

多六端口网络分析仪的校准与测量

阮 成 礼

(成都电讯工程学院应用物理研究所)

摘 要

本文讨论了多端口网络测量的一般理论,提出用逐次降阶法来测量微波多端口网络。给出了双六端口,三六端口及多六端口网络分析仪校准及测量的全部公式。所有公式没有多值问题。校准与测量程序简单,不需要标准多端口网络来校准系统常数。

一、引 言

1972年 Hoer 和 Engen^[1,2] 提出六端口的概念以后,微波测量理论与技术有了很大发展。随着计算机技术的进展,微波测量更加精密更加自动化了。1977年 Hoer^[3] 提出了双六端口网络分析仪,使得我们能很方便地测量二端口网络。此后许多学者对双六端口网络分析仪的校准与测量做了大量的工作^[4-6],使系统的校准更加简洁快速。

微波领域广泛使用着各种多端口网络,常常碰到如何测量微波多端口网络参量的问题。用单六端口测量单口网络,用双六端口测量二端口网络,自然而然会想到能否用多六端口来测量多端口网络?这方面李世鹤博士提出了隔离的多六端口网络分析仪(ISPNA)^[1],并根据散射矩阵理论讨论了它的校准与测量问题,特别是对三六端口网络分析仪,做了许多实验工作。由于多六端口网络的复杂性,目前对多六端口的研究报道较少。本文试图就这一问题做进一步地探讨。

首先我们讨论了多端口网络测量的一般理论,提出了逐次降阶法,把全部有关方程都化为线性方程,求解中不存在多值问题。其次在文献[6,7]基础上讨论了双六端口网络分析仪的校准与测量问题。校准与测量程序都非常简单,不需要用标准二端口网络来校准系统常数。还讨论了三六端口网络分析仪的校准与测量问题。分析表明三六端口网络分析仪是万能六端口网络分析仪。最后讨论了用多六端口网络分析仪测量多端口网络问题,表明逐次降阶法测量多端口网络充分发挥了测量系统及计算机各自的特长。

讨论双六端口、三六端口以及多六端口网络分析仪是建立在使用理想隔离器的基础之上。使用非理想隔离器将产生一定误差,这个问题将另文讨论。分析表明我们能够尽可能准确地实现理想的隔离。

本文1986年1月11日收到,1986年7月23日收到修改稿。

1) Li, S. H. (李世鹤), *Automatic Analysis of Multiport Microwave Networks*. (博士论文)

二、一般理论——逐次降阶法

任意一个 n 端口网络可用一个 n 阶散射矩阵来描述其网络特性。有

$$b = Sa, \quad (1a)$$

$$b = (b_1, b_2, \dots, b_n)^t, \quad (1b)$$

$$a = (a_1, a_2, \dots, a_n)^t, \quad (1c)$$

$$S = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & \dots & S_{1n} \\ S_{21} & S_{22} & \dots & S_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ S_{n1} & S_{n2} & \dots & S_{nn} \end{pmatrix}, \quad (1d)$$

其中 b 是反射波列矩阵, a 是入射波列矩阵, S 是 n 阶散射矩阵。设在 n 端口网络的第 k 端口上连接一个其反射系数为 Γ_k 的负载, 则这个 n 端口网络连同负载变为一个 $(n-1)$ 端口网络^(k), 上标 k 表示消去第 k 端口。把

$$a_k = \Gamma_k b_k. \quad (2)$$

代入 (1) 式, 可把 S 矩阵的阶数降低一阶, 变为 $(n-1)$ 阶的散射矩阵 $S^{(k)}$ 。 $S^{(k)}$ 是把矩阵 S 的第 k 行和第 k 列划掉, 同时以相应矩阵元 $S_{ij}^{(k)}$ 代矩阵元 S_{ij} 后得到的。 $S_{ij}^{(k)}$ 与 S_{ij} 的关系为

$$S_{ij}^{(k)} = S_{ij} + \frac{\Gamma_k S_{ik} S_{kj}}{1 - S_{kk} \Gamma_k}, \quad (3)$$

$$i, j, k = 1, 2, \dots, n, \quad i, j \neq k.$$

为了明确对应关系, 没有改变 (和 S_{ij} 对应的) $S_{ij}^{(k)}$ 的下标。

一个 n 端口网络按上述方法消去一个端口, 可构成 n 个不同的 $(n-1)$ 端口网络^(k)。对

于一个特定的 k , (3) 式表示 $(n-1)^2$ 个 $S_{ij}^{(k)}$ 。当 k 依次取 $1, 2, \dots, n$ 时, (3) 式表示 $n(n-1)^2$ 个 $S_{ij}^{(k)}$ 。如果我们能够测出 n 个 $(n-1)$ 端口网络的全部散射参数, 即 (3) 式的 $S_{ij}^{(k)}$, 原则上可用 (3) 式给出的 $n(n-1)^2$ 个方程解出 n 端口网络的全部散射参数 S_{ij} , $i, j = 1, 2, \dots, n$ 。

第一步, 求解 S 矩阵的对角线元素 S_{ii} 。

以反射系数为 Γ_k 的负载接在第 k 端口上, 消去第 k 端口, 使 n 端口网络变成 $(n-1)$ 端口网络^(k)。在第 i 端口, $i \neq k$, 有

$$S_{ii}^{(k)} = S_{ii} + \frac{\Gamma_k S_{ik} S_{ki}}{1 - S_{kk} \Gamma_k}, \quad i \neq k. \quad (4)$$

