中 国 科 学 (A 辑)
第 29 卷 第 11 期 SCIENCE IN CHINA (Series A) 1999 年 11 月

考虑基体粘弹性与介电弛豫的铁电复合材料的本构模型 *
——Ⅰ. 理论

江 冰 方岱宁 黄克智
(清华大学工程力学系, 北京 100084)

摘要 基于细观力学方法和 Laplace 变换, 将仅适用于基体为线弹性和线性介电性的铁电复合材料的本构模型推广至基体为粘弹性和介电弛豫情况, 建立了考虑基体粘弹性和介电弛豫的铁电复合材料的本构模型.

关键词 粘弹性 介电弛豫 铁电复合材料 细观力学 畴变准则 本构模型

铁电复合材料一般是由铁电相夹杂与非压电相基体复合而成. 它可以作为传感器而广泛地用于诸如智能材料和智能结构等工程实际之中[1], 文献[2] 对此作了较详细的评述. 在过去的研究中, 一般假定基体具有线弹性和线性介电性质[3~6], 这在许多情况下是成立的, 如基体是由陶瓷构成时. 然而在工程中最常用的铁电复合材料的基体是由聚合物材料构成. 高分子材料的分子链较长因而具有柔性, 有些高分子材料还具有极性, 因此聚合物材料在力学性质上会表现出粘弹性效应, 在电学上则会表现出介电弛豫性质. 这些性质对铁电复合材料会产生巨大的影响. 实验表明, 以聚合物为基体的铁电复合材料也具有粘弹性和介电弛豫性质, 它的电滞回线和蝶形曲线与外加载荷的频率有关, 因此这类铁电复合材料的力学、电学性质比一般铁电复合材料的力学、电学性质要复杂得多. 对基体具有粘弹性和介电弛豫性质的铁电复合材料本构行为的研究, 就作者所知还未见报道. 本文用细观力学方法对基体具有粘弹性和介电弛豫性质且基体不具有力电耦合性质的铁电复合材料的力电耦合行为进行了研究, 建立了考虑基体粘弹性和介电弛豫的铁电复合材料的本构模型.

1 单个夹杂问题

1.1 数学描述

如果一无穷大具有粘弹性和介电弛豫性质的非压电介质 D 中含有一椭球状线性铁电夹杂 Ω, 其界面粘结完好. 当铁电夹杂具有均匀本征应变 ε^* 与均匀本征电场 $\boldsymbol{E}^*$, 且在无穷远处受到均匀应变场 ε^0 和均匀电场 $\boldsymbol{E}^0$ 的作用时, 试问夹杂内和基体中的应变场和电场是如何分布与变化的. 为此我们可以写出求解此问题的方程和边界条件.

(1)夹杂与基体的本构方程 铁电夹杂的本构关系是[7] 1)

1999-01-20 收稿, 1999-06-28 收修改稿
* 国家自然科学基金资助项目(批准号: 19891180)

1) 江 冰. 铁电复合材料的本构关系. 清华大学工程力学系博士学位论文. 1998

$$\sigma_{ij}(t)=C^{*}_{ijkl}[u_{k,l}(t)-\varepsilon^{*}_{kl}]+e^{*}_{mij}[\phi_{,m}(t)+E^{*}_{m}],\quad \text{在 } \Omega \text{ 中}, \tag{1}$$

$$D_{i}(t)=e^{*}_{ikl}[u_{k,l}(t)-\varepsilon^{*}_{kl}]-k^{*}_{im}[\phi_{,m}(t)+E^{*}_{m}],\quad \text{在 } \Omega \text{ 中}. \tag{2}$$

由于基体是粘弹性和介电弛豫且为非力电耦合的，因此基本构关系可以写为[8,9]

$$\sigma_{ij}(t)=C_{ijkl}(0)u_{k,l}(t)+\int_{0}^{t}\dot{C}_{ijkl}(t')u_{k,l}(t-t')\mathrm{d}t',\quad \text{在 } D-\Omega \text{ 中}, \tag{3}$$

$$D_{i}(t)=-k_{im}(0)\phi_{,m}(t)-\int_{0}^{t}\dot{k}_{im}(t')\phi_{,m}(t-t')\mathrm{d}t',\quad \text{在 } D-\Omega \text{ 中}. \tag{4}$$

这里 t 是一个相对时间，它表明从开始加载到现时的时间长度．$\phi(t)$ 和 $\boldsymbol{u}(t)$ 是电势与弹性位移．$\boldsymbol{D}(t)$ 和 $\sigma(t)$ 是电位移与应力．$\boldsymbol{C}^{*}$，$\boldsymbol{e}^{*}$和 $\boldsymbol{k}^{*}$分别是夹杂的弹性模量，压电张量和介电张量．$\boldsymbol{C}(t)$和 $\boldsymbol{k}(t)$ 是基体的弹性模量和介电张量．由于基体是非压电材料，故有 $\boldsymbol{e}=0$．式中冠以记号“•”表示对时间的偏导数，即 $\dot{a}_{ij}(\boldsymbol{x},t)=\partial a_{ij}(\boldsymbol{x},t)/\partial t$．而下标“，”表示对空间的导数，即 $a_{ij,k}(\boldsymbol{x},t)=\partial a_{ij}(\boldsymbol{x},t)/\partial x_{k}$．

