

浅水非线性随机海浪的波高分布

侯一筠^{①*}, 段永亮^{①②}, 陈更新^{①②}, 齐鹏^①, 司广成^{①②}

① 中国科学院海洋研究所, 青岛 266071;

② 中国科学院研究生院, 北京 100049

* E-mail: yjhou@ms.qdio.ac.cn

收稿日期: 2008-08-08; 接受日期: 2009-10-22

国家自然科学基金(批准号: 40476018)和中国科学院知识创新工程方向项目(批准号: KZCX2-YW201)资助

摘要 利用水波动力学中的浅水 Stokes 波理论建立了随机波统计模式, 并由此导出了浅水非线性海浪的波高概率分布函数. 所导出的以浅水波陡和浅水因子作为参数的波高概率分布在物理上更为合理. 这两个参数既可作为控制波高分布函数变化的参量, 又能通过它们体现波高分布偏离瑞利分布的程度. 新的波高分布克服了瑞利分布大波预报过高, 而众值预报过低的不足之处; 同时也使得小概率对应的波高值比瑞利分布预报的为低. 浅水波陡的作用与深水情况类似, 而浅水因子的作用则体现在分布众值对应的波高随着浅水因子的变小而逐渐降低以及浅水波浪分布更为集中等方面. 资料验证表明, 本文结果更具合理性.

关键词

波高分布
非线性
浅水因子
浅水波陡

海浪统计预报中的核心问题是随机波面的概率分布形式. 迄今为止, Longuet-Higgins^[1]的随机海浪统计模型一直占有主导地位. 其研究方法是视海浪过程为无数个独立随机变量之和, 由中心极限定理可推出随机波面服从正态分布, 其他一些重要分布(如波高分布、周期分布等)则由此导出. 尽管该研究方法有着广泛的适用性, 但是问题在于, 该模型中缺乏水深对海浪的影响, 由该模型导出的随机海浪要素的概率分布与水深无关, 这显然与物理过程不符. 事实上, 在波浪的理论与应用研究中, 水深是一个重要参量, 浅水波与深水波有着显著不同的动力学性质^[2]. 在动力学机理上, 水深的变化可引起波浪的折射、绕射和变浅作用; 浅水因子(定义为水深与波长之比)体现了波浪的色散效应, 浅水波陡(定义为波高与水深之比)体现了波浪的非线性作用. 只有在浅水因子大于 1/2 时, 才可忽略水深的影响, 视为深水

情况. 随着水深的变小, 浅水因子和浅水波陡将成为控制波形变化的重要参量. 关于浅水波的研究也一直是水波动力学中的主要研究方向之一, 这方面的成果推动了流体力学和海洋动力学的发展^[3].

浅水因子在海浪的概率统计中也起着重要的作用^[4], 浅水波高分布与深水情况不同, 将受水深变化的影响, 丁平兴等^[5]通过各种条件下的水槽实验结果也证明了这一点. Battjes 和 Groenendijk^[6]提出的波高分布函数加入了局地波能, 水深和地形斜率的影响, 尽管控制参数的获得考虑到了物理上的过程, 但最终的分布并没有用简单的参数形式表达, 而且出现了波高分布函数的不连续现象. Fernando 等^[7]认为海区变浅效应和波破碎导致了波高分布变化. 他们所建立的新波高分布函数依靠均方根波高 H_{rms} 和一个谱形参量 κ 表达, 其分布的累积率克服了 Battjes 和 Groenendijk^[6]的限制, 但是计算较为复杂. 陈正寿

等^[8]基于非线性 Beta 波面分布, 采用经验变换, 导出了仅用随机波面偏度 λ_3 和尖度 λ_4 等2个参数表示的非线性海浪波高概率统计分布. Muraleedharan 等^[9]利用有效波高和水深因子来调整改进的 Weibull 模型中的参数来模拟浅水的极值波高分布, 应用于季风环境下东阿拉伯海取得了较好效果. 但是 Beta 分布和 Weibull 分布都是纯经验分布, 缺乏明确的理论依据.

