中国科学 (A 辑)
第 29 卷 第 10 期 SCIENCE IN CHINA (Series A) 1999 年 10 月

涉及小函数的亚纯函数唯一性 *

李玉华 乔建永
(中国矿业大学(北京)数学中心, 北京 100083)

摘要 将关于亚纯函数唯一性的 Nevanlinna 五值定理拓广到涉及小函数的情形.

关键词 亚纯函数 小函数 唯一性

1 主要结果

关于复平面C 上亚纯函数的唯一性, Nevanlinna 证明了

定理 A[1] 设 $f(z)$和 $g(z)$为两个非常数亚纯函数, 如果存在 5 个判别复数 $a_j \in \overline{\mathrm{C}}(j=1, \cdots, 5)$, 使得

$$\{z \mid f(z)=a_j\}=\{z \mid g(z)=a_j\} \quad (j=1, \cdots, 5),$$

则 $f(z) \equiv g(z)$.

上述定理说明非常数亚纯函数可由它在 5 个点处的 5 个原象集唯一确定, 故该定理一般称为五值定理. 能否将五值定理拓广到 $a_j\,(j=1, \cdots, 5)$为小函数的情形, 是人们关心的一个问题. 这里, 称一个亚纯函数 $a(z)$(可恒为 ∞)是另一个非常数亚纯函数 $f(z)$的小函数, 如果 $a(z)$蜕化为$\overline{\mathrm{C}}$上的一个常数, 或者它们的 Nevanlinna 特征函数 $T(r, a)$和 $T(r, f)$满足

$$T(r, a)=o\{T(r, f)\} \quad (r \to +\infty, r \notin E),$$

其中 E 为R^+上的一个线性测度有穷的集合. 围绕上述问题, 有一系列特殊情形的研究结果[2~6], 本文彻底解决了这个问题. 五值定理的证明依赖于 Nevanlinna 第二基本定理的精简密指量形式. 由于不知道涉及小函数的第二基本定理[7]是否有精简密指量形式, 所以五值定理不能用Nevanlinna 的方法直接拓广到小函数的情形. 本文主要使用Nevanlinna 第一基本定理, 对数导数引理以及三密度不等式, 证明了

定理 设 $f(z)$和 $g(z)$为两个非常数亚纯函数, 如果存在 5 个判别亚纯函数 $a_j(z)\,(j=1, \cdots, 5)$(可有一个为∞), 它们全为 $f(z)$和 $g(z)$的小函数, 且

$$\{z \mid f(z)=a_j(z)\}=\{z \mid g(z)=a_j(z)\} \quad (j=1, \cdots, 5),$$

则 $f(z) \equiv g(z)$.

有关亚纯函数Nevanlinna 理论的基本概念、基本定理和符号参见文献[8].

2 记号与引理

除了Nevanlinna 理论中的常用记号外, 为了便于叙述, 再介绍几个记号.

1999-01-21 收稿
*国家自然科学基金资助项目(批准号:19601037)

（ⅰ）对不恒为∞的亚纯函数 $f(z)$，$a(z)$及 $b(z)$，记

$$L(f,a,b):=\begin{vmatrix} f & f' & 1\\ a & a' & 1\\ b & b' & 1\end{vmatrix}.$$

（ⅱ）若 $f(z)$为亚纯函数，I 为R^+的具有无穷线性测度的子集，那么符号 $S^*(r,f)(r\in I)$泛指在R^+上有定义，而在 I 上是 $o\{T(r,f)\}(r\to+\infty,\ r\in I\setminus E)$类型的量，其中的 E 为R^+上的某一线性测度有穷的子集(以下出现的集合 E 如无特别说明，就按此含义理解，但每次未必完全相同)．$S^*(r,f)(r\in\mathrm{R}^+)$简记为 $S^*(r,f)$．

（ⅲ）设 $f(z)$，$g(z)$及 $a(z)$均为亚纯函数(其中的 $a(z)$可恒等于∞)，且 $f(z)\not\equiv a(z)$，$g(z)\not\equiv a(z)$．又设 q 为正整数．将方程 $f(z)=a(z)$与 $g(z)=a(z)$的公共根所成点列(每根只记一次)记为 $A=\{z_n\}$，把作为方程 $f(z)=a(z)$与 $g(z)=a(z)$之解的重数相同的那些公共根所成点列(每根只记一次)记为 $\tilde{A}=\{\tilde{z}_n\}$，而将作为方程 $f(z)=a(z)$与 $g(z)=a(z)$之解的重数都不小于 2 的那些公共根所成点列(每根只记一次)记为 $\approx\atop{A}$$=\{\overset{\approx}{z}_n\}$，符号 $\overline{N}_0(r,f=a=g)$，$\overline{N}_E(r,f=a=g)$及 $\overset{\approx}{N}(r,f=a=g)$依次表示 A，$\tilde{A}$ 和 $\overset{\approx}{A}$ 的密指量，且记 $\overline{N}_D(r,f=a=g)=\overline{N}_0(r,f=a=g)-\overline{N}_E(r,f=a=g)$．符号 $N^{q)}(r,f)$表示 $f(z)$的重数不超过 q 的极点点列(考虑重复数)的密指量，$N^{[q]}(r,f)$表示 $f(z)$的重数恰为 q 的极点点列(考虑重复数)的密指量．与 $N^{q)}(r,f)$和 $N^{[q]}(r,f)$相应的精简密指量，则分别以 $\overline{N}^{q)}(r,f)$和 $\overline{N}^{[q]}(r,f)$记之．进一步，记 $N_{q]}(r,f)=N^{q)}(r,f)+q\sum\limits_{j=q+1}^{\infty}\overline{N}^{[j]}(r,f)$，$N_{[q}(r,f)=\sum\limits_{j=q}^{\infty}N^{[j]}(r,f)$，$\overline{N}_{[q}(r,f)=\sum\limits_{j=q}^{\infty}\overline{N}^{[j]}(r,f)$．