然后消去第 i 端口, 使 n 端口网络变为另一个

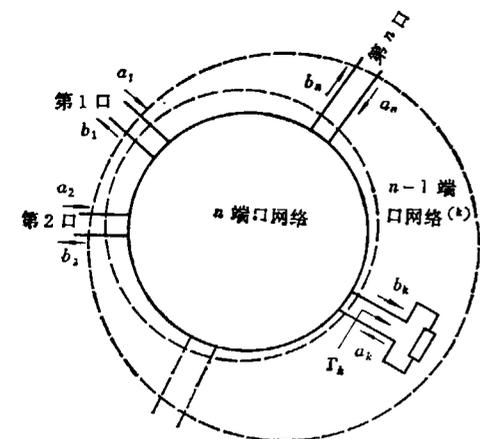


图1 消去第 k 端口把 n 端口网络化为 $(n-1)$ 端口网络

$(n-1)$ 端口网络⁽ⁱ⁾。在第 k 端口上, 有

$$S_{kk}^{(i)} = S_{kk} + \frac{\Gamma_i S_{ki} S_{ik}}{1 - S_{ii} \Gamma_i}, \quad k \neq i. \quad (5)$$

由 (4) 和 (5) 式得到

$$S_{ik}S_{ki} = (S_{ii}^{(k)} - S_{ii})(1 - S_{kk}\Gamma_k)/\Gamma_k = (S_{kk}^{(i)} - S_{kk})(1 - S_{ii}\Gamma_i)/\Gamma_i. \quad (6)$$

由 (6) 式得

$$(1 - \Gamma_i S_{ii}^{(k)})\Gamma_k S_{kk} - (1 - \Gamma_k S_{kk}^{(i)})\Gamma_i S_{ii} = \Gamma_k S_{kk}^{(i)} - \Gamma_i S_{ii}^{(k)} \\ i, k = 1, 2, \dots, n, i \neq k, \quad (7)$$

其中 Γ_k, Γ_i 分别是两个已知负载的反射系数, $S_{ii}^{(k)}, S_{kk}^{(i)}$ 是相应 $(n-1)$ 端口网络散射参数(对角线元素), 是我们已测得的量. (7) 式是关于 n 端口网络散射矩阵对角线元素的线性方程. 因为由两个方程式 (4) 和 (5) 才能得到一个方程式 (7), 所以 (7) 式一共有 $\frac{1}{2}n(n-1)$ 个. n 端口网络散射矩阵对角线元一共有 n 个, 当 $\frac{1}{2}n(n-1) \geq n$ 时我们可解出全部对角线元素. 显然 $n \geq 3$ 时可解出全部 S_{kk} .

当 $n > 3$ 时方程数多于对角线元素数目, 多余的方程是相关的, 为了方便, k 和 i 分别取 1 和 2, 2 和 3, ..., n 和 1, 一共可得 n 个方程, 写成矩阵形式为

$$A_d S_r = B_d, \quad (8a)$$

$$S_r = (\Gamma_1 S_{11}, \Gamma_2 S_{22}, \dots, \Gamma_n S_{nn})^t, \quad (8b)$$

$$B_d = \begin{bmatrix} \Gamma_1 S_{11}^{(2)} - \Gamma_2 S_{22}^{(1)} \\ \Gamma_2 S_{22}^{(3)} - \Gamma_3 S_{33}^{(2)} \\ \vdots \\ \Gamma_n S_{nn}^{(1)} - \Gamma_1 S_{11}^{(n)} \end{bmatrix}, \quad (8c)$$

$$A_d = \begin{bmatrix} 1 - \Gamma_2 S_{22}^{(1)} & -1 + \Gamma_1 S_{11}^{(2)} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 - \Gamma_3 S_{33}^{(2)} & -1 + \Gamma_2 S_{22}^{(3)} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 + \Gamma_{n-1} S_{n-1, n-1}^{(n)} \\ -1 + \Gamma_n S_{nn}^{(1)} & 0 & 0 & \dots & 1 - \Gamma_1 S_{11}^{(n)} \end{bmatrix}, \quad (8d)$$

可解出

$$S_{kk} = \sum_{j=1}^n B_{dj} A_{dik} / \Gamma_k \det A_d, \\ k = 1, 2, \dots, n; \quad (8e)$$

其中 t 为转置, B_{dj} 是列矩阵 B_d 的元素, A_{dik} 是矩阵 A_d 的第 j 行, 第 k 列元素的代数余子式.

第二步, 求解 S 矩阵的非对角线元素 S_{ij} .

把 (8e) 式代入 (6) 式, 可得 $\frac{1}{2}n(n-1)$ 个非对角线元素的积 $S_{ik}S_{ki}$. 解对角线元素 S_{kk}

时共用了 $n(n-1)$ 个方程, 还余下 $n(n-1)(n-2)$ 个方程 ((3) 式), 利用 (6) 式可把这 $n(n-1)(n-2)$ 个方程化为关于 S 矩阵非对角线元素 $S_{ij}, i \neq j$, 的线性方程.