浅水海浪的波高分布研究的关键之处是建立随机统计模型. 本文作者在前期工作中曾利用 Stokes 波模型导出了由波陡参数作为控制参数的非线性海浪的波高分布^[10], 又利用浅水 Stokes 波模型导出了由浅水因子和浅水波陡作为控制参数的非线性海浪的波面分布^[4]. 同理, 这两个参数也将在浅水波高分布中起重要作用. 浅水波高分布的导出从理论上丰富了传统的海浪统计理论, 而且也将会在应用中发挥潜力.

1 模式的建立

二维、常水深的重力波方程^[11]可以表示为

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0, & -h < z < \zeta, \\ \left. \frac{\partial \phi}{\partial z} \right|_{z=\zeta} = \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial \zeta}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial x}, & z = \zeta, \\ \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 \right] + g\zeta = 0, & z = \zeta, \\ \left. \frac{\partial \phi}{\partial z} \right|_{z=-h} = 0. \end{cases} \quad (1)$$

其中, x 和 z 分别表示水平和垂直坐标, t 为时间, g 为重力加速度, h 为水深, ϕ 为波动场速度势函数, ζ 为水面位移.

可求得(1)式的解为(类似于 Sato^[11]的结果):

$$\zeta = \frac{\beta \text{shk}(h + \zeta)}{\text{chkh}} \cos(kx - \omega t + \varepsilon), \quad (2)$$

其中, k 和 ω 分别为波数和频率; β 和 ε 为振幅和初位相 (一般是可由初值确定的积分常数).

(2) 式即为有限水深的 Stokes 波, 与 Sato 的结果相比多出因子 $1/\text{chkh}$, 是为了使当 $h \rightarrow \infty$ 时, 波面为深水 Stokes 波的形式(据文献[12]):

$$\zeta(t) = \beta e^{k\zeta(t)} \cos(kx - \omega t + \varepsilon). \quad (3)$$

若引进随机初条件

$$\begin{aligned} \zeta(0) &= A \cos \varphi, \\ \zeta'(0) &= -A \sin \varphi, \end{aligned} \quad (4)$$

其中 A 和 φ 分别代表瑞利分布和均匀分布的随机量. (2)式中则包含了传统海浪的统计理论结果^[10]. 由此, 固定点随时间变化的随机波面为

$$\zeta = \frac{\beta \text{shk}(h + \zeta)}{\text{chkh}} \cos(\omega t + \varepsilon). \quad (5)$$

与(2)式不同之处是这里的 β 和 ε 分别是随机振幅和位相.

以波面方差 σ 对(5)式无因次化后, 有

$$\zeta = \frac{\beta \text{sh}\mu(1 + \eta\zeta)}{\text{ch}\mu} \cos(\omega t + \varepsilon), \quad (6)$$

式中 $\mu = kh$ 为浅水因子, $\eta = \sigma/h$ 为浅水波陡, 它们分别是水波动力学中反映水深与非线性效应的重要参量. (6)式实质上是窄带谱海浪过程 $\zeta(t) = \text{Re}a(t)e^{i(\omega t + \varepsilon(t))}$ ^[13] 在浅水中的表现形式. 本文作者曾利用(6)式构建了浅水非线性海浪的波面分布^[4]. 由此可以看出, 水波动力学中的两个重要参数 μ 和 η 也是波面统计分布中的重要参数.

当 $\eta=0$ 时, 即浅水线性海浪情况下, (6)式可简化为

$$\zeta = \beta \text{th}\mu \cos(\omega t + \varepsilon). \quad (7)$$

由此可以导出浅水线性随机海浪的波面分布为

$$f(\zeta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\text{th}\mu}} e^{-\frac{1}{2} \frac{\zeta^2}{\text{th}^2\mu}}. \quad (8)$$

再利用传统海浪的研究方法^[1], 可得出浅水波幅服从

瑞利分布 $f(A) = (A/\text{th}^2\mu)e^{-\frac{A^2}{2\text{th}^2\mu}}$ 和位相服从 $[0, 2\pi]$ 内的均匀分布. 随着 μ 的减小, 分布较集中, 说明浅水中的波浪成分较深水为少, 这在物理上颇为合理.