(2)平衡条件　对准静态问题，当不考虑体力与自由电荷作用时，平衡方程可以写为

$$\sigma_{ij,j}(t)=0,\qquad D_{i,i}(t)=0. \tag{5}$$

(3) 边界条件　外边界条件为

$$u_{i}(S,t)=\varepsilon^{0}_{ij}(S,t)x_{j},\quad \phi(S,t)=\phi^{0}_{,m}(S,t)x_{m}=-E^{0}_{m}(S,t)x_{m}, \tag{6}$$

其中 S 表示本构构元的边界．对于弹性场，夹杂与基体界面处的位移与力必须满足如下连续条件

$$\boldsymbol{u}^{E}(t)-\boldsymbol{u}^{I}(t)=0,\ \boldsymbol{n}\circ[\sigma^{E}(t)-\sigma^{I}(t)]=0, \tag{7}$$

其中 $\boldsymbol{n}$ 是 Ω 边界的单位外法向矢量．上标“E”表示夹杂外附近的场值，上标“I”表示夹杂内附近的场值．对于电场和电位移，当不考虑自由电荷时，界面处有如下的连续条件

$$\boldsymbol{n}\times[\boldsymbol{E}^{E}(t)-\boldsymbol{E}^{I}(t)]=0,\quad \boldsymbol{n}\circ[\boldsymbol{D}^{E}(t)-\boldsymbol{D}^{I}(t)]=0, \tag{8}$$

1.2 问题的求解

Jiang 等人[6]对具有线弹性和线性介电性质的非压电基体的铁电复合材料进行了研究．为使本文所研究的问题与 Jiang 等人[6]研究的问题发生联系，对本文的求解方程进行 Laplace 变换．

(1) 夹杂与基体的本构关系的 Laplace 变换　对铁电相的本构关系(1)，(2)进行 Laplace 变换后，其形式为

$$\hat{\sigma}_{ij}(p)=C^{*}_{ijkl}[\hat{u}_{k,l}(p)-\hat{\varepsilon}^{*}_{ij}(p)]+e^{*}_{mij}[\hat{\phi}_{,m}(p)+\hat{E}^{*}_{m}(p)], \tag{9}$$

$$\hat{D}_{i}(p)=e^{*}_{ikl}[\hat{u}_{k,l}(p)-\hat{\varepsilon}^{*}_{ij}(p)]-k^{*}_{im}[\hat{\phi}_{,m}(p)+\hat{E}^{*}_{m}(p)], \tag{10}$$

这里 $\hat{\varepsilon}^{*}_{ij}(p)=p^{-1}\varepsilon^{*}_{ij}$，$\hat{E}^{*}_{m}(p)=p^{-1}E^{*}_{m}$．上标“ ^ ”表示对函数进行 Laplace 变换．p 为变换参数．对于基体相的本构关系(3)，(4)进行 Laplace 变换后，其形式为

$$\hat{\sigma}_{ij}(p)=p\hat{C}_{ijkl}(p)\hat{u}_{k,l}(p), \tag{11}$$

$$\hat{D}_{i}(p)=-p\hat{k}_{im}\hat{\phi}_{,m}(p). \tag{12}$$

(2) 平衡方程(5)的 Laplace 变换

$$\hat{\sigma}_{ij,j}(p)=0,\quad \hat{D}_{i,i}(p)=0. \tag{13}$$

(3) 边界条件的 Laplace 变换　　外边界条件(6)的 Laplace 变换为

$$\hat{u}_i(S, p) = \hat{\varepsilon}_{ij}^0(S, p)x_j, \quad \hat{\phi}(S, p) = \hat{\phi}_{,m}^0(S, p)x_m, \tag{14}$$

内边界条件(7),(8)的 Laplace 变换为

$$\boldsymbol{u}^E(p) - \boldsymbol{u}^I(p) = 0, \quad \boldsymbol{n} \circ [\hat{\sigma}^E(p) - \hat{\sigma}^I(p)] = 0, \tag{15}$$

$$\boldsymbol{n} \times [\boldsymbol{E}^E(p) - \boldsymbol{E}^I(p)] = 0, \quad \boldsymbol{n} \circ [\boldsymbol{D}^E(p) - \boldsymbol{D}^I(p)] = 0. \tag{16}$$