下面叙述和证明一些引理，为定理的证明作准备．

引理 1[6] 设 $f(z)$为非常数亚纯函数．如果判别亚纯函数 $a_j(z)(\not\equiv\infty)$ $(j=1,2)$为 $f(z)$的小函数，则 $L(f,a_1,a_2)\not\equiv 0$.

引理 2[6] 设 $F(z)$与 $G(z)$为非常数亚纯函数，它们都以判别亚纯函数 $a_j(z)(\not\equiv\infty)$ $(j=1,\cdots,4)$为小函数，令

$$\Delta=\frac{L(F,a_1,a_2)(F-G)L(G,a_3,a_4)}{(F-a_1)(F-a_2)(G-a_3)(G-a_4)},$$

则

$$m(r,\Delta)=S^*(r,F)+S^*(r,G). \tag{2.1}$$

证　由 $L(\cdot,\cdot,\cdot)$的定义、小函数的定义、对数导数引理及 Nevanlinna 第一基本定理得

$$m\left(r,\frac{L(F,a_1,a_2)}{F-a_j}\right)=S^*(r,F),\quad m\left(r,\frac{L(G,a_3,a_4)}{G-a_{j+2}}\right)=S^*(r,G),\quad j=1,2. \tag{2.2}$$

又

$$\Delta=\left\{\frac{a_2}{a_2-a_1}\cdot\frac{L(F,a_1,a_2)}{F-a_2}+\frac{a_1}{a_1-a_2}\cdot\frac{L(F,a_1,a_2)}{F-a_1}\right\}\cdot\left\{\frac{1}{a_3-a_4}\cdot\frac{L(G,a_3,a_4)}{G-a_3}+\frac{1}{a_4-a_3}\cdot\frac{L(G,a_3,a_4)}{G-a_4}\right\}-\left\{\frac{1}{a_2-a_1}\cdot\frac{L(F,a_1,a_2)}{F-a_2}+\frac{1}{a_1-a_2}\cdot\frac{L(F,a_1,a_2)}{F-a_1}\right\}\cdot$$

$$\left\{\frac{a_3}{a_3-a_4}\circ\frac{L(G,a_3,a_4)}{G-a_3}+\frac{a_4}{a_4-a_3}\circ\frac{L(G,a_3,a_4)}{G-a_4}\right\}. \tag{2.3}$$

由(2.2)和(2.3)式即可导出(2.1)式.

引理 3[6]　设 $f(z)$为非常数亚纯函数,如果判别亚纯函数 $a_j(z)(j=1,\cdots,m,m\geqslant3)$均为其小函数(其中可以有一个是$\infty$),则对于任意取定的 $\varepsilon>0$,存在 $q\in\mathrm{N}$,使得

$$(m-2-\varepsilon)T(r,f)<\sum_{j=1}^{m}N^{q]}\left(r,\frac{1}{f-a_j}\right)\quad(r\in\mathrm{R}^{+}\setminus E_\varepsilon,\ \mathrm{mes}E_\varepsilon<+\infty). \tag{2.4}$$

注　$N\left(r,\frac{1}{f-\infty}\right)$ 和 $N^{q]}\left(r,\frac{1}{f-\infty}\right)$ 分别按 $N(r,f)$ 和 $N^{q]}(r,f)$ 理解.

证　由文献[7] 中定理 1 的证明过程(或文献[2] 中的引理 4)可知,对于任意取定的 $\varepsilon>0$,存在 $q_1\in\mathrm{N}$,使得

$$\left(m-2-\frac{\varepsilon}{2}\right)T(r,f)<\sum_{j=1}^{m}N_{q_1]}\left(r,\frac{1}{f-a_j}\right)+S^{*}(r,f), \tag{2.5}$$

又当整数 $q_2\geqslant q_1$ 时,有

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{m}N_{q_1]}\left(r,\frac{1}{f-a_j}\right)&\leqslant\sum_{j=1}^{m}N^{q_2]}\left(r,\frac{1}{f-a_j}\right)+q_1\sum_{j=1}^{m}N_{[q_2}\left(r,\frac{1}{f-a_j}\right)\leqslant\\&\sum_{j=1}^{m}N^{q_2]}\left(r,\frac{1}{f-a_j}\right)+\frac{q_1}{q_2}\sum_{j=1}^{m}N_{[q_2}\left(r,\frac{1}{f-a_j}\right)\leqslant\\&\sum_{j=1}^{m}N^{q_2]}\left(r,\frac{1}{f-a_j}\right)+\frac{mq_1}{q_2}T(r,f)+S^{*}(r,f).\end{aligned} \tag{2.6}$$

由(2.5)和(2.6)式知,存在充分大正整数 q,使得(2.4)式成立.