再准确到 $O(\eta^2)$ 阶, 由(6)式可得

$$\begin{aligned} \zeta &= a \cos(\tau + \varepsilon) + \frac{1}{2} \eta a^2 [1 + \cos 2(\tau + \varepsilon)] \\ &\quad + \frac{3}{8} \mu \eta^2 a^3 \cos 3(\tau + \varepsilon), \end{aligned} \quad (9)$$

即三阶浅水随机 Stokes 波, 其中 $a = \beta \text{th}\mu$ 为非线性波的主波振幅; $\omega t = \tau$. 本文则利用上式建立浅水非线性海浪的波高分布. 为此, 同深水情况类似^[10]可提出

$O(\eta^2)$ 阶的随机初值问题:

$$\begin{cases} \zeta = a \cos(\tau + \varepsilon) + \frac{1}{2} \eta a^2 [1 + \cos 2(\tau + \varepsilon)] \\ \quad + \frac{3}{8} \mu \eta^2 a^3 \cos 3(\tau + \varepsilon), \\ \zeta(0) = A \cos \varphi, \\ \zeta'(0) = -A \sin \varphi. \end{cases} \quad (10)$$

其中, A 服从瑞利分布 $f(A) = \frac{A}{\text{th}^2 \mu} e^{-\frac{A^2}{2\text{th}^2 \mu}}$, φ 服从 $[0, 2\pi]$ 内的均匀分布.

2 浅水非线性海浪的波高分布

为了导出非线性波幅 a 的分布, 首先要利用模式 (10) 建立以 μ 和 η 为参数的函数关系:

$$\begin{cases} A = A(a, \varepsilon; \mu, \eta), \\ \varphi = \varphi(a, \varepsilon; \mu, \eta), \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} a = a(A, \varphi; \mu, \eta), \\ \varepsilon = \varepsilon(A, \varphi; \mu, \eta). \end{cases} \quad (11)$$

事实上, 由 (10) 式可导出

$$\begin{cases} A = a + a^2 \eta [\cos \varepsilon + \sin^2 \varepsilon \cos \varepsilon] + \frac{1}{2} a^3 \eta^2 [\cos^4 \varepsilon \sin^2 \varepsilon] \\ \quad + \frac{3}{8} a^3 \mu \eta^2 [\cos 2\varepsilon + 2 \sin 3\varepsilon \sin \varepsilon], \\ \varphi = \varepsilon + a \eta [\cos^2 \varepsilon \cdot \sin \varepsilon] - a^2 \eta^2 [\cos^3 \varepsilon \cdot \sin \varepsilon (1 + \sin \varepsilon)] \\ \quad + \frac{3}{8} a^2 \mu \eta^2 [\sin 2\varepsilon + 2 \sin 3\varepsilon \cdot \cos \varepsilon], \end{cases} \quad (12)$$

和

$$\begin{cases} a = A - A^2 \eta \cos \varphi (1 + \sin^2 \varphi) \\ \quad + A^3 \eta^2 \left[2 \cos \varphi (1 + \sin^2 \varphi) - \frac{1}{2} \cos^4 \varphi \sin^2 \varphi \right] \\ \quad - \frac{3}{8} A^3 \mu \eta^2 [\cos 2\varphi + 2 \sin 3\varphi \sin \varphi], \\ \varepsilon = \varphi - A \eta \cos^2 \varphi \cdot \sin \varphi + 2 A^2 \eta^2 \cos^3 \varphi \sin \varphi (1 + \sin^2 \varphi) \\ \quad - \frac{3}{8} A^2 \mu \eta^2 [\sin 2\varphi + 2 \sin \varepsilon \varphi \cos \varphi]. \end{cases} \quad (13)$$

对于均匀分布 φ 在 $[0, 2\pi]$ 中取平均, 于是得到

$$A = a \left[1 + \frac{3}{8} a^2 \eta^2 \right], \quad a = A \left[1 - \frac{3}{8} A^2 \eta^2 \right]. \quad (14)$$

再由 $f(a) = f(A) \left| \frac{dA}{da} \right|$, 可得 a 的分布为

$$f(a) = \frac{a}{\text{th}^2 \mu} \left[1 + \frac{3}{8} a^2 \eta^2 \right] \left[1 + \frac{9}{8} a^2 \eta^2 \right] e^{-\frac{a^2 \left[1 + \frac{3}{8} a^2 \eta^2 \right]^2}{2\text{th}^2 \mu}}. \quad (15)$$

此即为本文给出的以浅水因子和浅水波陡作为参数的非线性浅水波幅分布. 当 $\eta=0$ 时, 上式退化到线性海浪的结果; 当 μ 很大时, 上式与深水情况一致^[10], 包含了传统海浪的研究结果, 而当 μ 很小时, 水深的作用将凸现出来.

