reconstruction using community structure. *IEEE Trans Evol Comput*, 2021, 25: 247–261
- 40 Wu K, Liu J, Chen D. Network reconstruction based on time series via memetic algorithm. *Knowledge-Based Syst*, 2019, 164: 404–425
- 41 Wu K, Liu J, Wang S. Reconstructing networks from profit sequences in evolutionary games via a multiobjective optimization approach with lasso initialization. *Sci Rep*, 2016, 6: 37771
- 42 Wang W X, Yang R, Lai Y C, et al. Predicting catastrophes in nonlinear dynamical systems by compressive sensing. *Phys Rev Lett*, 2011, 106: 154101
- 43 Wang W X, Yang R, Lai Y C, et al. Time-series-based prediction of complex oscillator networks via compressive sensing. *EPL*, 2011, 94: 48006
- 44 Su R Q, Wang W X, Wang X, et al. Data-based reconstruction of complex geospatial networks, nodal positioning and detection of hidden nodes. *R Soc Open Sci*, 2016, 3: 150577
- 45 Liu J, Mei G, Wu X, et al. Robust reconstruction of continuously time-varying topologies of weighted networks. *IEEE Trans Circ Syst I*, 2018, 65: 2970–2982
- 46 Hallac D, Park Y, Boyd S, et al. Network inference via the time-varying graphical lasso. In: *Proceedings of the 23rd ACM SIGKDD International Conference on Knowledge Discovery and Data Mining*, Halifax, 2017. 205–213
- 47 Zhang Y, Li H, Zhang Z, et al. Network reconstruction from binary-state time series in presence of time delay and hidden nodes. *Chin J Phys*, 2020, 67: 203–211
- 48 Wu K, Hao X, Liu J, et al. Online reconstruction of complex networks from streaming data. *IEEE Trans Cybern*, 2020, doi: 10.1109/TCYB.2020.3027642
- 49 Wu K, Liu J. Robust learning of large-scale fuzzy cognitive maps via the lasso from noisy time series. *Knowledge-Based Syst*, 2016, 113: 23–38
- 50 Wu K, Liu J. Learning large-scale fuzzy cognitive maps based on compressed sensing and application in reconstructing gene regulatory networks. *IEEE Trans Fuzzy Syst*, 2017, 25: 1546–1560
- 51 Wu K, Liu J, Liu P, et al. Online fuzzy cognitive map learning. *IEEE Trans Fuzzy Syst*, 2020, doi: 10.1109/TFUZZ.2020.2988845
- 52 Gao J, Li D, Havlin S. From a single network to a network of networks. *Natl Sci Rev*, 2014, 1: 346–356
- 53 Hu X G, Zhang H G, Sun Q Y, et al. Research on situation awareness of electricity-gas coupling network based on a heterogeneous data model (in Chinese). *Sci Sin Tech*, 2020, 50: 346–360 [胡旭光, 张化光, 孙秋野, 等. 基于异构数据模型的电-气耦合网络状态感知方法研究. 中国科学: 技术科学, 2020, 50: 346–360]
- 54 Mei G, Wu X, Wang Y, et al. Compressive-sensing-based structure identification for multilayer networks. *IEEE Trans Cybern*, 2018, 48: 754–764
- 55 Li G, Li N, Liu S, et al. Compressive sensing-based topology identification of multilayer networks. *Chaos*, 2019, 29: 053117
- 56 Wang Y, Wu X, Lu J, et al. Topology identification in two-layer complex dynamical networks. *IEEE Trans Netw Sci Eng*, 2020, 7: 538–548
- 57 Ma C, Chen H S, Li X, et al. Data based reconstruction of duplex networks. *SIAM J Appl Dyn Syst*, 2020, 19: 124–150
- 58 Wen Y M, Qiang B H, Fan Z G. A survey of the classification of data streams with concept drift (in Chinese). *CAAI T Intell Syst*, 2013, 8: 95–104 [文益民, 强保华, 范志刚. 概念漂移数据流分类研究综述. 智能系统学报, 2013, 8: 95–104]
- 59 McMahan H B. Follow-the-regularized-leader and mirror descent: Equivalence theorems and L1 regularization. In: *Proceedings of the 14th International Conference on Artificial Intelligence and Statistics*, Fort Lauderdale, 2011. 525–533
- 60 McMahan H B, Holt G, Sclely D, et al. Ad click prediction: A view from the trenches. In: *Proceedings of the 19th ACM SIGKDD International Conference on Knowledge Discovery and Data Mining*, Chicago, 2013. 1222–1230
- 61 Xiao L. Dual averaging methods for regularized stochastic learning and online optimization. *J Mach Learn Res*, 2010, 11: 2543–2596
- 62 Kivela M, Arenas A, Barthelemy M, et al. Multilayer networks. *J Complex Netw*, 2014, 2: 203–271
- 63 Boccaletti S, Bianconi G, Criado R, et al. The structure and dynamics of multilayer networks. *Phys Rep*, 2014, 544: 1–122
- 64 Duchi J, Hazan E, Singer Y. Adaptive subgradient methods for online learning and stochastic optimization. *J Mach Learn Res*, 2011, 12: 2121–2159
- 65 Erdős P, Rényi A. On random graphs. *Publ Math-Debrecen*, 1959, 6: 290–297
- 66 Newman M E J, Watts D J. Renormalization group analysis of the small-world network model. *Phys Lett A*, 1999, 263: 341–346
- 67 Majhi S, Ghosh D, Kurths J. Emergence of synchronization in multiplex networks of mobile Rössler oscillators. *Phys Rev E*, 2019, 99: 012308
- 68 Rössler O E. An equation for continuous chaos. *Phys Lett A*, 1976, 57: 397–398

Multilayer nonlinear dynamical network reconstruction from streaming data

WU Kai¹, WANG Chao² & LIU Jing²

¹ School of Artificial Intelligence, Xidian University, Xi'an 710071, China;

² Guangzhou Institute of Technology, Xidian University, Guangzhou 510555, China

Many complex, real-world dynamic systems need to be described using multilayer networks. Reconstruction of the multilayer nonlinear dynamic network structure from the observed streaming data is one of the core issues of dynamic system research. Although many methods have been proposed to reconstruct multilayer nonlinear dynamic networks from static data, they cannot reconstruct the multilayer network from streaming data. Because of the complexity of the problem, there is no nonlinear dynamic network reconstruction model and its optimization algorithm suitable for streaming data. To resolve this limitation, in this paper, a streaming data-driven multilayer dynamic network reconstruction framework called online multilayer network reconstruction (OMNR) is proposed. OMNR first establishes an online multilayer nonlinear dynamics network reconstruction model for streaming data and then proposes an online learning method based on follow-the-regularized-leader to optimize the reconstruction model. It considers only one case at a time to update the network structure; this is suitable for processing streaming data. Moreover, the space complexity of OMNR is very low and suitable for big-data tasks. Finally, using the Lorenz and Rössler dynamic systems of the multilayer network, it is verified that OMNR can solve the problem of multilayer dynamic network reconstruction driven by streaming data and fill the gap in the technology of multilayer nonlinear dynamic network reconstruction driven by streaming data.

network reconstruction, nonlinear dynamics, online learning, multilayer network, data stream

doi: [10.1360/SST-2020-0491](https://doi.org/10.1360/SST-2020-0491)