引理 4　设 $f(z)$与 $g(z)$为非常数亚纯函数. 若它们都以判别亚纯函数 $b_j(z)$ $(j=1,\cdots,5)$(可有一个恒等于∞)为小函数,且$\{z\mid f(z)=b_j(z)\}=\{z\mid g(z)=b_j(z)\}$ $(j=1,\cdots,5)$, $\overset{\approx}{N}(r,f=b_5=g)\neq S^{*}(r,f)$,则 $f(z)\equiv g(z)$.

证　不妨设 $b_j(z)\not\equiv\infty$ $(j=1,\cdots,5)$(若不然,经过简单变形可化归为这一情形),令

$$f_1=L_0(f),\quad g_1=L_0(g),\quad \alpha=L_0(b_4),\quad \beta=L_0(b_5),$$

其中的 $L_0(w)=\dfrac{w-b_3(z)}{w-b_1(z)}\circ\dfrac{b_2(z)-b_1(z)}{b_2(z)-b_3(z)}$.

由 Valiron 亏值的密度[9] 知,存在异于 0, 1 以及∞的复常数 c,使得 $\alpha(z)\not\equiv c$, $\beta(z)\not\equiv c$,且

$$m\left(r,\frac{1}{f_1-c}\right)=o\{T(r,f_1)\},\quad m\left(r,\frac{1}{g_1-c}\right)=o\{T(r,g_1)\}\quad(r\to+\infty). \tag{2.7}$$

记

$$F(z)=\frac{1}{f_1(z)-c},\quad G(z)=\frac{1}{g_1(z)-c},\quad c_1(z)=0,\quad c_2(z)=c_2=-\frac{1}{c},$$

$$c_3(z)=c_3=\frac{1}{1-c},\quad c_4(z)=a(z)=\frac{1}{\alpha(z)-c},\quad c_5(z)=b(z)=\frac{1}{\beta(z)-c},$$

则易知 $c_j(z)(j=1,\cdots,5)$均为 $F(z)$和 $G(z)$的小函数,且有

$$\{z\mid F(z)=c_j(z)\}=\{z\mid G(z)=c_j(z)\}\quad(j=1,\cdots,5), \tag{2.8}$$

$$\overset{\approx}{N}(r,F=b=G)\neq S^{*}(r,F), \tag{2.9}$$

$$m(r,F)=S^*(r,F),\quad m(r,G)=S^*(r,G). \tag{2.10}$$

由(2.8)式和三密度不等式得

$$S^*(r,F)=S^*(r,G). \tag{2.11}$$

置

$$\Delta_1=\begin{vmatrix} F(F-c_2)(F-c_3) & F' & FF' \\ a(a-c_2)(a-c_3) & a' & aa' \\ b(b-c_2)(b-c_3) & b' & bb' \end{vmatrix}, \tag{2.12}$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix} G(G-c_2)(G-c_3) & G' & GG' \\ a(a-c_2)(a-c_3) & a' & aa' \\ b(b-c_2)(b-c_3) & b' & bb' \end{vmatrix}. \tag{2.13}$$

若 $\Delta_1(z)\circ\Delta_2(z)\equiv 0$, 仅详细讨论 $\Delta_1(z)\equiv 0$ 这一情形(至于 $\Delta_2(z)\equiv 0$ 的情形, 进行完全同样的讨论即可). 这时, 如果 z^* 同时为 $F(z)-b(z)$ 与 $G(z)-b(z)$ 的重零点, 且在 z^* 处 $a(z)$ 和 $b(z)$ 解析, 则由(2.12)式得

$$a'(z^*)b(z^*)[a(z^*)-b(z^*)][b(z^*)-c_2][b(z^*)-c_3]=0. \tag{2.14}$$

若 $a'(z)b(z)[a(z)-b(z)][b(z)-c_2][b(z)-c_3]\not\equiv 0$, 那么由此及(2.14)式得 $\overset{\approx}{N}(r,F=b=G)=S^*(r,F)$, 这与(2.9)式相矛盾. 从而必有 $a'(z)b(z)[a(z)-b(z)][b(z)-c_2]\circ[b(z)-c_3]\equiv 0$, 故 $a'(z)\equiv 0$, 再结合 $\Delta_1(z)\equiv 0$ 得 $b'(z)\equiv 0$. 所以 $a(z)$和 $b(z)$均为常数函数. 由五值定理(定理A)得 $F(z)\equiv G(z)$, 于是 $f(z)\equiv g(z)$.

若 $\Delta_1(z)\Delta_2(z)\not\equiv 0$, 这时令

$$\Phi=\frac{\Delta_1(F-G)^2\Delta_2}{F(F-c_2)(F-c_3)(F-a)(F-b)G(G-c_2)(G-c_3)(G-a)(G-b)}. \tag{2.15}$$

由(2.8)和(2.15)式得 $N(r,\Phi)=S^*(r,F)$, 据(2.10)、(2.11)及(2.15)式又得 $m(r,\Phi)=S^*(r,F)$, 所以 $T(r,\Phi)=S^*(r,F)$. 如果 $\Phi(z)\not\equiv 0$, 则必有 $\overset{\approx}{N}(r,F=b=G)=S^*(r,F)$, 这与(2.9)式相矛盾. 于是 $\Phi(z)\equiv 0$, 由此并结合 $\Delta_1(z)\Delta_2(z)\not\equiv 0$ 得 $F(z)\equiv G(z)$, 故 $f(z)\equiv g(z)$.