由方程(9)~(16)可见,其控制方程、平衡方程和边界条件的 Laplace 变换后形式与不考虑基体的粘性和介电弛豫的问题是完全相同的,因此我们可以将不考虑基体的粘弹性和介电弛豫问题的解用于考虑基体粘弹性和介电弛豫问题．只需将 Jiang 等人[6,1)]所研究问题中的参数做如下变换即可

$$\begin{aligned}
&C_{ijkl} \to pC_{ijkl}(p), \quad k_{im} \to p\hat{k}_{im}(p), C_{ijkl}^* \to C_{ijkl}^*, \quad e_{pkl}^* \to e_{pkl}^*, \quad k_{ij}^* \to k_{ij}^*, \\
&\varepsilon_{ij}^* \to \hat{\varepsilon}_{ij}^*(p) = p^{-1}\varepsilon_{ij}^*, \quad E_m^* \to E_m^*(p) = p^{-1}E_m^*, \\
&\sigma_{ij} \to \hat{\sigma}_{ij}(p), \quad u \to \hat{u}(p), \quad \phi \to \hat{\phi}(p), \quad D_i \to \hat{D}_i(p), \\
&\phi^0 \to \hat{\phi}^0(p), \quad \varepsilon_{ij}^0 \to \hat{\varepsilon}_{ij}^0(p).
\end{aligned} \tag{17}$$

1.3　单个夹杂问题的解

Jiang 等人[4] 对无穷大线弹性和线性介电基体中含有一个椭球状铁电夹杂问题进行了研究,研究表明当外加场与本征场均匀时,夹杂内的场也是均匀的．对于基体是粘弹性和介电弛豫的铁电夹杂问题,经过 Laplace 变换后,其方程和边界条件的形式与基体是线弹性和线性介电基体问题的形式完全相同,因此其夹杂内的约束电弹场的关系可以写为

$$\varepsilon^I = \hat{\mathscr{H}}^1 : \varepsilon^0 + \hat{\mathscr{H}}^2 \circ \boldsymbol{E}^0 + \hat{\mathscr{S}}^1 : \varepsilon^* + \hat{\mathscr{S}}^2 \circ \boldsymbol{E}^*, \tag{18}$$

$$\boldsymbol{E}^I = \hat{\mathscr{H}}^3 : \varepsilon^0 + \hat{\mathscr{H}}^4 \circ \boldsymbol{E}^0 + \hat{\mathscr{S}}^3 : \varepsilon^* + \hat{\mathscr{S}}^4 \circ \boldsymbol{E}^*, \tag{19}$$

其中

$$\hat{\mathscr{H}}^1 = (\boldsymbol{I} + \hat{\alpha} \circ \hat{\beta})^{-1} : \boldsymbol{A}, \qquad \hat{\mathscr{H}}^2 = (\boldsymbol{I} + \hat{\alpha} \circ \hat{\beta})^{-1} : \hat{\alpha} \circ \boldsymbol{B},$$

$$\hat{\mathscr{H}}^3 = -(\boldsymbol{i} + \hat{\beta} : \hat{\alpha})^{-1} \circ \hat{\beta} : \boldsymbol{A}, \qquad \hat{\mathscr{H}}^4 = (\boldsymbol{i} + \hat{\beta} : \hat{\alpha})^{-1} \circ \boldsymbol{B}, \tag{20}$$

$$\hat{\mathscr{S}}^1 = \boldsymbol{I} - (\boldsymbol{I} + \hat{\alpha} \circ \hat{\beta})^{-1} : (\boldsymbol{I} - \zeta), \qquad \hat{\mathscr{S}}^2 = -(\boldsymbol{I} + \hat{\alpha} \circ \hat{\beta})^{-1} : \hat{\alpha} \circ (\boldsymbol{i} - \eta),$$

$$\hat{\mathscr{S}}^3 = (\boldsymbol{i} + \hat{\beta} : \hat{\alpha})^{-1} \circ \hat{\beta}(\boldsymbol{I} - \zeta), \qquad \hat{\mathscr{S}}^4 = \boldsymbol{i} - (\boldsymbol{i} + \hat{\beta} : \hat{\alpha})^{-1} \circ (\boldsymbol{i} - \eta). \tag{21}$$

而

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{A} = [\boldsymbol{I} + \boldsymbol{S} : (p\boldsymbol{C})^{-1} : \hat{\mathscr{C}}]^{-1}, && \boldsymbol{B} = [\boldsymbol{i} + \hat{\boldsymbol{s}} \circ (p\hat{\boldsymbol{k}})^{-1} \circ \hat{\mathscr{K}}]^{-1}, \\
&\hat{\alpha} = \boldsymbol{A} : \boldsymbol{S} : (p\boldsymbol{C})^{-1} : (\boldsymbol{e}^*)^{\mathrm{T}}, && \hat{\beta} = \boldsymbol{B} \circ \hat{\boldsymbol{s}} \circ (p\hat{\boldsymbol{k}})^{-1} \circ \boldsymbol{e}^*, \\
&\zeta = \boldsymbol{A} : \boldsymbol{S} : (p\boldsymbol{C})^{-1} : \boldsymbol{C}^*, && \eta = \boldsymbol{B} \circ \hat{\boldsymbol{s}} \circ (p\hat{\boldsymbol{k}})^{-1} \circ \boldsymbol{k}^*,
\end{aligned} \tag{22}$$