由 (3) 式有

$$\Gamma_k S_{ik} S_{ki} = (S_{ij}^{(k)} - S_{ij})(1 - \Gamma_k S_{kk}), \quad k \neq i, j. \quad (9)$$

保持 (9) 式中的 k 不变, 交换下标 i 和 j , 有

$$\Gamma_k S_{jk} S_{ki} = (S_{ji}^{(k)} - S_{ji})(1 - \Gamma_k S_{kk}), \quad k \neq j, i. \quad (10)$$

(9) 和 (10) 式两边分别相乘得

$$S_{ij}^{(k)} S_{ij} + S_{ij}^{(k)} S_{ij} = S_{ij}^{(k)} S_{ij}^{(k)} + S_{ij} S_{ij} - (S_{ij}^{(k)} - S_{ij})(S_{ij}^{(k)} - S_{ij}), \quad (11)$$

$$i, j = 1, 2, \dots, n, i \neq j, i, j \neq k.$$

(11) 式右边第一项是 $S^{(k)}$ 矩阵非对角线元素的积, 我们假定 $S^{(k)}$ 是已测知的量; 第二项是 S 矩阵非对角线元素的积, 它由 (6) 式给出; 第三项中 S_{ii} 和 S_{ij} 由 (8) 式给出, $S_{ij}^{(k)}$ 和 $S_{ij}^{(k)}$ 是已测知的量, 因此 (11) 式是关于 S 矩阵非对角线元素 S_{ij} 的线性方程. S 矩阵非对角线元素一共有 $n(n-1)$ 个, 而方程 (11) 式也是从两个方程式 (9) 和 (10) 得到的, 一共有

$$\frac{1}{2} n(n-1)(n-2)$$

个. 当 $\frac{1}{2} n(n-1)(n-2) \geq n(n-1)$ 时可解出全部 $S_{ij}, i \neq j$, 即 $n \geq 4$ 可解出全部 S_{ij} .

(11) 式是对称的, 可对地解出 S_{ij} . 把 (11) 式中的 k 换为 h , 则有

$$S_{ij}^{(h)} S_{ij} + S_{ij}^{(h)} S_{ij} = S_{ij}^{(h)} S_{ij}^{(h)} + S_{ij} S_{ij} - (S_{ij}^{(h)} - S_{ij})(S_{ij}^{(h)} - S_{ij}), \quad (12)$$

$$i, j = 1, 2, \dots, n, i \neq j, i, j \neq h.$$

当 $h \neq k$ 时, 解 (11) 和 (12) 式得

$$S_{ij} = \frac{\begin{vmatrix} E_{ij}^{(k)} & S_{ij}^{(k)} \\ E_{ij}^{(h)} & S_{ij}^{(h)} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} S_{ij}^{(k)} & S_{ij}^{(k)} \\ S_{ij}^{(h)} & S_{ij}^{(h)} \end{vmatrix}}, \quad (13a)$$

$$S_{ij} = \frac{\begin{vmatrix} S_{ij}^{(k)} & E_{ij}^{(k)} \\ S_{ij}^{(h)} & E_{ij}^{(h)} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} S_{ij}^{(k)} & S_{ij}^{(k)} \\ S_{ij}^{(h)} & S_{ij}^{(h)} \end{vmatrix}}, \quad (13b)$$

$$E_{ij}^{(k)} = S_{ij}^{(k)} S_{ij}^{(k)} - S_{ij} S_{ij} - (S_{ij}^{(k)} - S_{ij})(S_{ij}^{(k)} - S_{ij}), \quad (13c)$$

$$E_{ij}^{(h)} = S_{ij}^{(h)} S_{ij}^{(h)} - S_{ij} S_{ij} - (S_{ij}^{(h)} - S_{ij})(S_{ij}^{(h)} - S_{ij}), \quad (13d)$$

$$i, j = 1, 2, \dots, n, i \neq j, i, j \neq k \neq h.$$

为了便于计算, 一般选 $i < j, h = k + 1 = j + 2$. 当 $i \geq 3, j \geq n - 1$ 时, 以 $k - n$ 代 k , 以 $h - n$ 代 h . 求 $S_{1,n-1}$ 和 $S_{n-1,1}$ 时取 $k = n, h = 2$; 求 $S_{1,n}$ 和 $S_{n,1}$ 时取 $k = 2, h = 3$; 求 $S_{2,n-1}$ 和 $S_{n-1,2}$ 时取 $k = n, h = 1$; 求 $S_{2,n}$ 和 $S_{n,2}$ 时, 取 $k = 1, h = 3$. 这样依次计算出 S_{12} 和 S_{21}, S_{13} 和 S_{31}, \dots, S_{1n} 和 S_{n1}, S_{22} 和 S_{22}, \dots 直到 $S_{n-1,n}$ 和 $S_{n,n-1}$.

在求解 S 矩阵的对角线元素 S_{kk} 和非对角线元素 S_{ij} 时看到, 不是 n 为任何正整数时都有确定的解. 表 1 给出了网络端口数, 未知数 S_{ij} 个数与方程数之间的关系.