引理 5 在引理 4 的条件中仅去掉 $\overset{\approx}{N}(r,f=b_5=g)\neq S^*(r,f)$, 则有

$$T(r,f)\sim T(r,g)\quad (r\to+\infty,\ r\notin E). \tag{2.16}$$

证 不妨设 $b_j(z)\not\equiv\infty(j=1,\cdots,5)$, 令 $J_1=\{r\in\mathrm{R}^+ \mid T(r,f)\geqslant T(r,g)\}$, $J_2=\mathrm{R}^+\setminus J_1$. 当 $\mathrm{mes}J_1=+\infty$时, 如果 $\sum\limits_{j=1}^{5}N_{[2}\left(r,\dfrac{1}{f-b_j}\right)=S^*(r,f)\,(r\in J_1)$, 则结合引理 3 得

$$\left(3-\frac{1}{5}\right)T(r,f)<\sum_{j=1}^{5}N^{1]}\left(r,\frac{1}{f-b_j}\right)<\sum_{j=1}^{5}\overline{N}\left(r,\frac{1}{f-b_j}\right)\quad (r\in J_1\setminus E). \tag{2.17}$$

这时必有 $f(z)\equiv g(z)$(据(2.17)式及 J_1 的定义用反证法即可得), 因而(2.16)式成立. 如果 $\sum\limits_{j=1}^{5}N_{[2}\left(r,\dfrac{1}{f-b_j}\right)\neq S^*(r,f)\,(r\in J_1)$, 则存在 $j_0\in\{1,\cdots,5\}$ 及 $J_1^*\subset J_1$, 使得$\mathrm{mes}J_1^*=+\infty$

且 $N_{[2}\left(r,\frac{1}{f-b_{j_0}}\right)\neq S^*(r,f)\ (r\in J_1^*)$，设 $j_0=5$（否则将 $b_1,\cdots,b_5$ 重排并改变记号），于是有

$$N_{[2}\left(r,\frac{1}{f-b_5}\right)\neq S^*(r,f)\quad (r\in J_1^*).\tag{2.18}$$

与引理4 的证明一样（个别地方作简单修改，但不影响讨论）定义 $F(z)$，$G(z)$及 $\Delta_1(z)$等．当 $\Delta_1(z)\equiv 0$ 时，由(2.18)式与同引理 4 类似的讨论可得 $f(z)\equiv g(z)$，这时(2.16)式成立．当 $\Delta_1(z)\not\equiv 0$时，令

$$\Psi=\frac{\Delta_1}{F(F-c_2)(F-c_3)(F-a)(F-b)},\tag{2.19}$$

则 $\Psi(z)\not\equiv 0$．由(2.8)～(2.10)及(2.19)式得

$$T(r,\Psi)<\sum_{j=1}^{5}N\left(r,\frac{1}{F-c_j}\right)+S^*(r,F),\tag{2.20}$$

$$N(r,1/\Psi)>2N(r,F)+S^*(r,F)=2T(r,F)+S^*(r,F).\tag{2.21}$$

由(2.20)、(2.21)式, Nevanlinna 第一基本定理以及 $F(z)$与 $f(z)$间的关系得

$$2T(r,f)<\sum_{j=1}^{5}N\left(r,\frac{1}{f-b_j}\right)+S^*(r,f),\tag{2.22}$$

当 $f(z)\equiv g(z)$时，(2.16)式成立．而 $f(z)\not\equiv g(z)$时，由(2.22)式得 $T(r,f)<T(r,g)+S^*(r,f)$，故有 $T(r,f)\sim T(r,g)\ (r\to+\infty, r\in J_1\setminus E)$．

同理，当 $\operatorname{mes}J_2=+\infty$时，可得 $T(r,f)\sim T(r,g)(r\to+\infty,\ r\in J_2\setminus E)$．

综上所述，有 $T(r,f)\sim T(r,g)(r\to+\infty, r\notin E)$．

注　引理 4 和 5 亦可由文献[2] 中的引理 1 和 2 导出．

以下引理将在定理的证明中起重要作用．

引理 6　设 $f(z)$与 $g(z)$为非常数亚纯函数．若它们都以判别亚纯函数 $a_j(z)\ (j=1,\cdots,5)$为小函数，且 $a_5(z)\equiv\infty$以及$\{z\mid f(z)=a_j(z)\}=\{z\mid g(z)=a_j(z)\}\ (j=1,\cdots,5)$．记

$$V=\frac{L(f,a_1,a_2)(f-g)L(g,a_3,a_4)}{(f-a_1)(f-a_2)(g-a_3)(g-a_4)}-\frac{L(g,a_1,a_2)(f-g)L(f,a_3,a_4)}{(g-a_1)(g-a_2)(f-a_3)(f-a_4)},$$

则 $T(r,V)=S^*(r,f)$.

证　由三密度不等式知 $S^*(r,f)=S^*(r,g)$，再结合引理 2 得

$$m(r,V)=S^*(r,f).\tag{2.23}$$

由已知条件知 $V(z)$的极点只能产生在 $\prod_{j=1}^{4}(f-a_j)$的零点以及 $f(z)$和 $a_j(z)\ (j=1,\cdots,4)$的极点处，从$L(\cdot,\cdot,\cdot)$的定义容易看出$\prod_{j=1}^{4}(f-a_j)$的零点对$N(r,V)$的贡献为 $S^*(r,f)$．$a_j(z)(j=1,\cdots,4)$的极点对 $N(r,V)$的贡献亦为 $S^*(r,f)$．而若 z_∞为 $f(z)$的 p 阶极点，$g(z)$的 q 阶极点，且在 z_∞处 $a_j(z)(j=1,\cdots,4)$解析，以及$[a_2(z_\infty)-a_1(z_\infty)][a_4(z_\infty)-a_3(z_\infty)]\neq 0$，不妨设 $p\geqslant q$，易见 $z\to z_\infty$时有