其中

$$\hat{\mathscr{C}}(p) = \boldsymbol{C}^* - p\boldsymbol{C}, \quad \hat{\mathscr{K}}(p) = \boldsymbol{k}^* - p\hat{\boldsymbol{k}}. \tag{23}$$

这里 $\boldsymbol{I}$ 和 $\boldsymbol{i}$ 分别是四阶和二阶单位张量．$(\cdots)^{-1}$表示对$(\cdots)$的求逆．$\boldsymbol{S}$，$\hat{\boldsymbol{s}}$ 分别是纯粘弹性和纯介电弛豫夹杂问题的 Eshelby 张量的 Laplace 变换,由于经过 Laplace 变换后的求解方程的形式与纯弹性[10] 和纯介电[11] 夹杂问题完全相似,因此可以写出 $(\boldsymbol{x}, p)$ 空间中的 Eshelby 张量 $\boldsymbol{S}$，$\hat{\boldsymbol{s}}$ 形式为

1) 见 1044 页脚注

$$S_{ijkl}(\boldsymbol{x}, p) = -\frac{1}{2}\int_{\Omega} pC_{mnkl}(\boldsymbol{x}, p)[G^{u}_{im,nj}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}') - G^{u}_{jm,ni}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')]\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}', \tag{24}$$

$$\hat{s}_{ij}(\boldsymbol{x}, p) = -\frac{1}{2}\int_{\Omega} p\hat{k}_{pj}(\boldsymbol{x}, p)G^{\phi}_{,ip}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}'. \tag{25}$$

这里 G^u 与 G^ϕ 是$(\boldsymbol{x}, p)$空间中的弹性与介电的 Green 函数. 其形式与没有粘性和介电弛豫情况下的弹性与介电 Green 函数完全相同, 可以写为

$$G^{u}_{ij}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}') = (2\pi)^{-3}\int_{-\infty}^{+\infty} N_{ij}(\xi)D^{-1}(\xi)\exp\{i\xi\circ(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')\}\,\mathrm{d}\xi. \tag{26}$$

这里 $K_{ij} = pC_{ijkl}\xi_j\xi_l$; N_{ij} 是K_{ij}的代数余子式, $D(\xi)$ 是 K_{ij}, 的行列式. 而

$$G^{\phi}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}') = -(2\pi)^{-3}\int_{-\infty}^{+\infty}(p\hat{k}_{ij}\xi_i\xi_j)^{-1}\exp\{i\xi\circ(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')\}\,\mathrm{d}\xi. \tag{27}$$

2　考虑基体粘弹性与介电弛豫的铁电材料的本构关系

考虑一个铁电复合材料的本构构元, 其中含有取向不同的椭球形铁电夹杂, 夹杂与基体之间粘结完好. 夹杂相均匀地分布在本构构元中, 使本构构元对外呈现出宏观均匀. 在此将每个铁电夹杂看作是单晶、单畴的. 由于经 Laplace 变换后求解方程的形式与 Jiang 等人[6,] [1)]所研究问题之方程的形式完全相同, 因此可得到铁电复合材料的本构关系.

2.1　应变、电场空间中的本构关系

我们可以得到应变、电场空间中的本构关系为

$$\hat{\sigma}^0 = \hat{\overline{\boldsymbol{C}}}:\hat{\varepsilon}^0 - (\hat{\overline{\boldsymbol{e}}})^{\mathrm{T}}\circ\hat{\boldsymbol{E}}^0 + \hat{\overline{\sigma}}^*, \tag{28}$$

$$\hat{\boldsymbol{D}}^0 = \hat{\overline{\boldsymbol{e}}}:\hat{\varepsilon}^0 + \hat{\overline{\boldsymbol{k}}}\circ\hat{\boldsymbol{E}}^0 + \hat{\overline{\boldsymbol{D}}}^*. \tag{29}$$

对方程(28), (29)进行 Laplace 逆变换, 我们可以得到本文所研究问题应变、电场空间中卷积形式的本构关系

$$\sigma^0(t) = \int_0^t \overline{\boldsymbol{C}}(t-t'):\varepsilon^0(t')\mathrm{d}t' - \int_0^t \overline{\boldsymbol{e}}^{\mathrm{T}}(t-t')\circ\boldsymbol{E}^0(t')\mathrm{d}t' + \overline{\sigma}^*(t), \tag{30}$$

$$\boldsymbol{D}^0(t) = \int_0^t \overline{\boldsymbol{e}}(t-t'):\varepsilon^0(t')\mathrm{d}t' + \int_0^t \overline{\boldsymbol{k}}(t-t')\circ\boldsymbol{E}^0(t')\mathrm{d}t' + \overline{\boldsymbol{D}}^*(t), \tag{31}$$