表 1 第一行是网络的端口数. 第二行是把 n 端口网络变为 $(n-1)$ 端口网络可以列出的方程个数. 第三行和第五行是待求的未知元的个数, 对角线元素是 n 个, 非对角线元素是 $n(n-1)$ 个, 一共 n^2 个. 第四行和第六行是能够得到的关于 S_{ij} 的线性方程的个数. 关于对角线元素的线性方程是 $\frac{1}{2} n(n-1)$ 个, 关于非对角线元素的线性方程是 $\frac{1}{2} n(n-1)(n-2)$ 个, 一共是 $\frac{1}{2} n(n-1)^2$ 个. 当 $\frac{1}{2} n(n-1)^2 \geq n^2$ 时, 我们可以利用这种逐次降低 S 矩阵阶数的办法求得 S 矩阵的全部元素, 而且没有不确定性即没有多值问题. 例如 $n = 4$, 用上述降

表 1

端口数	2	3	4	5	6	n	注
总方程数	2	12	36	80	150	$n(n-1)$	(3)式
S_{kk} 个数	2	3	4	5	6	n	对角元
S_{kk} 方程数	1*	3	6	10	15	$\frac{n}{2}(n-1)$	(7)式
S_{ij} 个数	2	6	12	20	30	$n(n-1)$	非对角元
S_{ij} 方程数	0*	3*	12	30	60	$\frac{n}{2}(n-1)(n-2)$	(11)式

阶法可把四端口问题化为四个三端口问题来解决,只要三端口网络的测量问题解决了,我们就能求得四端口网络的全部散射参量. $n > 4$ 的多端口网络的测量问题可逐步化为三端口网络的测量问题. 然而从表 1 看到 $n = 2$ 时, S_{kk} 的方程数为 1, 而待求的 S_{kk} 是 2 个,关于 S_{ij} 的方程数为 0. 待求的 S_{ij} 是 2 个;当 $n = 3$ 时,关于 S_{kk} 的方程数和待求的 S_{kk} 都是 3 个,可全部解出 S_{kk} , 但关于 S_{ij} 的方程数是 3 个,待求的 S_{ij} 是 6 个,因此不能用降阶法来解决二端口和三端口网络的测量问题. 下面分别来讨论二端口和三端口网络的测量问题.

三、双六端口网络分析仪的校准与测量

图 2 是一个双六端口网络分析仪的简图. 如图所示, 它由信号源、功分器、开关、衰减器、隔离器、匹配负载以及六端口网络等组成. 参考面 1 和 2 之间接待测二端口网络, 其散射参数为 S_{ij} , $i, j = 1, 2$. Γ_1 和 Γ_2 是由参考面 1 和 2 分别向六端口 SP1 和 SP2 看进去的反射系数. C_1 和 C_2 分别是信号源到达待测二端口网络两个端口的来波. Γ_1, Γ_2 和 C_2/C_1 是系统常数.

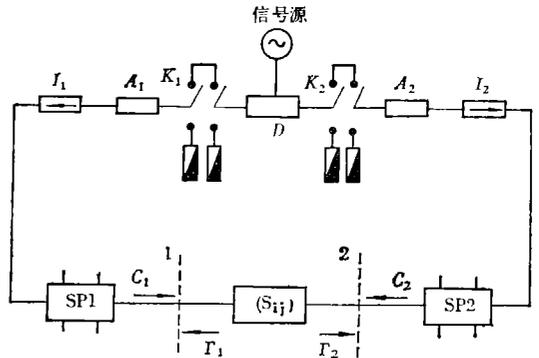


图 2 双六端口网络分析仪简图

SP1 和 SP2 是两只校准了的六端口网络, 它们的校准方法见文献 [8]. 现在讨论双六端口网络分析仪的系统校准问题.

信号经由功分器 D 分为两路, 分别进入左右两个支路. 这两个支路在结构上是对称的. 衰减器是用来使功率不超过功率计的动态范围. 隔离器是理想的, 它保证^[7]:

1. 从参考面 i 向六端口 SP i 看进去的反射系数 Γ_i , 无论开关 K_i 在什么状态, 都保持为常数;
2. 无论参考面 1 和 2 之间接待测二端口网络, C_2/C_1 的比值都保持为常数.

当开关 K_1 与衰减器 A_1 接通(使六端口 SP1 与信号源接通, 称 K_1 为通), 开关 K_2 与匹配负载接通(使六端口 SP2 与信号源断开, 称 K_2 为断)时, SP1 测得的反射系数用 Γ_{1P} 表示. 则有

$$\Gamma_{1P} = (S_{11} - \Gamma_2 \Delta) / (1 - \Gamma_2 S_{21}), \quad (14)$$

$$\Delta = S_{11} S_{22} - S_{12} S_{21}.$$

当 K_1 为断, K_2 为通时, 由 SP2 测得的反射系数为 Γ_{1p} , 同上有

$$\Gamma_{1p} = (S_{22} - \Gamma_1 \Delta) / (1 - \Gamma_1 S_{11}). \quad (15)$$

当 K_1 和 K_2 都处在通状态时, 六端口测得的反射系数用一个下标 a 表示, 由迭加原理得

$$\Gamma_{1a} = \frac{S_{11} - \Gamma_1 \Delta + \frac{C_2}{C_1} S_{12}}{1 + \frac{C_2}{C_1} \Gamma_1 S_{12} - \Gamma_1 S_{11}}, \quad (16)$$

$$\Gamma_{2a} = \frac{S_{22} - \Gamma_1 \Delta + \frac{C_1}{C_2} S_{21}}{1 + \frac{C_1}{C_2} \Gamma_1 S_{21} - \Gamma_1 S_{11}}. \quad (17)$$

利用 (14)–(17) 式可校准六端口网络分析仪的系统常数, 步骤如下:

