中国科学 E 辑: 信息科学
2007 年 第 37 卷 第 8 期: 979~988
http://www.scichina.com

《中国科学》杂志社
SCIENCE IN CHINA PRESS

Vicsek 模型的连通与同步

刘志新 郭 雷*

(中国科学院数学与系统科学研究院, 北京 100080)

摘要 多个体系统的集体行为是复杂系统研究的重要切入点, 而 Vicsek 模型是研究多个体系统的一个基本模型, 它具备了复杂系统的一些关键特征, 如动态行为、局部相互作用和变化的邻居关系等. 该模型看起来简单, 但模型中的非线性耦合关系使得问题的完整理论分析非常困难. Jadbabaie 等人对模型中的线性化的角度更新方程进行了分析, 并证明了如果由所有个体的位置形成的邻居图满足某种连通性条件时, 系统最终会同步. 该文引起了大量相关问题的后续研究, 但一个未解决的关键问题是: 系统究竟在什么条件下才具有这种连通性? 文中将给出一个保证 Vicsek 模型同步的充分条件, 该条件完全加在系统参数上. 进一步, 将通过反例说明当初始角度的范围为[0, 2π)时, 邻居图的连通性不再是动态 Vicsek 模型同步的充分条件, 从而揭示了 Vicsek 模型与其线性化模型之间的根本差别.

关键词 **Vicsek 模型** **同步** **随机矩阵** **连通** **邻居图**

近年来, 多个体系统的集体行为引起了越来越多的关注, 比如鸟群、鱼群等. 事实上, 集体行为广泛存在于生物、物理、社会经济及其他人造系统中, 通过建模、仿真或数学分析, 生物学家、物理学家、数学家, 计算机学家和系统控制理论专家试图理解鱼群、鸟群及其他动物群体在没有中央控制与全局信息的情形下如何达到飞行或游行方向的一致.

自然界中的鸟群或鱼群等多个体系统一般存在着两种平衡且相互对立的行为 [1]: ⅰ)期望向邻近个体的中心靠拢; ⅱ)避免与相邻的个体发生碰撞. 后者的作用是为每个个体保留一定的活动空间, 比如鸟类为拍打翅膀提供足够的空间; 前者主要是逃避捕食者、顺利地进行迁徙以及有更多的机会寻找食物等群体行为的需要. Reynolds[2]按照自然界中鸟群的这些特点较早地对鸟群、 鱼群等系统的群体行为进行了计算机仿真, 并提出了著名的Boid模型. Reynolds按照如下规则进行仿真: a) 避免碰撞: 避免与最近的个体发生碰撞; b) 速度一致: 尽量与邻居范围内个体的速度相匹配; c) 靠向中心: 尽量与附近的个体靠近.

比Boid模型简单但又不失本质的模型是Vicsek模型 [3]. Vicsek等人于 1995 年从统计力 学的角度对其进行了研究, 他们引入该模型的目的是研究非平衡系统中的聚类、运送与相变行为.

收稿日期: 2006-07-24; 接受日期: 2007-04-23
国家自然科学基金资助项目(批准号: 60221301, 60334040)
* 联系人, E-mail: lguo@amss.ac.cn

Vicsek模型是由 N 个自治的个体组成的离散时间系统, 每个个体在平面中以恒定的速率运行, 其角度是邻域范围内所有个体角度的矢量平均, 另外还受一个随机噪声的影响. Vicsek模型是研究多个体系统的一个基本模型, 它具备了复杂多个体系统的一些关键特征, 如动态行为、局部相互作用和变化的邻居关系等. Vicsek等人 [3]通过仿真发现了一些有趣的结论: 当群体的密度较大且噪声较小时, 系统中所有个体将按照某个共同的方向飞行, 这种现象称为同步. 该现象引起了数学家、控制理论专家的兴趣, 他们试图对该模型的这种一致性行为给出严格的理论分析. Jadbabaie等人 [4]研究了Vicsek模型中的线性化角度更新方程, 并引入了由所 有个体的位置形成的邻居图序列, 这些图都是无向图. 他们证明了如果这些邻居图按照某种"一致"的方式联合连通时, 系统将会同步. 随后, 文献 [5]考虑了相同的线性化模型, 但将角度离散化为有限个角度, 指出邻居图的无穷次连通可保证系统同步. 但一个未解决的关键问题是: 系统究竟在什么条件下才具有这种所需要的连通性? 事实上, 模型中复杂的非线性关系使得连通性条件的验证非常困难, 下一节将对此进行解释. 避免这种连通性条件的一种方式是对Vicsek模型进行修改, 将其中的局部相互作用变为全局的方式, 相互作用的权值是某个随距离衰减的函数 [6]. 另一种保证所需的连通性条件的方式是在随机框架下对大量个体进行研究, 其中所有个体的初始状态是均匀分布的 [7].