其中不带“ ”的物理量均为带“ ”物理量的 Laplace 逆变换. 方程(30), (31)中的系数为

$$\hat{\overline{\boldsymbol{C}}} = p\boldsymbol{C} + f_0\mathrm{sym}\langle\hat{\mathscr{C}}:\hat{\mathscr{M}} - (\boldsymbol{e}^*)^{\mathrm{T}}\circ\hat{\mathscr{P}}\rangle, \tag{32}$$

$$\hat{\overline{\boldsymbol{k}}} = p\hat{\boldsymbol{k}} + f_0\mathrm{sym}\langle\boldsymbol{e}^*:\hat{\mathscr{N}} + (\hat{\mathscr{K}})^{\mathrm{T}}\circ\hat{\mathscr{Q}}\rangle, \tag{33}$$

$$\hat{\overline{\boldsymbol{e}}} = \frac{1}{2}f_0\langle\boldsymbol{e}^*:\hat{\mathscr{M}} + \hat{\mathscr{K}}\circ\hat{p} + \hat{\mathscr{Q}}^{\mathrm{T}}\circ\boldsymbol{e}^* - (\hat{\mathscr{C}}:\hat{\mathscr{N}})^{\mathrm{T}}\rangle, \tag{34}$$

$$\hat{\overline{\sigma}}^* = \frac{1}{2}f_0\langle\hat{\mathscr{C}}:\hat{\varepsilon}^{**} - (\boldsymbol{e}^*)^{\mathrm{T}}\circ\boldsymbol{E}^{**} + \hat{\sigma}^*:(\boldsymbol{I} + \hat{\mathscr{M}}) - \hat{\boldsymbol{D}}^*\circ\hat{p}\rangle, \tag{35}$$

1) 见 1044 页脚注

$$\hat{\overline{\boldsymbol{D}}}^{*}=\frac{1}{2}f_0\langle \boldsymbol{e}^{*}:\hat{\varepsilon}^{**}+\hat{\mathscr{K}}\circ \boldsymbol{E}^{**}-\hat{\sigma}^{*}:\hat{\mathscr{N}}+\hat{\boldsymbol{D}}^{*}\circ(\boldsymbol{i}+\hat{\mathscr{Q}})\rangle. \tag{36}$$

这里

$$\hat{\sigma}^{*}=-p^{-1}[C^{*}:\varepsilon^{*}-\boldsymbol{e}^{*}\circ \boldsymbol{E}^{*}],\quad \hat{\boldsymbol{D}}^{*}=-p^{-1}[\boldsymbol{e}^{*}:\varepsilon^{*}+\boldsymbol{k}^{*}\circ \boldsymbol{E}^{*}], \tag{37}$$

其中 f_0 是铁电夹杂总的体积分数, 而〈 …〉表示对 …的体平均.

2.2.1 稀疏解

当夹杂内的平均应变和平均电场用无穷大基体中单个铁电夹杂的电弹场近似时, 我们就得到了本构关系的稀疏解:

$$\hat{\mathscr{M}}=\hat{\mathscr{H}}^1,\ \hat{\mathscr{N}}=\hat{\mathscr{H}}^2,\ \hat{\mathscr{P}}=\hat{\mathscr{H}}^3,\ \hat{\mathscr{Q}}=\hat{\mathscr{H}}^4, \tag{38}$$

$$\hat{\varepsilon}^{**}=\hat{\varepsilon}^{**}_{\text{dilute}}=\hat{\mathscr{S}}^1:\hat{\varepsilon}^{*}+\hat{\mathscr{S}}^2\circ \boldsymbol{E}^{*},\ \boldsymbol{E}^{**}=\boldsymbol{E}^{**}_{\text{dilute}}=\hat{\mathscr{S}}^3:\hat{\varepsilon}^{*}+\hat{\mathscr{S}}^4\circ \boldsymbol{E}^{*}. \tag{39}$$

2.1.2 Mori-Tanaka 解

将外加应变场与外加电场以基体的平均应变与平均电场代替时, 就得到了本构关系的 Mori-Tanaka 解:

$$\hat{\mathscr{M}}=\hat{\mathscr{H}}^1:\boldsymbol{M}+\hat{\mathscr{H}}^2\circ \boldsymbol{P},\quad \hat{\mathscr{N}}=\hat{\mathscr{H}}^1:\boldsymbol{N}+\hat{\mathscr{H}}^2\circ \boldsymbol{Q}, \tag{40}$$

$$\hat{\mathscr{P}}=\hat{\mathscr{H}}^3:\boldsymbol{M}+\hat{\mathscr{H}}^4\circ \boldsymbol{P},\quad \hat{\mathscr{Q}}=\boldsymbol{H}^3:N+\hat{\mathscr{H}}^4\circ \boldsymbol{Q} \tag{41}$$