首先把六端口 SP1 和 SP2 的测试口对接, 即以零长度传输线为标准二端口网络接在参考面 1 和 2 之间, 在 K_1 为通, K_2 为断的状态下, 由 SP1 测得 Γ'_{1p} , 由 (14) 式有

$$\Gamma'_{1p} = \Gamma_1. \quad (18)$$

其次, 在 K_1 为断, K_2 为通的状态下, 由 SP2 测得 Γ'_{2p} , 由 (15) 式有

$$\Gamma'_{2p} = \Gamma_1. \quad (19)$$

最后, 在 K_1 和 K_2 都为通的状态下, 由 SP1 测得 Γ'_{1a} , 由 (16) 式得到

$$C_2 / C_1 = (\Gamma'_{1a} - \Gamma_1) / (1 - \Gamma_1 \Gamma'_{1a}). \quad (20)$$

于是, 在三种开关状态下, 12 个功率读数, 给出三个系统常数。

然后, 把待测的二端口网络接入参考面 1 和 2 之间, 测量步骤与校准程序一样: (1) K_1 通, K_2 断, 由 SP1 测得 Γ_{1p} ; (2) K_1 断, K_2 通, 由 SP2 测得 Γ_{2p} ; (3) K_1 通, K_2 通, 由 SP1 测得 Γ_{1a} , 由 SP2 测得 Γ_{2a} , 代入 (14)–(17) 式, 可解出全部散射参数为

$$S_{11} = (\Gamma_{1p} - \Gamma_1 \beta_1 \beta_2) / \beta_3, \quad (21a)$$

$$S_{12} = \beta_1 (1 - \Gamma_1 \Gamma_{2p}) / \beta_3, \quad (21b)$$

$$S_{21} = \beta_2 (1 - \Gamma_1 \Gamma_{1p}) / \beta_3, \quad (21c)$$

$$S_{22} = (\Gamma_{2p} - \Gamma_1 \beta_1 \beta_2) / \beta_3, \quad (21d)$$

$$\beta_1 = \frac{C_1 \Gamma_{1a} - \Gamma_{1p}}{C_2 (1 - \Gamma_1 \Gamma_{1a})}, \quad (21e)$$

$$\beta_2 = \frac{C_2 \Gamma_{2a} - \Gamma_{2p}}{C_1 (1 - \Gamma_1 \Gamma_{2a})}, \quad (21f)$$

$$\beta_3 = 1 - \Gamma_1 \Gamma_2 \beta_1 \beta_2. \quad (21g)$$

测量过程中不需要把待测二端口网络调换方向, 在三种开关状态下测量, 共 16 个功率读数, 得到全部 S_{ij} , $i, j = 1, 2$. 整个测量过程与校准程序都很简单。

四、三六端口网络分析仪的校准与测量

一个三端口网络共有 9 个散射参数, 由表 1 可知, 用降阶法可解出 S 矩阵的全部对角线元素, 关于非对角线元素, 只有三个线性方程, 不能解出 6 个非对角线元素。

为了解出三端口网络的全部散射参数, 现在用一个三六端口网络分析仪来测量三端口网

络。系统结构如图 3 所示。和双六端口网络分析仪比较，仅仅是多了一个支路，每一个支路的结构是完全一样的，每个电路元件的作用也是相同的，所不同的是功分器为三路功分器，信号源功率应相应地加大一些。待测三端口网络接于参考面 1, 2 和 3 之间。 $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, C_1, C_2$ 和 C_3 的定义同双六端口网络分析仪，它们是系统常数。因隔离器是理想的， Γ_1, Γ_2 和 Γ_3 不因开关状态而改变， C_1, C_2 和 C_3 之间的相对比值不因待测三端口网络的特性而改变。

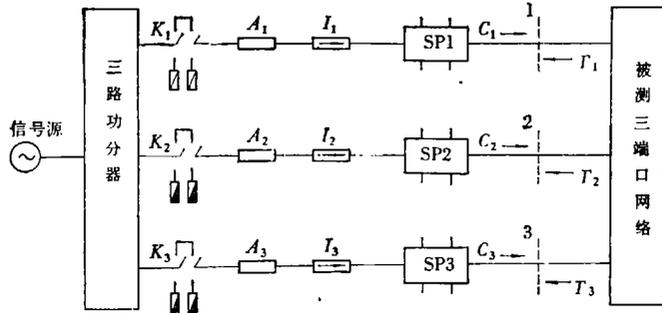


图 3 三六端口网络分析仪简图

三六端口网络分析仪的校准步骤如下：

首先把 SP1 的测试口与 SP2 的测试口对接，则 SP1 和 SP2 就构成一个双六端口，按双六端口网络分析仪系统校准方法，可得 Γ_1, Γ_2 和 C_2/C_1 。

然后，把 SP1 的测试口与 SP3 的测试口对接，同上所述校准，可得 Γ_3 和 C_3/C_1 。

由于系统中用了理想隔离器，所以系统只有 5 个常数。通过 SP1 分别与 SP2 和 SP3 的对接校准，在五个不同的开关状态下测量，共 20 个功率读数，可得 5 个系统常数。这 5 个常数仍由 (18) — (20) 式给出，只要适当改变各量的下标即可。整个校准过程简单，不需要任何标准三端口网络。