图 1 给出了浅水因子固定时浅水波幅分布随浅水波陡的变化, 波陡的作用与深水情况类似^[10]. 图 2 给出了浅水波陡固定时浅水波幅分布随浅水因子的变化, 结果表明, 随着浅水因子的变小, 分布更为集中且分布众值对应的波高逐渐降低, 这些都符合物理过程. 同时本文结果还正好克服了瑞利分布大波预报过高, 而众值预报过低的不足之处. 由于瑞

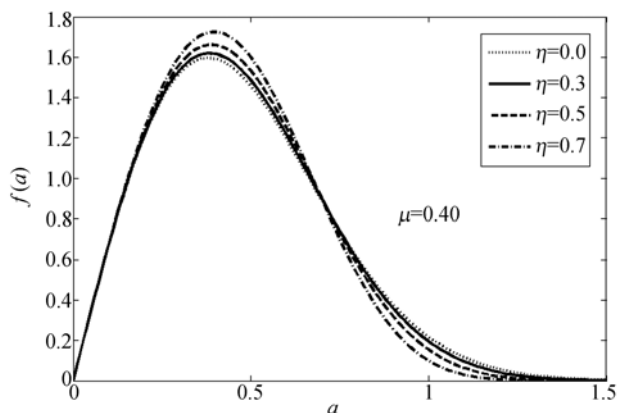


图 1 浅水波幅分布随浅水波陡的变化
 $\eta=0$ 为瑞利分布

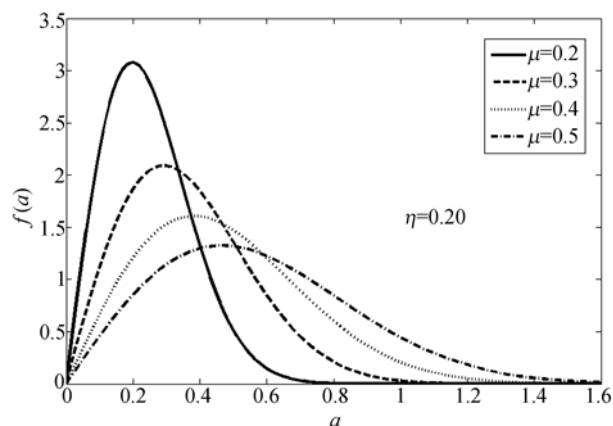


图 2 浅水波幅分布随浅水因子的变化

利分布的这种不足是海浪波高概率预报应用中的缺陷, 其长期受到较大的关注并设法改进, 本文则通过浅水因子和浅水波陡参数的引进丰富了这方面的研究内容, 这也将会在应用中发挥潜力。

类似深水情况, 取 a 的 2 倍为波高 H , 得到 H 的分布为

$$f(H) = \frac{H}{4\eta^2\mu} \left[1 + \frac{3\eta^2}{32} H^2 \right] \cdot \left[1 + \frac{9\eta^2}{32} H^2 \right] e^{-\frac{H^2}{8\eta^2\mu} \left(1 + \frac{3\eta^2}{32} H^2 \right)^2} \quad (16)$$

对 $f(H)$ 从 H 到 ∞ 积分, 得到波高累积率:

$$F(H) = \int_H^\infty f(H) dH = e^{-\frac{H^2}{8\eta^2\mu} \left(1 + \frac{3\eta^2}{32} H^2 \right)^2} \quad (17)$$