本文将在确定性框架下研究原始Vicsek模型, 给出系统同步的充分条件, 该条件完全加在初始状态与系统参数上. 据作者所知, 这是首次获得Vicsek模型同步的完整的理论结果. 进一步, 我们将通过两个反例说明当初始角度的范围为 $[0,2\pi)$ 时, 邻居图的这种"一致"连通性不再是Vicsek模型同步的充分条件, 从而揭示了Vicsek模型与其线性化模型之间存在着根本的不同. 本文部分结果曾在文献 [8]中报告, 但没有给出详细证明.

1 主要定理

Vicsek模型 [3]是由 N 个自治的个体(或叫做子系统或叫粒子)组成的离散时间系统. 它们在平面中以大小相同的速率 v 运动, 每个个体的角度按照邻居角度的矢量平均来更新. 个体 i 的"邻居"由以该个体的当前位置 $(x_i(t), y_i(t))$ 为中心, 与该个体的Euclid距离小于正常数 r 的个体组成. 用 $\mathcal{N}_i(t)$ 表示个体 i 在时刻 t 的邻居, 即

$$\mathcal{N}_i(t) = \{j \mid d_{ij}(t) < r\},$$

其中 $d_{ij}(t) = \sqrt{(x_i(t)-x_j(t))^2 + (y_i(t)-y_j(t))^2}$. 显然, 每个个体都是自身的"邻居". 每个个体在平面中按照恒定的正速率 v 运动, 因而每个个体的位置按照下面的方式进行更新:

$$\begin{cases} x_i(t+1) = x_i(t) + v\cos\theta_i(t), \\ y_i(t+1) = y_i(t) + v\sin\theta_i(t), \end{cases} \quad i = 1, 2, \cdots, N, \tag{1.1}$$

其中 $\theta_i(t)$ 为个体 i 在时刻 t 的角度, 它按照下面的方式进行更新

$$\theta_i(t+1) = \arctan\frac{\sum_{j\in\mathcal{N}_i(t)} \sin\theta_j(t)}{\sum_{j\in\mathcal{N}_i(t)} \cos\theta_j(t)}. \tag{1.2}$$

注意到上面系统的动态行为完全由初始状态(初始角度和位置)、邻域半径 r 和运动速率 v 确定. 进一步, 每个个体的邻居由其他个体的位置决定, 每个个体的角度由邻居的角度决定; 同样, 角度也会影响位置, 因此所有个体的位置和角度之间形成复杂的非线性关系, 这使得问

题的理论分析比较困难.

很显然, 由Vicsek模型描述的多个体系统形成一个动态网络, 图论中的一些基本概念对问题的分析是有帮助的. 注意到每个个体的邻居会随时间而变化, Jadbabaie等人 [4]用无向图序列 $\mathcal{G}_t=\{\mathcal{V},\varepsilon_t\}$ 来描述个体间的相互作用, 其中 $\mathcal{V}=\{1,2,\cdots,N\}$ 为所有个体的集合, ε_t 为随时间变化的边集合. 边是这样形成的: 如果个体 i 与 j 在时刻 t 的距离小于 r, 则在它们之间连一条边, 记做 $(i,j)\in\varepsilon_t$. 一个连通图是指该图中的任何两个节点之间总存在一条路径. 为方便分析, 将公式(1.2)写成下面等价的"拟"线性形式:

$$\tan\theta_i(t+1)=\sum_{j\in\mathcal{N}_i(t)}\frac{\cos\theta_j(t)}{\sum_{k\in\mathcal{N}_i(t)}\cos\theta_k(t)}\tan\theta_j(t),$$

进而可写成矩阵形式为

$$\tan\theta(t+1)=A(t)\tan\theta(t), \tag{1.3}$$

其中 $\tan\theta(t)\triangleq(\tan\theta_1(t),\cdots,\tan\theta_N(t))^{\mathrm{T}}$, $A(t)\triangleq(a_{ij}(t))$ 为图 $\mathcal{G}_t$ 的加权平均矩阵

$$a_{ij}(t)=\begin{cases}\dfrac{\cos\theta_j(t)}{\sum_{k\in\mathcal{N}_i(t)}\cos\theta_k(t)}, & 若(i,j)\in\varepsilon_t;\\ 0, & 否则.\end{cases} \tag{1.4}$$

为分析Vicsek模型的同步性, Jadbabaie等人 [4]研究了公式(1.2)的线性化形式

$$\theta_i(t+1)=\frac{1}{n_i(t)}\sum_{j\in\mathcal{N}_i(t)}\theta_j(t), \tag{1.5}$$