$$W_1:=\frac{L(f,a_1,a_2)(f-g)L(g,a_3,a_4)}{(f-a_1)(f-a_2)(g-a_3)(g-a_4)}\sim(a_2-a_1)(a_4-a_3)\left(1-\frac{g}{f}\right)\frac{f'g'}{fg^2},$$

$$W_2 \doteq \frac{L(g,a_1,a_2)(f-g)L(f,a_3,a_4)}{(g-a_1)(g-a_2)(f-a_3)(f-a_4)} \sim (a_4-a_3)(a_2-a_1)\left(1-\frac{g}{f}\right)\frac{f'g'}{fg^2},$$

由此可知 z_∞ 至多为 $W_1(z)$ 和 $W_2(z)$ 的公共单极点, 并且 $W_1(z)$ 和 $W_2(z)$ 在 z_∞ 处具有相同的留数, 故 $V(z)$ 在 z_∞ 处解析. 这表明 $f(z)$ 的极点对 $N(r, V)$ 的贡献也为 $S^*(r,f)$. 于是有

$$N(r,V)=S^*(r,f). \tag{2.24}$$

由(2.23)和(2.24)式得 $T(r,V)=S^*(r,f)$.

3　定理的证明

据三密度不等式可知, 存在 $I\subset\mathrm{R}^+$ ($\mathrm{mes}I=+\infty$) 以及 3 个判别整数 $j_k\in\{1,\cdots,5\}$ ($k=1, 2, 3$), 使得

$$N\left(r,\frac{1}{f-a_{j_k}}\right)>\frac{1}{4}T(r,f)\quad(r\in I)\setminus(k=1,2,3).$$

不妨设 $j_k=k$ ($k=1,2,3$) 而且 $a_5(z)\equiv\infty$ (否则经简单变形可转化为这种情形). 于是有

$$N\left(r,\frac{1}{f-a_k}\right)>\frac{1}{4}T(r,f)\quad(r\in I)\quad(k=1,2,3). \tag{3.1}$$

由引理 5 得

$$T(r,f)\sim T(r,g)\quad(r\to+\infty, r\notin E). \tag{3.2}$$

在上述前提下, 令

$$\phi_k=\frac{L(f,a_3,a_4)(f-a_k)}{(f-a_3)(f-a_4)}-\frac{L(g,a_3,a_4)(g-a_k)}{(g-a_3)(g-a_4)}\quad(k=1,2). \tag{3.3}$$

以下区分两种情形:

情形 1　$\phi_1(z)\not\equiv 0$ 或者 $\phi_2(z)\not\equiv 0$ (这时必有 $f(z)\not\equiv g(z)$).

如果 $\phi_1(z)\not\equiv 0$, 则易见

$$T(r,\phi_1)<\sum_{j=3}^{5}\overline{N}_D(r,f=a_j=g)+S^*(r,f), \tag{3.4}$$

$$N\left(r,\frac{1}{\phi_1}\right)>\overline{N}\left(r,\frac{1}{f-a_1}\right)+S^*(r,f). \tag{3.5}$$

由(3.1)、(3.4)、(3.5)式及 Nevanlinna 第一基本定理得

$$\sum_{j=3}^{5}\overline{N}_D(r,f=a_j=g)>\frac{1}{5}T(r,f)\quad(r\in I). \tag{3.6}$$

整个证明过程中每次出现的 I 未必完全相同, 但后出现者是前一个至多除去一个线性测度为有穷的集合后的余集, 以下不再逐一说明.

如果 $\phi_2(z)\not\equiv 0$, 注意到(3.1)式, 同上面的讨论类似, 可导出(3.6)式.

于是由(3.2)和(3.6)式可知存在 $k^*\in\{3,4,5\}$ 以及 $h_1\in\{f,g\}$, 使得

$$\overline{N}_D(r,f=a_{k^*}=g)>\frac{1}{16}T(r,f)\quad(r\in I). \tag{3.7}$$

$$\overline{N}_{[2}\left(r,\frac{1}{h_1-a_{k^*}}\right)>\frac{1}{33}T(r,h_1)\quad(r\in I). \tag{3.8}$$

进一步, 存在 $q\in\mathrm{N}\setminus\{1\}$ ($2\leqslant q<66$), 使得

$$N^{[q]}\left(r, \frac{1}{h_1 - a_{k^*}}\right) > \frac{1}{49\ 000} T(r, h_1) \quad (r \in I). \tag{3.9}$$

定义函数 $h_2(z)$如下：若 $h_1(z)=f(z)$，则令 $h_2(z)=g(z)$；若 $h_1(z)=g(z)$，则令 $h_2(z)=f(z)$．相应于(3.9)式中的 I，有下述断言：存在整数 $p\geqslant 2$ 以及 $k^{**}\in\{1, \cdots, 5\}\setminus\{k^*\}$，使得

$$N^{[p]}\left(r, \frac{1}{h_2 - a_{k^{**}}}\right) \neq S^*(r, h_2) \quad (r \in I). \tag{3.10}$$

事实上，如若不然，则由引理 3 可得

$$\left(4 - 2 - \frac{1}{18}\right) T(r, h_2) < \sum_{j=1}^{5} N\left(r, \frac{1}{h_2 - a_j}\right) - N\left(r, \frac{1}{h_2 - a_{k^*}}\right) \quad (r \in I). \tag{3.11}$$