图 3 给出了 $F(H)$ 随浅水波陡的变化趋势, 与深

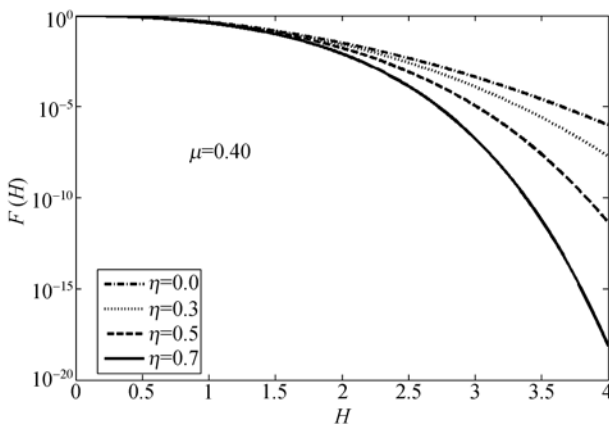


图 3 浅水波高累积率随浅水波陡的变化
 $\eta=0$ 为瑞利分布

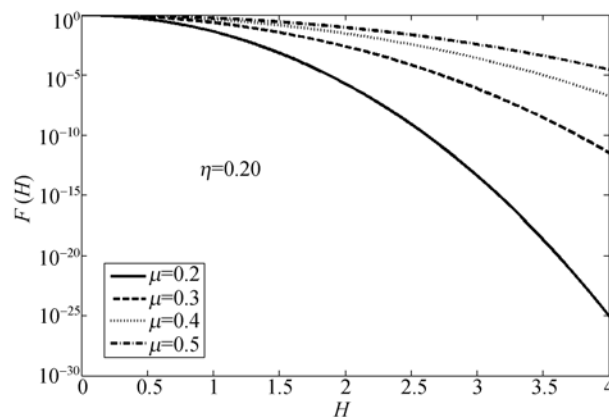


图 4 浅水波高累积率随浅水因子的变化

水情况类似, 浅水波陡的作用使得小概率对应的波高值比瑞利分布预报的低; 图 4 给出了 $F(H)$ 随浅水因子的变化趋势, 随着水深的变浅, 小概率对应的波高值也在逐渐降低, 而这正是应用中所关注的。

3 比较和验证

由于在应用问题中的重要性, 浅水中的波高分布一直受到较大的关注, 并已提出多种半理论-半经验的分布形式. Hameed 和 Baba^[14] 利用 Rayleigh, Weibull, Gluhovski, Ibrageemov 和 Goda 共 5 种分布对实测资料进行了检验, 得出了 Gluhovski 分布对浅水波高拟合较好的结论. 然而, Gluhovski 分布虽然克服了 Rayleigh 分布大波预报过高等缺陷, 但却有分布众值(大概率对应的波高值)描述不够准确等不足, 仍然不能较好的拟合浅水数据, 并且 Gluhovski 分布属于经验分布缺乏足够的理论依据. 本文提出的分布是根据水波动力学方程而建立的浅水随机统计模型基础上所导出的, 特别是以浅水因子和浅水波陡作为双参数的分布函数族, 在应用中有广泛的适用性. 图 5 和 6 分别为本文提出的波高分布和波高累积率分布 ($\mu=0.40$, $\eta=0.20$) 与上述这些分布以及实测资料的对比, 就图中比较言之, 本文结果最为合理。

本文利用在威海站点 ($37^\circ 27.6'N$, $122^\circ 15.1'E$) 浅水区域的观测数据进行验证. 此站点从 2006 年 1 月 23 日至 2006 年 4 月 24 日, 在水深 24 m 处采用 SZF II-1 波浪浮标 1 小时观测一次, 每小时观测 18 min, 采样间隔 0.5 s, 每次记录为 2048 个数据. 从中采用两组不同海况下的实测资料, 由上跨零点法确定波高值. 参数 μ 和 η 可由观测数据直接计算得到, 浅水因子 $\mu = kh$ 中的波数 k 可利用浅水波频散关系 $\omega^2 = gk \tanh kh$ ($\omega = 2\pi/T$) 计算得到; 浅水波陡 $\eta = \sigma/h$ 中的波面方差 σ 可由波面数据直接计算得到. 这两组参数分别为 ($\mu=0.20$, $\eta=0.41$) 和 ($\mu=0.33$, $\eta=0.52$).

图 7 和 8 为本文波高分布与这两组资料及相关分布的对比(横轴为波高值 H , 纵轴为概率密度值 $f(H)$); 图 9 和 10 为与之对应的波高累积率分布的对比图(横轴为波高值 H , 纵轴为累积率 $F(H)$).