其中 $n_i(t)$ 是集合 $\mathcal{N}_i(t)$ 内元素的个数. 相应地, 角度更新可写成下面的矩阵公式:

$$\theta(t+1)=\tilde{A}(t)\theta(t), \tag{1.6}$$

其中 $\theta(t)=(\theta_1(t),\cdots,\theta_N(t))^{\mathrm{T}}$, 矩阵 $\tilde{A}(t)$ 称为平均矩阵, 其元素为

$$\tilde{a}_{ij}(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{n_i(t)}, & 若\ i\ 与\ j\ 在时刻\ t\ 为邻居;\\ 0, & 否则.\end{cases} \tag{1.7}$$

本文的目的是分析Vicsek模型的同步性, 及其与邻居图的连通性之间的关系, 我们需要下面的关于同步的定义(见文献 [4]).

定义 1.1　上面的多个体系统达到同步是指所有个体的角度满足

$$\lim_{t\to\infty}\theta_i(t)=\theta,\quad i=1,\cdots,N,$$

其中 θ 可能依赖于初始状态 $\{\theta_i(0),x_i(0),y_i(0),i=1,\cdots,N\}$ 与系统参数 v,r.

下面的两个定理将对 Vicsek 模型及其线性化模型建立同步的条件, 这些条件完全加在初始状态与系统参数 r,v 与 N 上.

定理 1.1　对于由(1.1)和(1.2)式描述的 Vicsek 模型, 假设系统在初始时刻的邻居关系图 $\mathcal{G}_0=\{\mathcal{V},\varepsilon_0\}$ 是连通的, 初始角度的范围为 $\theta_i(0)\in(-\pi/2,\pi/2)$, 则在下列关于速率 v 的条件下, 系统会同步:

$$v \leqslant \frac{d}{\Delta_0}\left(\frac{\cos\bar{\theta}}{N}\right)^N, \tag{1.8}$$

其中 N 是系统中的个体总数, 而

$$\bar{\theta} = \max_i |\theta_i(0)|,\ d = r - \max_{i,j\in\varepsilon_0} d_{ij}(0),$$
$$\Delta_0 = \max_{i,j}\{\tan\theta_i(0) - \tan\theta_j(0)\}.$$

注 1.1 一般来说, 不能将初始角度的限制区间 $(-\pi/2, \pi/2)$ 拓展到 $[0,2\pi)$. 我们将在下节的例 2.1 中进行说明. 但对于线性化的 Vicsek 模型, 这样的拓展是可行的, 下面的定理对此给予了证明.

定理 1.2 对于线性化模型(1.1)和(1.5), 设初始角度的范围为 $\theta_i(0)\in[0,2\pi)$, 并且初始的邻居关系图 $\mathcal{G}_0$ 是连通的, 则当速率 v 满足下列条件时, 系统最终是同步的:

$$v \leqslant \frac{d}{2\pi}\left(\frac{1}{N}\right)^N, \tag{1.9}$$

上式中 d 的含义见定理 1.1.

在第 3 节中, 我们将只给出定理 1.1 的证明, 因为定理 1.2 的证明与之相似, 并且更简单, 详见文献 [9]. 上面的两个定理说明, 如果速率适当地小, 则系统会同步. 值得指出的是, 对于由Vicsek模型描述的多个体系统, 当 $\theta_i(0)\in(-\pi/2,\pi/2)$ 时, 对系统参数不加任何约束, 系统仍有某种自收敛性. 下面的命题对此现象进行了陈述, 这是由文献 [8,10]独立发现的, 但两者的证明完全不同. 我们的证明不借助于文献 [11]中关于无穷矩阵乘积的结果, 该方法对处理矩阵乘积不适用的非线性情形具有潜在的优点, 见文献 [9].

命题 1.1 对于 Vicsek 模型(1.1)和(1.2), 设初始角度的范围为 $\theta_i(0)\in(-\pi/2,\pi/2)$ $(i\in V)$, 则无论 v 与 r 如何选取, 总存在 θ_i $(i\in V)$, 使得

$$\lim_{t\to\infty}\theta_i(t) = \theta_i,$$

并且若 $\theta_i \neq \theta_j$, 则当时间充分大后, 个体 i 与 j 永远不是邻居.