由(3.2)、(3.7)及(3.11)式得

$$\left(2 - \frac{1}{18} + \frac{1}{17}\right) T(r, f) < \sum_{j=1}^{5} N\left(r, \frac{1}{f - a_j}\right) \quad (r \in I). \tag{3.12}$$

由于 $f(z)\not\equiv g(z)$，故

$$\sum_{j=1}^{5} N\left(r, \frac{1}{f - a_j}\right) < N\left(r, \frac{1}{f - g}\right) + N(r, f) < T(r, f) + T(r, g) + S^*(r, f).$$

由上式和(3.2)、(3.12)式可得 $T(r, f)=S^*(r, f)(r\in I)$，矛盾．所以上述断言成立．

记

$$b_1(z) = a_{k^*}(z), \quad b_2(z) = a_{k^{**}}(z).$$

将$\{a_1(z), \cdots, a_5(z)\}\setminus\{a_{k^*}(z), a_{k^{**}}(z)\}$中的 3 个函数排列记为 $b_3(z)$，$b_4(z)$，$b_5(z)$，并且使得 $b_4(z)\in\{a_1(z), a_2(z), a_3(z)\}\setminus\{a_{k^*}(z), a_{k^{**}}(z)\}$．从而置 $L_1(w)=(w, b_1(z), b_2(z), b_3(z))$(交比)，记

$$F = L_1(h_1), \quad G = L_1(h_2), \quad d_1(z) = 1, \quad d_2(z) = 0,$$

$$d_3(z) = \infty, \quad d_4(z) = a(z) = L_1(b_4), \quad d_5(z) = b(z) = L_1(b_5),$$

则 $d_j(z)(j=1, \cdots, 5)$均为 $F(z)$与 $G(z)$的小函数，并由(3.1)、(3.9)和(3.10)式得

$$N\left(r, \frac{1}{F - a}\right) > \frac{1}{6} T(r, F) \quad (r \in I), \tag{3.13}$$

$$N^{[q]}\left(r, \frac{1}{F - 1}\right) > \frac{1}{50\ 000} T(r, F) \quad (r \in I), \tag{3.14}$$

$$N^{[p]}(r, 1/G) \neq S^*(r, F) \quad (r \in I). \tag{3.15}$$

又易知

$$\{z \mid F(z) = d_j(z)\} = \{z \mid G(z) = d_j(z)\} \quad (j = 1, \cdots, 5). \tag{3.16}$$

因在这一情形中 $f(z)\not\equiv g(z)$，从而 $F(z)\not\equiv G(z)$，于是由引理 4 知必有

$$\sum_{j=1}^{5} \overset{\approx}{N}(r, F = d_j = G) = S^*(r, F). \tag{3.17}$$

置

$$V_1 = \frac{L(F, 0, 1)(F - G)L(G, a, b)}{F(F - 1)(G - a)(G - b)} - \frac{L(G, 0, 1)(F - G)L(F, a, b)}{G(G - 1)(F - a)(F - b)}, \tag{3.18}$$

$$V_2 = \frac{L(F, 0, a)(F - G)L(G, 1, b)}{F(F - a)(G - 1)(G - b)} - \frac{L(G, 0, a)(F - G)L(F, 1, b)}{G(G - a)(F - 1)(F - b)}, \tag{3.19}$$

$$V_3=\frac{L(F,0,b)(F-G)L(G,1,a)}{F(F-b)(G-1)(G-a)}-\frac{L(G,0,b)(F-G)L(F,1,a)}{G(G-b)(F-1)(F-a)}. \tag{3.20}$$

由引理5得

$$T(r,V_j)=S^*(r,F)\quad(j=1,2,3). \tag{3.21}$$

设 z_0 为 $F(z)$的单重零点, $G(z)$的 p 重零点, 且 $a(z_0)[a(z_0)-1]$ 和 $b(z_0)[b(z_0)-1]$ 均为有穷的非零复数, 并设 $F(z)$与 $G(z)$在 z_0 处的 Laurent 展开式分别为

$$F(z)=\mu(z-z_0)+\mu_1(z-z_0)^2+\cdots,\quad \mu\neq0,$$

$$G(z)=\nu(z-z_0)^p+\nu_1(z-z_0)^{p+1}+\cdots,\quad \nu\neq0,$$

则

$$V_1(z_0)=(p-1)\mu\left(\frac{b'(z_0)}{b(z_0)}-\frac{a'(z_0)}{a(z_0)}\right)+p\mu^2\left(\frac{1}{a(z_0)}-\frac{1}{b(z_0)}\right), \tag{3.22}$$

$$V_2(z_0)=(p-1)\mu\frac{b'(z_0)}{b(z_0)}+p\mu^2\frac{b(z_0)-1}{b(z_0)}, \tag{3.23}$$

$$V_3(z_0)=(p-1)\mu\frac{a'(z_0)}{a(z_0)}+p\mu^2\frac{a(z_0)-1}{a(z_0)}, \tag{3.24}$$