三端口网络的测量步骤如下：

当三个六端口 SP1, SP2, SP3 以及系统校准之后，把待测的三端口网络接入三六端口网络分析仪之中。三端口网络的三个端口分别与三个六端口的测试口连接起来。首先按降阶法测量。

1. K_1 断，三端口网络的第 1 端口相当于连接一个反射系数为 Γ_1 的负载（由衰减器 A_1 ，隔离器 I_1 ，和六端口 SP1 组成），三端口网络连同负载 (Γ_1) 构成一个二端口网络^[1]，并由 SP2 和 SP3 构成的双六端口网络分析仪来测量，由 (21) 式可得 $S_{12}^{(1)}, S_{22}^{(1)}, S_{32}^{(1)}$ 和 $S_{33}^{(1)}$ 。注意用 (21) 式时要小心各个量的下标，要适当代换。

2. K_2 断，三端口网络的第 2 端口相当于连接一个反射系数为 Γ_2 的负载（由 A_2, I_2 和 SP2 组成），由 SP1 和 SP3 构成的双六端口网络分析仪来测量，可得 $S_{11}^{(2)}, S_{13}^{(2)}, S_{31}^{(2)}, S_{33}^{(2)}$ 。

3. K_3 断，由 SP1 和 SP2 测量，可得 $S_{11}^{(3)}, S_{12}^{(3)}, S_{21}^{(3)}, S_{22}^{(3)}$ 。

这样共得 $S_{ij}^{(k)}, i, j, k = 1, 2, 3; i, j \neq k$, 12 个散射参数。由 (8) 式可解出三个对角线元素 S_{11}, S_{22} 和 S_{33} 。由 (11) 式给出三个关于非对角线元素 S_{ij} 的线性方程如下：

$$S_{12}^{(3)} S_{12} + S_{12}^{(3)} S_{21} = S_{12}^{(3)} S_{31}^{(3)} + S_{13} S_{21} - (S_{31}^{(3)} - S_{11})(S_{32}^{(3)} - S_{22}), \quad (22a)$$

$$S_{31}^{(2)} S_{13} + S_{13}^{(2)} S_{31} = S_{13}^{(2)} S_{31}^{(2)} + S_{13} S_{31} - (S_{11}^{(2)} - S_{11})(S_{33}^{(2)} - S_{33}), \quad (22b)$$

$$S_{32}^{(1)} S_{21} + S_{23}^{(1)} S_{32} = S_{23}^{(1)} S_{32}^{(1)} + S_{23} S_{32} - (S_{22}^{(1)} - S_{22})(S_{33}^{(1)} - S_{33}). \quad (22c)$$

三端口网络的散射矩阵有六个非对角线元素,现在有了三个关于 $S_{ij}, i \neq j$ 的线性方程(22a—c), 还需要再找三个线性方程,才能顺利解出 S_{ij} .

4. 为了解出 S_{ij} , 再做一次测量. 在 K_1, K_2 和 K_3 全为通的状态下, SP1, SP2 和 SP3 构成一个完整的三六端口网络分析仪, 各六端口测得的反射系数不是通常意义下的反射系数, 用代下标 a 的量表示, 即由 SP1 测得 Γ_{1a} , 由 SP2 测得 Γ_{2a} , 由 SP3 测得 Γ_{3a} , 而

$$\Gamma_{ia} = b_i/a_i, \quad i = 1, 2, 3. \quad (23)$$

把(23)式代入(1)式,有

$$(S_{11} - \Gamma_{1a})a_1 + S_{12}a_2 + S_{13}a_3 = 0, \quad (24a)$$

$$S_{21}a_1 + (S_{22} - \Gamma_{2a})a_2 + S_{23}a_3 = 0, \quad (24b)$$

$$S_{31}a_1 + S_{32}a_2 + (S_{33} - \Gamma_{3a})a_3 = 0. \quad (24c)$$

(24)式中的 a_1, a_2 和 a_3 是 C_1, C_2 和 C_3 共同作用的结果, 可用迭加原理求出.

把三六端口系统用信号流图表示, 如图4所示. 根据信号流图容易求出 a_1, a_2 和 a_3 .

$$a_1 = C_1[1 - (S_{22}\Gamma_2 + S_{33}\Gamma_3 + \Gamma_2\Gamma_3S_{23}S_{32}) + \Gamma_2\Gamma_3S_{22}S_{33}] + C_2[S_{12}\Gamma_1(1 - S_{33}\Gamma_3) + \Gamma_1\Gamma_3S_{13}S_{32}] + C_3[S_{13}\Gamma_1(1 - S_{22}\Gamma_2) + \Gamma_1\Gamma_2S_{12}S_{23}], \quad (25a)$$

$$a_2 = C_1[S_{21}\Gamma_2(1 - S_{33}\Gamma_3) + \Gamma_2\Gamma_3S_{23}S_{31}] + C_2[1 - (S_{11}\Gamma_1 + S_{33}\Gamma_3 + \Gamma_1\Gamma_3S_{13}S_{31}) + \Gamma_1\Gamma_3S_{11}S_{33}], \quad (25b)$$

$$a_3 = C_1[S_{31}\Gamma_3(1 - S_{22}\Gamma_2) + \Gamma_2\Gamma_3S_{31}S_{22}] + C_2[S_{32}\Gamma_3(1 - S_{11}\Gamma_1) + \Gamma_1\Gamma_3S_{12}S_{31}] + C_3[1 - (S_{11}\Gamma_1 + S_{22}\Gamma_2 + \Gamma_1\Gamma_2S_{12}\Gamma_{21}) + \Gamma_1\Gamma_2S_{11}S_{22}], \quad (25c)$$