2 反例

显然, 无论是原始Vicsek模型(1.1)和(1.2), 还是线性化模型(1.1)和(1.5), 连通都不是同步的必要条件. 一个简单的例子是系统中每个个体在 $t=0$ 时刻的角度相同, 但初始时刻的邻居图不连通. 此时, 很容易看出系统会同步, 但相应的邻居图永远不会连通. Jadbabaie等人 [4]指出, 如果系统的邻居图按照某种“一致”的方式联合连通时, 则线性化Vicsek模型将会同步. 但对于初始角度限制在[0, 2π)的Vicsek模型, 该结论不再正确. Han等人 [12]给出了系统运动速率 v 为 0 时的反例. 对于 $v>0$ 的Vicsek模型, 本节将通过两个反例来进一步说明邻居图的动态行为与同步之间的一些有趣现象.

例 2.1 设 $N=12$, 所有个体均匀分布在单位圆周上, 角度具有某种对称性. 如下面的图 1 所示. 所有个体的具体位置和角度为

$$(x_i(0), y_i(0)) = \left(\cos\frac{(i-1)\pi}{6},\ \sin\frac{(i-1)\pi}{6}\right); \tag{2.1}$$

$$\theta_i(0)=\left\{[16-i+3\cdot(-1)^i]\frac{\pi}{6}\right\}\mathrm{mod}(2\pi),\quad i=1,\cdots,12. \tag{2.2}$$

进一步假设速率满足 $0<v\leqslant 0.1$，并且邻域半径取为 $r=0.8$.

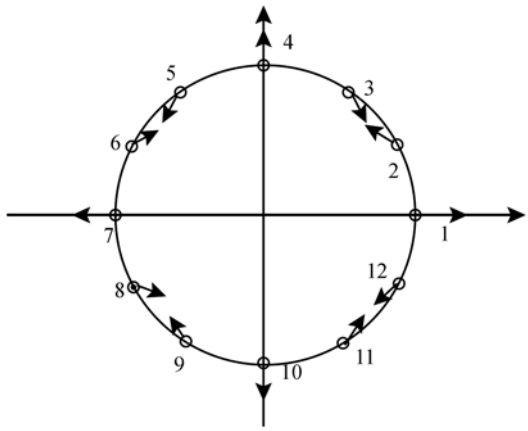

图 1

对于 Vicsek 模型，我们要证明下面的事实：邻居图在每个时刻都是连通的，但每个个体的角度会在两个不同的角度之间变化，两者的差为 π，因此角度不具有收敛性. 进一步，无论速率多小，系统都不会同步.

首先，在 $t=0$ 时刻，根据由(2.1)式确定的初始位置,有

$$\begin{aligned}
d_{ij}^2(0)&=(x_i(0)-x_j(0))^2+(y_i(0)-y_j(0))^2\\
&=\left(-2\sin\frac{(i+j-2)\pi}{12}\sin\frac{(i-j)\pi}{12}\right)^2+\left(2\cos\frac{(i+j-2)\pi}{12}\sin\frac{(i-j)\pi}{12}\right)^2\\
&=4\sin^2\frac{(i-j)\pi}{12}\\
&=\begin{cases}\leqslant 4\sin^2\dfrac{\pi}{12}\approx 0.268<r^2, & \text{如果}\ |j-i|=0,1,11;\\ \geqslant 4\sin^2\dfrac{\pi}{6}=1>r^2, & \text{否则}.\end{cases}
\end{aligned}$$

因而，可知每个个体有包含自身在内的 3 个邻居，此时邻居图是连通的.

其次，根据公式(1.2)，每个个体在 $t=1$ 时刻的角度被更新为

$$\begin{aligned}
\theta_i(1)&=\arctan\frac{\sin\theta_{i-1}(0)+\sin\theta_i(0)+\sin\theta_{i+1}(0)}{\cos\theta_{i-1}(0)+\cos\theta_i(0)+\cos\theta_{i+1}(0)}\\
&=\arctan\frac{\left(1-2\cos\dfrac{\pi}{6}\right)\sin\dfrac{[16-i+3\cdot(-1)^i]\pi}{6}}{\left(1-2\cos\dfrac{\pi}{6}\right)\cos\dfrac{[16-i+3\cdot(-1)^i]\pi}{6}}\\
&=(\theta_i(0)+\pi)\mathrm{mod}(2\pi),
\end{aligned} \tag{2.3}$$

这说明在 $t=1$ 时刻角度被反向. 进一步，根据位置更新式(1.1)，有

$$\begin{pmatrix} x_i(1) \\ y_i(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\dfrac{(i-1)\pi}{6} \\ \sin\dfrac{(i-1)\pi}{6} \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} \cos\dfrac{(16-i+3\cdot(-1)^i)\pi}{6} \\ \sin\dfrac{(16-i+3\cdot(-1)^i)\pi}{6} \end{pmatrix},$$