由(3.22)~(3.24)式得

$$V_2(z_0)-V_3(z_0)-V_1(z_0)=0. \tag{3.25}$$

由(3.15)、(3.17)、(3.21)及(3.25)式得

$$V_2(z)-V_3(z)-V_1(z)\equiv0. \tag{3.26}$$

设 z_1 为 $F(z)-1$ 的 q 重零点, $G(z)-1$ 的单重零点, 且 $1-a(z_1)$与 $1-b(z_1)$均为有穷非零复数, 并设 $F(z)$和 $G(z)$在 z_1 处的 Laurent 展开式分别为

$$F(z)=1+\mu^*(z-z_1)^q+\mu_1^*(z-z_1)^{q+1}+\cdots,\quad \mu^*\neq0,$$

$$G(z)=1+\nu^*(z-z_1)+\nu_1^*(z-z_1)^2+\cdots,\quad \nu^*\neq0,$$

则有

$$V_1(z_1)=(1-q)\nu^*\frac{a'(z_1)-b'(z_1)+a(z_1)b'(z_1)-b(z_1)a'(z_1)}{[1-a(z_1)][1-b(z_1)]}+$$
$$q\nu^*\frac{a(z_1)-b(z_1)}{[1-a(z_1)][1-b(z_1)]}, \tag{3.27}$$

$$V_2(z_1)=(1-q)\nu^*\frac{a'(z_1)[b(z_1)-1]}{[1-a(z_1)][1-b(z_1)]}+q\nu^*\frac{a(z_1)[b(z_1)-1]}{[1-a(z_1)][1-b(z_1)]}, \tag{3.28}$$

$$V_3(z_1)=(1-q)\nu^*\frac{b'(z_1)[a(z_1)-1]}{[1-a(z_1)][1-b(z_1)]}+q\nu^*\frac{b(z_1)[a(z_1)-1]}{[1-a(z_1)][1-b(z_1)]}. \tag{3.29}$$

由(3.27)~(3.29)式得

$$V_3(z_1)-V_2(z_1)-V_1(z_1)=0. \tag{3.30}$$

由(3.14)、(3.17)、(3.21)及(3.30)式(通过反证)可得

$$V_3(z)-V_2(z)-V_1(z)\equiv0. \tag{3.31}$$

从(3.26)和(3.31)式得

$$V_1(z)\equiv0,\quad V_3(z)-V_2(z)\equiv0. \tag{3.32}$$

情形 1.1

$$\overline{N}_E(r, F=a=G)\neq S^*(r, F). \tag{3.33}$$

设 $\hat{z}$ 为 $F(z)-a(z)$ 和 $G(z)-a(z)$ 的公共单零点，而且 $a(\hat{z})[a(\hat{z})-1]$ 与 $a(\hat{z})-b(\hat{z})$ 都为非零有穷复数．设在 $\hat{z}$ 处 $F(z)-a(z)$ 和 $G(z)-a(z)$ 的 Laurent 展开式分别为

$$F(z)-a(z)=\mu(z-\hat{z})+\mu_1(z-\hat{z})^2+\cdots,\quad \mu\neq 0,$$

$$G(z)-a(z)=\nu(z-\hat{z})+\nu_1(z-\hat{z})^2+\cdots,\quad \nu\neq 0,$$

则 $V_1(\hat{z})=-\dfrac{(\mu-\nu)^2}{a(\hat{z})[a(\hat{z})-1]}$，又由(3.32)式有 $V_1(\hat{z})=0$，从而有 $\mu=\nu$，这表明 $\hat{z}$ 至少为 $F(z)-G(z)$ 的 2 级零点，由此以及(3.16)、(3.17)、(3.19)～(3.21)和(3.33)式得

$$V_2(z)\equiv 0,\quad V_3(z)\equiv 0. \tag{3.34}$$

进而由(3.23)、(3.24)及(3.34)式得

$$\frac{a'(z_0)}{a(z_0)-1}-\frac{b'(z_0)}{b(z_0)-1}=0. \tag{3.35}$$

由(3.15)、(3.17)和(3.35)式得 $\dfrac{a'(z)}{a(z)-1}\equiv\dfrac{b'(z)}{b(z)-1}$，从而 $\dfrac{b(z)-1}{a(z)-1}\equiv c$（有限复常数）．记

$$F_1=\frac{F-1}{a-1},\quad G_1=\frac{G-1}{a-1}, \tag{3.36}$$

则 $0, 1, c, \infty$ 以及 $(1-a(z))^{-1}$ 均为 $F_1(z)$ 与 $G_1(z)$ 的小函数，而且对于任意 $h^*\in\{0, 1, c, \infty, (1-a(z))^{-1}\}$ 有

$$\{z \mid F_1(z)=h^*(z)\}=\{z \mid G_1(z)=h^*(z)\}. \tag{3.37}$$

由(涉及常数的)Nevanlinna 第二基本定理以及(3.37)式得

$$2T(r, F_1)+2T(r, G_1)<2\left\{\overline{N}\left(r, \frac{1}{F_1}\right)+\overline{N}\left(r, \frac{1}{F_1-1}\right)+\overline{N}\left(r, \frac{1}{F_1-c}\right)+\overline{N}(r, F_1)\right\}+ S^*(r, F_1)+S^*(r, G_1). \tag{3.38}$$

又易知 $S^*(r, F_1)=S^*(r, G_1)$，由此并结合(3.15)和(3.16)式得

$$\overline{N}\left(r, \frac{1}{G_1-(1-a)^{-1}}\right)\neq S^*(r, F_1)+S^*(r, G_1). \tag{3.39}$$

由(3.37)～(3.39)式即可得 $F_1(z)\equiv G_1(z)$，从而有 $\phi_1(z)\equiv 0$ 及 $\phi_2(z)\equiv 0$，这与情形 1 的前提相矛盾.