$$\hat{\varepsilon}^{**}=\hat{\varepsilon}^{**}_{\text{MT}}=\hat{\varepsilon}^{**}_{\text{dilute}}-f_0\{\hat{\mathscr{M}}:\langle\hat{\varepsilon}^{*}_{\text{dilute}}\rangle+\hat{\mathscr{N}}\circ\langle E^{**}_{\text{dilute}}\rangle\}, \tag{42}$$

$$\boldsymbol{E}^{**}=\boldsymbol{E}^{**}_{\text{MT}}=\boldsymbol{E}^{**}_{\text{dilute}}-f_0\{\hat{\mathscr{P}}:\langle\hat{\varepsilon}^{**}_{\text{dilute}}\rangle+\hat{\mathscr{Q}}\circ\langle \boldsymbol{E}^{**}_{\text{dilute}}\rangle\}. \tag{43}$$

这里

$$\boldsymbol{M}=[\boldsymbol{H}^1-\boldsymbol{H}^2\circ(\boldsymbol{H}^4)^{-1}\circ \boldsymbol{H}^3]^{-1},\quad \boldsymbol{N}=-\boldsymbol{M}:\boldsymbol{H}^2\circ(\boldsymbol{H}^4)^{-1}, \tag{44}$$

$$\boldsymbol{P}=-(\boldsymbol{H}^4)^{-1}\circ \boldsymbol{H}^3:\boldsymbol{M},\quad \boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{H}^4)^{-1}[\boldsymbol{i}-\boldsymbol{H}^3:\boldsymbol{N}]. \tag{43}$$

而

$$\boldsymbol{H}^1=(1-f_0)\boldsymbol{I}+f_0\langle\hat{\mathscr{N}}^1\rangle,\quad \boldsymbol{H}^2=f_0\langle\hat{\mathscr{H}}^2\rangle, \tag{44}$$

$$\boldsymbol{H}^3=f_0\langle\hat{\mathscr{H}}^3\rangle,\quad \boldsymbol{H}^4=(1-f_0)\boldsymbol{i}+f_0\langle\hat{\mathscr{H}}^4\rangle. \tag{45}$$

2.2 应力、电场空间中的本构关系

同样地, 我们可以得到应力、电场空间中的本构关系为

$$\hat{\varepsilon}^0=\hat{\boldsymbol{M}}:\hat{\sigma}^0+(\hat{\boldsymbol{d}})^{\mathrm{T}}\circ \boldsymbol{E}^0+\hat{\varepsilon}^{*}, \tag{46}$$

$$\boldsymbol{D}^0=\hat{\boldsymbol{d}}:\hat{\sigma}^0+\hat{\boldsymbol{k}}\circ \boldsymbol{E}^0+\hat{\boldsymbol{D}}^{*}, \tag{47}$$

其中

$$\hat{\boldsymbol{M}}=(\hat{\overline{\boldsymbol{C}}})^{-1},\qquad \hat{\boldsymbol{k}}=\hat{\overline{\boldsymbol{k}}}+\mathrm{sym}[\hat{\boldsymbol{d}}:(\hat{\overline{\boldsymbol{e}}})^{\mathrm{T}}],\qquad \hat{\boldsymbol{d}}=\hat{\overline{\boldsymbol{e}}}:\hat{\boldsymbol{M}},$$

$$\hat{\varepsilon}^{*}=-\hat{\boldsymbol{M}}:\hat{\overline{\sigma}}^{*},\qquad \hat{\boldsymbol{D}}^{*}=\hat{\overline{\boldsymbol{D}}}^{*}-\hat{\boldsymbol{d}}:\hat{\overline{\sigma}}^{*}. \tag{48}$$

由(46), (47)式的 Laplace 逆变换可以得到应力、电场空间中的卷积形式本构关系为

$$\varepsilon^0(t)\int_0^t=\boldsymbol{M}(t-t'):\sigma^0(t')\mathrm{d}t'+\int_0^t\mathbf{d}^{\mathrm{T}}(t-t')\circ \boldsymbol{E}^0(t')\mathrm{d}t'+\varepsilon^{*}(t), \tag{49}$$

$$\boldsymbol{D}^0(t)=\int_0^t \mathbf{d}(t-t'):\sigma^0(t')\mathrm{d}t'+\int_0^t \boldsymbol{k}(t-t')\cdot\boldsymbol{E}^0(t')\mathrm{d}t'+\boldsymbol{D}^*(t). \tag{50}$$

一般而言，对$\widehat{\overline{\boldsymbol{C}}}$等物理量求 Laplace 逆变换是十分困难的，但在某些情况下可以由 Laplace 逆变换的性质进行处理．由取向平均的定义与 Laplace 逆变换的线性性质可以很容易地证明：某物理量取向平均的 Laplace 逆变换等于此物理量 Laplace 逆变换的体平均，即：

$$\langle \boldsymbol{A}\rangle = L^{-1}\langle \boldsymbol{A}\rangle = \langle L^{-1}\boldsymbol{A}\rangle, \tag{51}$$

在某些特殊情况下，对某物理量在取向平均前进行 Laplace 逆变换是可行的．这样就可以使问题得到简化．(51)式中 L^{-1}表示 Laplace 的逆变换.