因而 $t=1$ 时刻个体 i 与 $j(1\leqslant i, j\leqslant 12)$ 之间的距离为

$$\begin{aligned} d_{ij}^2(1) &= \left\{x_i(0)-x_j(0)+v(\cos\theta_i(0)-\cos\theta_j(0))\right\}^2 \\ &\quad + \left\{y_i(0)-y_j(0)+v(\sin\theta_i(0)-\sin\theta_j(0))\right\}^2 \\ &= 4\sin^2\frac{(i-j)\pi}{12} + 4v^2\sin^2\frac{\theta_i(0)-\theta_j(0)}{2} \\ &\quad - 8v\sin\frac{(i-j)\pi}{12}\sin\frac{\theta_i(0)-\theta_j(0)}{2}\cos\frac{[10-2(i+j)+3(-1)^i+3(-1)^j]\pi}{12}. \end{aligned}$$

据此及速率的假设 $0<v\leqslant 0.1$，我们来证明 $t=1$ 时刻的邻居图保持不变. 分 3 种情形来考虑:

情形 1: 如果 $|i-j|=0,1,11$，则有

$$\begin{aligned} d_{ij}^2(1) &\leqslant 4\sin^2\frac{\pi}{12} + 4v^2\sin^2\frac{5\pi}{12} + 8v\sin\frac{\pi}{12}\sin\frac{5\pi}{12}\cos 0 \\ &= 4\left(\sin\frac{\pi}{12} + v\sin\frac{5\pi}{12}\right)^2 \leqslant 0.51 < r^2. \end{aligned}$$

情形 2: 如果 $|i-j|$ 为偶数，且 $|i-j|\geqslant 2$，则有

$$\begin{aligned} d_{ij}^2(1) &= 4(1+v^2)\sin^2\frac{(i-j)\pi}{12} + 8v\sin^2\frac{(i-j)\pi}{12}\cos\frac{[10-2(i+j)\pm 6]\pi}{12} \\ &\geqslant (4-8\times 0.1)\sin^2\frac{(i-j)\pi}{12} \geqslant (4-0.8)\sin^2\frac{\pi}{6} = 0.8 > r^2. \end{aligned}$$

情形 3: 如果 $|i-j|$ 为奇数，且 $|i-j|\neq 1,11$，则有

$$d_{ij}^2(1) \geqslant 4\sin^2\frac{3\pi}{12} + 4v^2\cos^2\frac{5\pi}{12} - 8v\sin\frac{5\pi}{12}\cos\frac{3\pi}{12} \geqslant 2-0.4\sqrt{2} > r^2.$$

显然，$t=1$ 时刻邻居图仍然是连通的. 重复上面的过程，可知邻居图将会在每个时刻都是连通的，但从一个时刻到下一时刻，角度会反向，因而系统不会同步. 同时，通过证明可以看到无论速率 v 多小，系统都不会同步.

对于初始角度的范围为$(-\pi/2, \pi/2)$的Vicsek模型，命题 1.1 说明不管相应的邻居图是否连通，系统总具有某种收敛性质；进一步，如果邻居图具有某种连通性，则系统会同步 [8]. 在这种情形下，邻居图经过充分长的时间后可能会保持不变. 但下面的例子将说明当初始角度的范围为$[0, 2\pi)$时，邻居图可能时刻在变，但保持了联合连通性.

例 2.2 设 $N=24$, $r=0.3$, $v=0.1$；所有个体均匀分布在单位圆周上，角度具有某种对称性，见下面的图 2. 它们的具体位置和角度为

$$(x_i(0), y_i(0)) = \left(\cos\frac{(i-1)\pi}{12}, \sin\frac{(i-1)\pi}{12}\right);$$

$$\theta_i(0) = \left\{\frac{\pi}{12}[17+6\cdot(-1)^i+i]\right\}\mathrm{mod}(2\pi),\ i=1,\cdots,24.$$

与例 2.1 相似, 很容易证明在 $t=2k$ (k 为一正整数)时刻, 每个个体都有包含自身在内的 3 个邻居, 此时的邻居图是连通的; 但在 $t = 2k+1$ 时刻, 每个个体的邻居只有它自身, 邻居图不再连通. 因而, 邻居图在每个时刻都会变化, 但保持了联合连通性. 该例所描述的系统也不同步.