其中忽略了网络的图行列式, 因为运算中将被消去. 把(25)式代入(24)式得到三个线性方程

$$(1 - S_{33}\Gamma_3)\Gamma_2S_{21}^{(3)}S_{12} + (1 - S_{22}\Gamma_2)\Gamma_3S_{31}^{(2)}S_{13} = R_1, \quad (26a)$$

$$(1 - S_{33}\Gamma_3)\Gamma_1S_{12}^{(3)}S_{21} + (1 - S_{11}\Gamma_1)\Gamma_3S_{32}^{(1)}S_{23} = R_2, \quad (26b)$$

$$(1 - S_{22}\Gamma_2)\Gamma_1S_{13}^{(2)}S_{31} + (1 - S_{11}\Gamma_1)\Gamma_2S_{23}^{(1)}S_{32} = R_3, \quad (26c)$$

其中

$$R_1 = (\Gamma_{1a} - S_{11})[1 - S_{22}\Gamma_2 - S_{33}\Gamma_3 + \Gamma_2\Gamma_3(S_{22}S_{33} - S_{23}S_{32})] - \frac{C_2}{C_1}(1 - \Gamma_{1a}\Gamma_1)(1 - S_{33}\Gamma_3)S_{12}^{(3)} - \frac{C_3}{C_1}(1 - \Gamma_{1a}\Gamma_1)(1 - \Gamma_2S_{22})S_{13}^{(2)}, \quad (27a)$$

$$R_2 = (\Gamma_{2a} - S_{22})[1 - S_{11}\Gamma_1 - S_{33}\Gamma_3 + \Gamma_1\Gamma_3(S_{11}S_{33} - S_{13}S_{31})] - \frac{C_1}{C_2}(1 - \Gamma_{2a}\Gamma_2)(1 - S_{33}\Gamma_3)S_{21}^{(3)} - \frac{C_3}{C_2}(1 - \Gamma_{2a}\Gamma_2)(1 - S_{11}\Gamma_1)S_{23}^{(1)}, \quad (27b)$$

$$R_3 = (\Gamma_{3a} - S_{33})[1 - S_{11}\Gamma_1 - S_{22}\Gamma_2 + \Gamma_1\Gamma_2(S_{11}S_{22} - S_{12}S_{21})] - \frac{C_1}{C_3}(1 - \Gamma_{3a}\Gamma_3)(1 - \Gamma_2S_{22})S_{31}^{(2)} - \frac{C_2}{C_3}(1 - \Gamma_{3a}\Gamma_3)(1 - S_{11}\Gamma_1)S_{32}^{(1)}. \quad (27c)$$

把 (22) 和 (26) 式合并写成矩阵形式, 有

$$MS^c = N, \quad (28a)$$

$$S^c = (S_{12}, S_{13}, S_{21}, S_{22}, S_{31}, S_{32})^t = (S_1, S_2, \dots, S_6)^t, \quad (28b)$$

$$N = (P_1, P_2, P_3, R_1, R_2, R_3)^t = (N_1, N_2, \dots, N_6)^t, \quad (28c)$$

$$P_1 = S_{12}^{(3)}S_{21}^{(3)} + S_{12}S_{21} - (S_{11}^{(3)} - S_{11})(S_{22}^{(3)} - S_{22}), \quad (28d)$$

$$P_2 = S_{13}^{(2)}S_{31}^{(2)} + S_{13}S_{31} - (S_{11}^{(2)} - S_{11})(S_{33}^{(2)} - S_{33}), \quad (28e)$$

$$P_3 = S_{23}^{(1)}S_{32}^{(1)} + S_{23}S_{32} - (S_{22}^{(1)} - S_{22})(S_{33}^{(1)} - S_{33}), \quad (28f)$$

$M =$

$$\begin{bmatrix} S_{21}^{(3)} & 0 & S_{12}^{(3)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & S_{31}^{(2)} & 0 & 0 & S_{13}^{(2)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{32}^{(1)} & 0 & S_{23}^{(1)} \\ (1-S_{33}T_3)T_1S_{21}^{(3)}(1-S_{22}T_2)T_3S_{31}^{(2)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (1-S_{33}T_3)T_1S_{12}^{(3)}(1-S_{11}T_1)T_3S_{32}^{(1)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (1-S_{22}T_2)T_1S_{13}^{(2)}(1-S_{11}T_1)T_3S_{23}^{(1)} & 0 \end{bmatrix}. \quad (28g)$$

由 (28) 式可解出 S_{il} , 即 $S_l, l = 1, 2, \dots, 6$.

$$S_l = \sum_{h=1}^6 N_h M_{hl} / \det M, \quad l = 1, 2, \dots, 6, \quad (29)$$

其中 M_{hl} 是矩阵 M 的第 h 行、第 l 列元素的代数余子式。 S_{il} 与 S_l 的对应关系由 (28b) 式给出。至此我们得到了三端口网络的全部散射参数。