3　考虑基体的粘弹性与介电弛豫的畴变准则

铁电材料具有自发极化和自发应变，它们可以在外场的作用下发生重取向，从而造成材料的细观结构的变化．Jiang 等人[6,11]基于细观力学方法对 Hwang[12]的畴变准则进行了推广，从而可以考虑夹杂之间的相互作用以及基体性质对畴变准则的影响．对于基体材料具有粘弹性效应和介电弛豫性质的铁电复合材料，加在铁电相上的局部电弹场对外加电弹场有一个滞后效应，这使得其畴变的判据与时间有关．此时畴变准则可以写为

$$\sigma^L(t):\Delta\varepsilon^{\#}+\boldsymbol{E}^L(t)\cdot\Delta\boldsymbol{P}^{\#}\geqslant 2P^0E_0, \tag{52}$$

上标"L" 表示由外加场引起的铁电夹杂中局部场的变化．$\Delta\varepsilon^{\#}$，$\Delta\boldsymbol{P}^{\#}$分别是畴变后和畴变前单晶铁电材料的自发极化应变和自发极化强度之差．P^0，E_0是铁电单晶材料的残余极化强度和矫顽场．对 $\sigma^L(t)$，$\boldsymbol{E}^L(t)$ 可以分为 2 种情况进行讨论：

3.1　不考虑相互作用的畴变准则

当铁电相的体积百分比较小时，可以用稀疏解来近似，此时

$$\hat{\sigma}^L(p)=\hat{\mathscr{H}}^5(p):\hat{\sigma}^0(p)+\hat{\mathscr{H}}^6(p)\cdot\boldsymbol{E}^0(p), \tag{53}$$

$$\boldsymbol{E}^L(p)=\hat{\mathscr{H}}^7(p):\hat{\sigma}^0(p)+\hat{\mathscr{H}}^4(p)\cdot\boldsymbol{E}^0(p), \tag{54}$$

其中

$$\begin{aligned}\hat{\mathscr{H}}^5=[\boldsymbol{C}^*:\hat{\mathscr{H}}^1-(\boldsymbol{e}^*)^{\mathrm{T}}\cdot\hat{\mathscr{H}}^3]:(p\boldsymbol{C})^{-1},\ \hat{\mathscr{H}}^6=\boldsymbol{C}^*:\hat{\mathscr{H}}^2-(\boldsymbol{e}^*)^{\mathrm{T}}\cdot\hat{\mathscr{H}}^4,\\ \hat{\mathscr{H}}^7=\hat{\mathscr{H}}^3:(p\boldsymbol{C})^{-1}.\end{aligned} \tag{55}$$

由 Laplace 逆变换，可以将(53)，(54)式写为卷积形式

$$\sigma^L(t)=\int_0^t\hat{\mathscr{H}}^5(t-t'):\sigma^0(t')\mathrm{d}t'+\int_0^t\hat{\mathscr{H}}^6(t-t')\cdot\hat{\boldsymbol{E}}^0(t')\mathrm{d}t', \tag{56}$$

$$\boldsymbol{E}^L(t)=\int_0^t\hat{\mathscr{H}}^7(t-t'):\sigma^0(t')\mathrm{d}t'+\int_0^t\hat{\mathscr{H}}^4(t-t')\cdot\boldsymbol{E}^0(t')\mathrm{d}t'. \tag{57}$$

将(56)，(57)代入(52)就得到考虑基体粘弹性和介电弛豫效应，但不考虑铁电夹杂间质相互作用的畴变准则.

3.2　考虑相互作用的畴变准则

当铁电相的体积百分比较大时，需要相互作用解来分析，由 Mori-Tanaka 方法，可以得到

$$\hat{\sigma}^L(p)=\hat{\mathscr{U}}(p):\hat{\sigma}^0(p)+\hat{\mathscr{V}}(p)\cdot\boldsymbol{E}^0(p)+\hat{\sigma}_{\mathrm{MT}}^{\langle **\rangle}(p), \tag{58}$$

$$\boldsymbol{E}^L(p)=\hat{\mathscr{W}}(p):\hat{\sigma}^0(p)+\hat{\mathscr{Q}}(p)\cdot\boldsymbol{E}^0(p)+\boldsymbol{E}_{\mathrm{MT}}^{\langle **\rangle}(p), \tag{59}$$