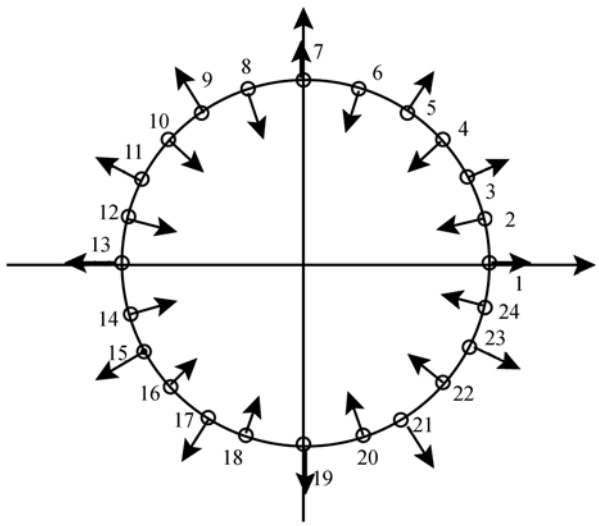

图 2

3　定理 1.1 的证明

为了证明定理 1.1, 首先需要一些关于随机矩阵的基本知识 [11,13].

矩阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 称为非负(正)的, 如果它的所有元素满足 $a_{ij}\geqslant(>)0$, 记作 $A\geqslant(>)0$; 进一步, 非负矩阵 $\boldsymbol{A}$ 称为随机矩阵, 如果其行和满足 $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}=1,\ i=1,\cdots,n$. 对任意的两个矩阵 $A=(a_{ij})$ 与 $B=(b_{ij})$, $A\geqslant(>)B$ 意味着 $a_{ij}\geqslant(>)b_{ij}$; 矩阵 $A=(a_{ij})$具有连通的性质, 是指对于任意的 p 与 q ($1\leqslant p,\ q\leqslant n$), 总存在整数序列 $k_1,\ k_2,\ \cdots,\ k_{m-1},\ k_m$, $1\leqslant m\leqslant n$, 满足 $k_1=p$, $k_m=q$, 使得矩阵的元素 $a_{k_1k_2}, a_{k_2k_3},\cdots, a_{k_{m-1}k_m}$ 都是非零元. 若 A 为非负矩阵, 则$(I+A)^n>0$ 等价于矩阵 $\boldsymbol{A}$ 所对应的图是连通的; 如果 $\boldsymbol{A}$ 的所有主对角线元素都大于 0, 则 $A^n>0$ 等价于矩阵 $\boldsymbol{A}$ 所对应的图是连通的. 随机矩阵 $\boldsymbol{A}$ 称为非周期不可约的(SIA), 如果 $Q\triangleq\lim_{k\to\infty}A^k$ 存在且 Q 的所有行都相同.

对于 Vicsek 模型, 当初始角度的范围为$(-\pi/2, \pi/2)$时, 由(1.4)式定义的矩阵 $A(t)$为随机矩阵, 并且主对角线元素都是非零元.

定理 1.1 的证明　对任意的个体 i 和 j 有

$$\left(\cos\theta_i(t)-\cos\theta_j(t)\right)^2+\left(\sin\theta_i(t)-\sin\theta_j(t)\right)^2=4\left|\sin\frac{\theta_i(t)-\theta_j(t)}{2}\right|^2.$$

因此, 由 Euclid 范数的性质, 有

$$d_{ij}(t+1)\leqslant d_{ij}(t)+v\,|\,\theta_i(t)-\theta_j(t)\,|. \tag{3.1}$$

注意到, 当 $x\in(-\pi/2,\pi/2)$ 时 $\tan x-x$ 是单调递增的, 我们有

$$\tan\max_i\{\theta_i(t)\}-\max_i\{\theta_i(t)\}\geqslant\tan\min_i\{\theta_i(t)\}-\min_i\{\theta_i(t)\},$$

即

$$\max_i \theta_i(t) - \min_i \theta_i(t) \leqslant \tan \max_i \{\theta_i(t)\} - \tan \min_i \{\theta_i(t)\}. \tag{3.2}$$

上式结合式(3.1)可以得到

$$d_{ij}(t+1) \leqslant d_{ij}(t) + v\Delta_t. \tag{3.3}$$

其中 $\Delta_t = \max_{i,j}\{\tan\theta_i(t) - \tan\theta_j(t)\}$，根据角度更新式(1.2)可知$\Delta_t$关于 t 是不增的.

下面，证明Δ_t实际上是指数递减的，即存在正常数 $0 < L < 1$， 使得

$$\Delta_{kN} \leqslant L^k \Delta_0,\ \forall k \geqslant 0. \tag{3.4}$$

用数学归纳法，首先考虑 $k = 1$ 的情形.