情形 1.2　$\overline{N}_E(r, F=a=G)=S^*(r, F)$．这时有

$$\overline{N}_D(r, F=a=G)=\overline{N}\left(r, \frac{1}{F-a}\right)+S^*(r, F). \tag{3.40}$$

由(3.13)和(3.40)式知存在 $H\in\{F, G\}$ 以及整数 $p_1\geqslant 2$，使得

$$N^{[p_1]}\left(r, \frac{1}{H-a}\right)\neq S^*(r, H)\quad (r\in I). \tag{3.41}$$

下面仅讨论 $H(z)=F(z)$ 的情形(另一情形的讨论完全类似)，有

$$N^{[p_1]}\left(r, \frac{1}{F-a}\right)\neq S^*(r, F)\quad (r\in I). \tag{3.42}$$

若 $\tilde{z}$ 为 $F(z)-a(z)$ 的 p_1 重零点，$G(z)-a(z)$ 的单重零点，且 $a(\tilde{z})[a(\tilde{z})-1]$ 和 $a(\tilde{z})-$

$b(\tilde z)$均为有穷非零复数,在 $\tilde z$ 处$F(z)-a(z)$与 $G(z)-a(z)$的 Laurent 展开式分别设为

$$F(z)-a(z)=\mu(z-\tilde z)^{p_1}+\mu_1(z-\tilde z)^{p_1+1}+\cdots,\quad \mu\neq 0,$$

$$G(z)-a(z)=\tilde\nu(z-\tilde z)+\tilde\nu_1(z-\tilde z)^2+\cdots,\quad \tilde\nu\neq 0,$$

则有

$$V_1(\tilde z)=\frac{\tilde\nu a'(\tilde z)-p_1\tilde\nu[a'(\tilde z)+\tilde\nu]}{a(\tilde z)[a(\tilde z)-1]},\tag{3.43}$$

$$V_2(\tilde z)=-\frac{p_1a(\tilde z)\tilde\nu\{b'(\tilde z)-[a'(\tilde z)+\tilde\nu][1-b(\tilde z)]-a(\tilde z)b'(\tilde z)\}}{a(\tilde z)[a(\tilde z)-1][a(\tilde z)-b(\tilde z)]}+\frac{\tilde\nu a(\tilde z)[b'(\tilde z)-a'(\tilde z)+b(\tilde z)a'(\tilde z)-a(\tilde z)b'(\tilde z)]}{a(\tilde z)[a(\tilde z)-1][a(\tilde z)-b(\tilde z)]},\tag{3.44}$$

$$V_3(\tilde z)=-\frac{\tilde\nu[a(\tilde z)-1][b(\tilde z)a'(\tilde z)-a(\tilde z)b'(\tilde z)]}{a(\tilde z)[a(\tilde z)-1][a(\tilde z)-b(\tilde z)]}+\frac{p_1\tilde\nu[a(\tilde z)-1]\{[a'(\tilde z)+\tilde\nu]b(\tilde z)-a(\tilde z)b'(\tilde z)\}}{a(\tilde z)[a(\tilde z)-1][a(\tilde z)-b(\tilde z)]}.\tag{3.45}$$

又由(3.32)式知

$$V_1(\tilde z)=0,\quad V_2(\tilde z)=V_3(\tilde z).\tag{3.46}$$

由(3.43)~(3.46)式得

$$a(\tilde z)[1-a(\tilde z)]b'(\tilde z)=0.\tag{3.47}$$

由(3.17)、(3.42)和(3.47)式得 $a(z)[1-a(z)]b'(z)\equiv 0$, 从而 $b'(z)\equiv 0$, 故 $b(z)\equiv b_0$(常数). 注意到(3.42)式,与情形 1.1 中后半段的讨论类似可导出矛盾.

综合以上讨论知情形 1 不会发生.

情形 2 $\phi_1(z)\equiv 0$ 且 $\phi_2(z)\equiv 0$. 这时由(3.3)式和引理 1 得$\frac{f-a_1}{f-a_2}\equiv\frac{g-a_1}{g-a_2}$, 从而有 $f(z)\equiv g(z)$.

致谢 作者对杨乐教授的指点与关怀表示衷心感谢.

参 考 文 献

1 Nevanlinna R. Le théorème de Picard-Borel et la théorie des fonctions méromorphes. Paris: Gauthiers-Villars, 1929

2 张庆德. 亚纯函数关于慢增长函数的唯一性定理. 数学学报, 1993, 36(6): 826~833

3 Toda N. Some generalizations of the unicity theorem of Nevanlinna. Proc Japan Acad, Ser A, 1993, 69(3): 61~65

4 朱经浩. 亚纯函数唯一性定理的一个推广. 数学学报, 1987, 30(5): 648~652

5 Li B Q. Uniqueness of entire functions sharing four small functions. Amer J Math, 1997, 119: 841~858

6 李玉华. 具有四个有穷的 IM 公共小函数的整函数. 数学学报, 1998, 41(2): 249~260

7 Steinmetz N. Eine Verallgemeinerung des zweiten Navanlinnaschen Hauptsatzes. J Reine Angew Math, 1986, 368: 134~141

8 Yang L. Value Distribution Theory. Berlin: Springer-Verlag; Beijing: Science Press, 1993

9 Hayman W K. Research Problems in Function Theory. London: Athlone Press (University of London), 1967