其中

$$\hat{\mathscr{U}}=[\boldsymbol{C}^{*}:\hat{\mathscr{M}}-(\boldsymbol{e}^{*})^{\mathrm{T}}\circ\hat{\mathscr{P}}]:(p\boldsymbol{C})^{-1},\ \hat{\mathscr{V}}=\boldsymbol{C}^{*}:\hat{\mathscr{N}}-(\boldsymbol{e}^{*})^{\mathrm{T}}\circ\hat{\mathscr{Q}},\hat{\mathscr{W}}=\hat{\mathscr{P}}:(p\boldsymbol{C})^{-1}.\qquad(60)$$

而

$$\hat{\sigma}_{\mathrm{MT}}^{\langle **\rangle}=\boldsymbol{C}^{*}:\hat{\varepsilon}_{\mathrm{MT}}^{\langle **\rangle}-(\boldsymbol{e}^{*})^{\mathrm{T}}\circ\hat{\boldsymbol{E}}_{\mathrm{MT}}^{\langle **\rangle},\ \hat{\varepsilon}_{\mathrm{MT}}^{\langle **\rangle}=$$

$$-f_0\{\hat{\mathscr{M}}:\langle\hat{\varepsilon}_{\mathrm{dilute}}^{\langle **\rangle}\rangle+\hat{\mathscr{N}}\circ\langle\boldsymbol{E}_{\mathrm{dilute}}^{**}\rangle\},\qquad(61)$$

$$\boldsymbol{E}_{\mathrm{MT}}^{**}=-f_0\{\hat{\mathscr{P}}:\langle\hat{\varepsilon}_{\mathrm{dilute}}^{**}\rangle+\hat{\mathscr{Q}}\circ\langle\boldsymbol{E}_{\mathrm{dilute}}^{**}\rangle\}.$$

由 Laplace 逆变换, 可以将(58), (59)式写为卷积形式

$$\sigma^{L}(t)=\int_0^t\mathscr{U}(t-t'):\sigma^0(t')\mathrm{d}t'+\int_0^t\mathscr{V}(t-t')\circ\boldsymbol{E}^0(t')\mathrm{d}t'+\sigma_{\mathrm{MT}}^{\langle **\rangle}(t),\qquad(62)$$

$$\boldsymbol{E}^{L}(t)=\int_0^t\mathscr{W}(t-t'):\sigma^0(t')\mathrm{d}t'+\int_0^t\mathscr{Q}(t-t')\circ\boldsymbol{E}^0(t')\mathrm{d}t'+\boldsymbol{E}_{\mathrm{MT}}^{\langle **\rangle}(t).\qquad(63)$$

由此得到了考虑基体粘弹性和介电效应的铁电相的局部场. 将其代入(52)式就得到了考虑铁电夹杂之间相互作用以及基体粘弹性性质和介电弛豫效应的畴变准则.

4 结论

本文以细观力学方法建立了考虑粘弹性和介电弛豫的铁电复合材料的本构模型, 此模型可以用来分析具有聚合物基体的铁电复合材料的力电耦合行为. 应该指出的是, 本文中为数学上的简便, 采用了单晶单畴的假设是理想化的. 铁电复合材料实际上是多晶多畴的, 今后的工作应按四方相 6 种电畴依据畴变准则并引入取向分布函数来确定本构关系.

参 考 文 献

1 江 冰, 李兴丹, 吴代华. Smart 结构及其应用. 力学进展, 1994, 24(3): 253～361

2 方岱宁, 江 冰. 铁电复合材料的电机械行为. 力学与实践, 1999, 21(3): 1～8

3 Wang B. Three dimensional analysis of an ellipsoidal inclusion in a piezoelectric material. Int J Solids Struct, 1992, 29(3): 293～308

4 Jiang B, Fang D N, Hwang K C. The effective properties of piezocomposites, Part I: single inclusion problem. Acta Mecha Sinica, 1997, 13(4): 339～346

5 Jiang B, Fang D N, Hwang K C. The effective properties of piezocomposites, Part II: effective properties. Acta Mecha. Sinica, 1997, 13(4): 347～354

6 Jiang B, Fang D N, Hwang K C. A unified model for the multiphase piezocomposites with ellipsoidal inclusions. Inter J of Solids and Structures, 1999, 36(18): 2 707～2 733

7 Maugin G A. The Mechanical Behavior of Electromagnetic Solid Continua. Amsterdam: North-Holland, Elsevier Science Publishers, 1995. 32～60

8 Christensen R M. Theory of Viscoelasticity, An Introduction. New York: Academic Press, 1982. 12～41

9 Hedvig P. Dielectric Spectroscopy of Polymer. Budapest: Akademiai Press, 1997. 1～18

10 Mura T. Micromechanics of Defects in Solids. Netherlands: Martinus Nijhoff Publishers, Dordrecht, 1987. 36～90

11 Fan H, Qin S. A piezoelectric sensor embedded in a non-piezoelectric matrix. Int J Engng Sci, 1995, (33): 379～388

12 Hwang S C, Lynch C S, McMeeking R M. Ferroelectric/ferroelastic interactions and a polarization awitching model. Acta Metall Mater, 1995, 45(5): 2 073～2 084