对任意的 $i, j \in \varepsilon_0$，根据(3.3)式及Δ_t的单调性可得

$$d_{ij}(t+1) \leqslant d_{ij}(0) + v\sum_{l=0}^{t}\Delta_l \leqslant d_{ij}(0) + (t+1)v\Delta_0,\quad 0 \leqslant t \leqslant N-1.$$

进一步根据 v 的选取式(1.8)，可知对任意的 $i, j \in \varepsilon_0$ 有

$$d_{ij}(t+1) \leqslant d_{ij}(0) + (t+1)\frac{d}{\Delta_0}\left(\frac{\cos\overline{\theta}}{N}\right)^N \Delta_0 < r,\quad 0 \leqslant t \leqslant N-1.$$

这意味着在 0 时刻为邻居的个体对在 $t = 1,\cdots,N$ 时刻仍为邻居， 因而图 $\mathcal{G}_t$ $(t = 1,\cdots,N)$ 是连通的. 因为由式(1.4)定义的矩阵 $A(t)$ 的所有非零元素都不小于 $\cos\overline{\theta}/N$，其中 $\overline{\theta} = \max_i |\theta_i(0)|$. 因而 $A(t) \geqslant A_N \triangleq (a'_{ij})$, $i, j = 1,\cdots,N$，其中

$$a'_{ij} = \begin{cases} \dfrac{\cos\overline{\theta}}{N}, & 若(i,j) \in \varepsilon_0; \\ 0, & 否则. \end{cases}$$

下面考察角度更新. 根据(1.3)式有

$$\tan\theta(N) = A(N-1)\cdots A(0)\tan\theta(0). \tag{3.5}$$

记 $\mathbf{1} = (1,1,\cdots,1)^{\mathrm{T}}$，根据上面的证明及初始邻居图的连通性有

$$A(N-1)\cdots A(0) \triangleq (a_{ij}^N(0)) \geqslant (A_N)^N \geqslant \left(\frac{\cos\overline{\theta}}{N}\right)^N \mathbf{1}\mathbf{1}^{\mathrm{T}}, \tag{3.6}$$

即 $a_{ij}^N(0) \geqslant (\cos\overline{\theta}/N)^N > 0$. 由 $\{A(t), t = 1,2,\cdots\}$ 为随机矩阵及随机矩阵的乘积仍为随机矩阵可知 $\sum_{j=1}^N a_{ij}^N(0) = 1$， 因而对任意的 $i, i' = 1,\cdots,N$，有 $\sum_{j=1}^N (a_{ij}^N(0) - a_{i'j}^N(0)) = 0$. 记

$$L' = \sum_{j=1}^N (a_{ij}^N(0) - a_{i'j}^N(0))^+ = \sum_{j=1}^N (a_{ij}^N(0) - a_{i'j}^N(0))^-,$$

其中 $(a)^+ = \max(a,0)$, $a^- = \max(-a,0)$. 根据公式(3.6)可以得到

$$L' \leqslant \sum_{j=1}^N \left(a_{ij}^N(0) - \left(\frac{\cos\overline{\theta}}{N}\right)^N\right) = 1 - N\left(\frac{\cos\overline{\theta}}{N}\right)^N \triangleq L < 1. \tag{3.7}$$

根据公式(3.5)可知存在 $i, i' \in \{1,2,\cdots,N\}$，使得

$$\max_l\left(\tan\theta_l(N)\right)=\sum_{j=1}^{N}a_{ij}^N(0)\tan\theta_j(0);\quad \min_l\left(\tan\theta_l(N)\right)=\sum_{j=1}^{N}a_{i'j}^N(0)\tan\theta_j(0). \tag{3.8}$$

因而根据公式(3.7)和(3.8), 有

$$\begin{aligned}\Delta_N&=\max_i\left(\tan\theta_i(N)\right)-\min_i(\tan\theta_i(N))\\&=\sum_{j=1}^{N}(a_{ij}^N(0)-a_{i'j}^N(0))\tan\theta_j(0)\\&=\sum_{j=1}^{N}(a_{ij}^N(0)-a_{i'j}^N(0))^+\tan\theta_j(0)-\sum_{j=1}^{N}(a_{ij}^N(0)-a_{i'j}^N(0))^-\tan\theta_j(0)\\&\leqslant L'\{\max_i\tan\theta_i(0)-\min_i\tan\theta_i(0)\}\leqslant L\Delta_0,\end{aligned}$$

从而当 $k=1$ 时公式(3.4)成立.

下面假设对所有的 $k\leqslant K$ 时(3.4)式成立, 其中 $K\geqslant 1$. 根据 Δ_t 的单调性, 可知对任意的 $t\in[lN,(l+1)N)$, $l\leqslant K$, 有 $\Delta_t\leqslant L^l\Delta_0$, 从而对任意的 $i,j\in\varepsilon_0$ 及任意的 $t\in[KN,(K+1)N)$, 由公式(3.3)可得

$$\begin{aligned}d_{ij}(t+1)&\leqslant d_{ij}(t)+v\Delta_t\leqslant d_{ij}(0)+v\sum_{l=0}^{t}\Delta_l\\&\leqslant d_{ij}(0)+Nv(1+L+L^2+\cdots+L^K)\Delta_0\\&<d_{ij}(0)+vN\frac{1}{1-L}\Delta_0<r,\end{aligned}$$