表面看来三端口网络的测量经过以上四个步骤需要在 10 种开关状态下测量, 其实不然。三六端口网络分析仪总共有三只开关, 可用一个三位的二进制数码表示, 以 0 表示开关断, 以 1 表示开关通, 除去 000 外, 三位的二进制数最多可表示 7 个数, 即在 7 种开关状态下, 48 个功率读数, 可求得三端口网络的全部散射参数。

实际上由 (6) 和 (22) 式也可以求解三端口网络的散射参量 $S_{ij}, i \neq j$, 即用一个双六端口网络分析仪来测量三端口网络, 但是我们发现将出现多值问题, 这是不希望的。从 (3) 式看到, 当 $\Gamma_k = 0$ 时, 有 $S_{ij}^{(k)} = S_{ij}$, 也就是说, 在理想匹配的条件下可以用双六端口网络分析仪测得三端口网络的全部散射参量。然而理想匹配是难以实现的, 因此这里讲的方法是简单的, 准确的, 没有多值问题。

五、多端口网络及多六端口网络分析仪

在以上讨论的基础上, 多端口网络散射参数的测量有两种方法, 一是用三六端口网络分析仪测量。一是用多六端口网络分析仪测量。

三六端口网络分析仪实际是万能六端口网络分析仪。三六端口网络分析仪同时具有单六端口和双六端口网络分析仪的功能; 又可以测量三端口网络; 按逐次降阶法, 多端口网络的测量问题可以化为若干三端口网络来测量。因此三六端口网络分析仪可以测量各种各样的微波网络。例如测量一个四端口网络, 需要一个负载 (Γ_k)。为了使测量尽可能准确, 只要求 Γ_k 是准确地知道, 而不要求 Γ_k 为某一特定的值, 这样就方便了。测量 n 端口网络需要 $(n-3)$ 个确知其反射系数的负载, $n > 3$ 。

用三六端口网络分析仪测量 n 端口网络 ($n > 3$) 有一个缺点是要多次调换网络分析仪与待测多端口网络的连接顺序, 这很不方便. 为此可仿照双六端口和三六端口网络分析仪构造一个多六端口网络分析仪. 所谓多六端口指的是网络分析仪的六端口数与被测网络的端口数一致. 系统校准方法同三六端口网络分析仪. 系统常数为 $(2n - 1)$ 个, 由 $4(2n - 1)$ 个功率读数可得系统常数. 测量方法仍按逐次降阶法, 化为三端口网络来测量. 实际测量次数 (一种开关状态测量一次) 远较表面看来需要的次数少. 表 2 给出了网络端口数, S_{ij} 的个数, 开关状态数, 测量次数, 功率读数个数等之间的关系.

表 2

端口数	2	3	4	5	6	n
S_{ij} 的个数	4	9	16	25	36	n^2
开关状态数	4	8	16	32	64	2^n
测量次数	3	7	14	25	41	$\frac{n}{6}(n^2 + 5)$
功率读数个数	16	48	112	220	384	$2n(n^2 - n + 2)$
计算次数	3	10	40	200	1200	

从表 2 可以看到, 测量次数少于开关状态数, 在 $n = 2-6$ 时, 大致与 S_{ij} 的个数相当. 表中的计算次数一项实际是按逐次降阶法所需的测量次数, 差不多是按阶乘规律增加的. 测量次数少, 计算次数多正好发挥了测量系统及计算机各自的特长.

六、讨 论

以上讨论了多端口网络测量的一般理论, 提出用逐次降阶法来测量微波多端口网络. 用降阶法不能解决二端口及三端口网络的测量问题, 我们又分别讨论了双六端口网络分析仪、三六端口网络分析仪的校准与测量问题. 最后讨论了多端口网络分析仪. 给出了六端口网络分析仪的校准与测量的全部公式, 因方程全部是线性的, 不存在多值问题. 分析表明, 三六端口网络分析仪是万能六端口网络分析仪, 可以用来测量各种微波多端口网络. 测量多端口网络时用逐次降阶法使测量程序大为简化, 而计算的工作量相应加大, 这正好发挥了测量系统及计算机的特长. 我们所讨论的六端口网络分析仪的系统校准与测量都非常简单, 不需要标准多端口网络来校准系统常数. 之所以简单是因为系统使用了理想隔离器. 实际上我们不可能实现理想隔离, 非理想隔离将会使以上分析化为泡影. 关于非理想隔离产生的误差我们将另文讨论, 然而分析表明, 我们能够尽可能准确地实现理想隔离, 因此我们的讨论是有意义的.

参 考 文 献

- [1] Hoer, C. A., *IEEE Trans.*, **IM-21** (1972), 4: 466—470.
- [2] Engen, G. F. and Hoer, C. A., *IEEE Trans.*, **IM-21** (1972), 4: 470—474.
- [3] Hoer, C. A., *IEEE Trans.*, **MTT-25**(1977), 1070—1074.
- [4] Engen, G. F. and Hoer, C. A., *IEEE Trans.*, **MTT-27** (1979), 987—992.
- [5] Cronson, H. M. and Susman, L., *IEEE Trans.*, **MTT-29** (1981), 372—378.
- [6] 孙稼, 电子学报, **12**(1984), 6: 6—10.
- [7] Hunter, J. D. and Somlo, P. I., *Electronics Letters.*, **21**(1985), No. 4.
- [8] Li, S. H. (李世鹤) and Bosisio, R. G., *IEEE Trans.*, **MTT-30** (1982), 1085—1090.