因而在 0 时刻为邻居的个体对, 在时刻 $t\in[KN,(K+1)N)$ 仍为邻居. 根据初始图的连通性有

$$A((K+1)N-1)\cdots A(KN)\triangleq[a_{ij}^N(K)]\geqslant(A_N)^N\geqslant\left(\frac{\cos\bar{\theta}}{N}\right)^N\mathbf{1}\mathbf{1}^{\mathrm{T}}.$$

进一步利用与 $k=1$ 时相同的方法, 可以证明

$$\Delta_{(k+1)N}\leqslant L\Delta_{kN}\leqslant L^{K+1}\Delta_0,$$

因此 $k=K+1$ 时公式(3.4)仍成立. 根据归纳法及Δ_t 的单调性, 可知以指数的数度有 $\Delta_t\to 0$, 因而系统会同步.

4　结束语

本文的贡献主要是: ⅰ)对一类由著名的Vicsek模型描述的多个体系统建立了同步的充分条件, 该条件完全加在系统的初始状态与模型参数上, 与以往所用的闭环轨线上的连通性条件相比, 这类条件不但使得理论分析完整并且更容易验证; ⅱ)通过构造反例说明对于初始角度范围为 $[0,2\pi)$ 的Vicsek模型, 邻居图的连通性不再是系统同步的充分条件, 这揭示了Vicsek模型与线性化模型之间存在着根本不同. 值得提及的是定理 1.1 中指数收敛速度的证明启示我们可以研究带噪声的多个体系统 [14], 并且如果在初始状态服从均匀分布的随机框架下进行研究, 当个体的个数很大时, 加在速率与半径上的条件可以减弱甚至去掉 [15]. 当然, 还有很多有趣的问题仍然没有解决, 这需要对基于局部规则的多个体系统的深入研究.

致谢 感谢唐共国与韩靖的有益讨论.

参 考 文 献

1 Shaw E. Fish in schools. Nat Hist, 1975, 84(8): 40—46
2 Reynolds C. Flocks, herds, and schools: A distributed behavioral model. Comput Graph, 1987, 21(4): 25—34 [DOI]
3 Vicsek T, Czirok A, Ben-Jacob E, et al. Novel type of phase transition in a system of self-driven particles. Phys Rev Lett, 1995, 75(6): 1226—1229 [DOI]
4 Jadbabaie A, Lin J, Morse A S. Coordination of groups of mobile autonomous agents using nearest neighbor rules. IEEE Trans Autom Control, 2003, 48(6): 988—1001 [DOI]
5 Savkin A V. Coordinated collective motion of groups of autonomous mobile robots: Analysis of Vicsek model. IEEE Trans Autom Control, 2004, 39(6): 981—983 [DOI]
6 Cucker F, Smale S. Emergent behavior in flocks. IEEE Trans Autom Control, 2007, 52(5): 852—862 [DOI]
7 Tang G G, Guo L. Convergence of a class of multi-agent systems in probabilistic framework. J Syst Sci Complex, 2007, 20(2): 173—191 [DOI]
8 刘志新, 郭雷. 多个体系统的连通与同步. 25 届中国控制会议论文集. 哈尔滨: 北京航空航天大学出版社, 2006. 373—378
9 刘志新. 基于局部规则的多个体系统的集体行为. 博士毕业论文. 北京: 中国科学院数学与系统科学研究院, 2007. 26—31
10 Hendrickx J M, Blondel V D. Convergence of different linear and non-linear Vicsek models. In: Proceedings of the 17th Symposium on Mathematical Theory of Networks and Systems. Kyoto: 2006. 1229—1240
11 Wolfowitz J. Products of indecomposable aperiodic stochastic matrices. Proc Amer Math Soc, 1963, 14(5): 733—737
12 Han J, Li M, Guo L. Soft control on collective behavior of a group of autonomous agents by a shill agent. J Syst Sci Complex, 2006, 19(1): 54—62 [DOI]
13 Horn R A, Johnson C R. Matrix Analysis. Cambridge: Cambridge University Press, 1985. 487—529
14 Wang L, Liu Z X, Guo L. Robust consensus of multi-agent systems with noise. In: Cheng D Z, Wu M. Proceedings of the 26th Chinese Control Conference. Zhangjiajie: Beihang University Press, 2007. 737—741
15 Liu Z X, Guo L. Synchronization of Vicsek model with large population. In: Cheng D Z, Wu M. Proceedings of the 26th Chinese Control Conference. Zhangjiajie: Beihang University Press, 2007. 673—677