由以上各图可看出本文提出的波高分布与实测资料更为符合. Gluhovski 分布在拟合小概率波高分布时才比较准确, 但对众值波高拟合上差距较大; Rayleigh 分布大波预报过高和分布众值预报过等缺陷非常明显。

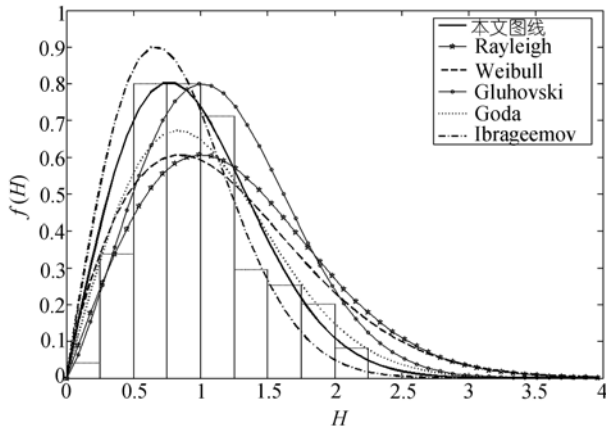


图 5 浅水中波高分布对比图
直方图为实测资料

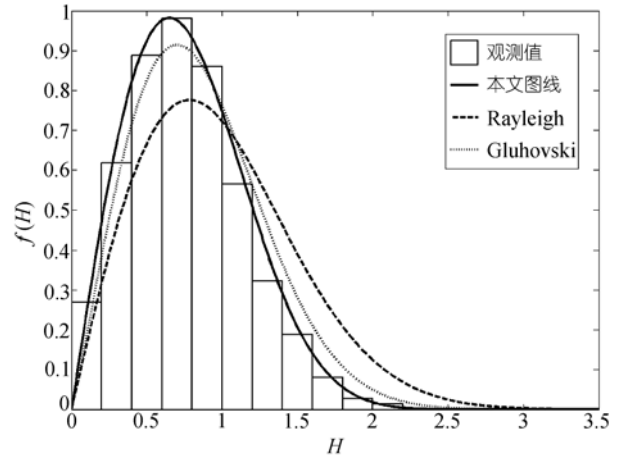


图 8 浅水中波高分布对比图
 $\mu=0.33, \eta=0.52$

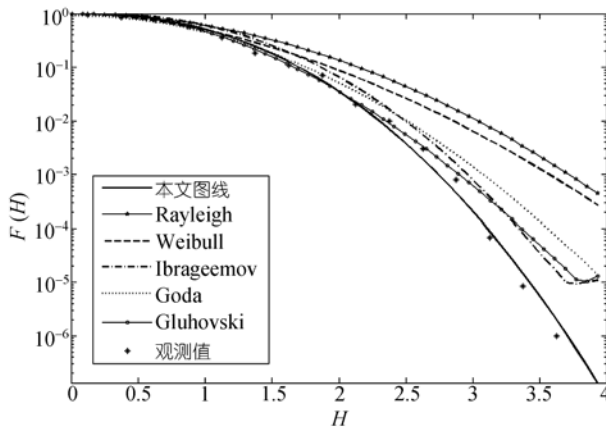


图 6 浅水中波高累积率对比图

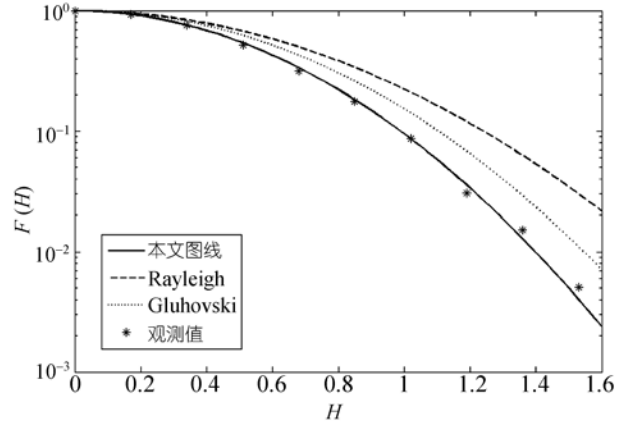


图 9 浅水中波高累积率对比图
 $\mu=0.20, \eta=0.41$

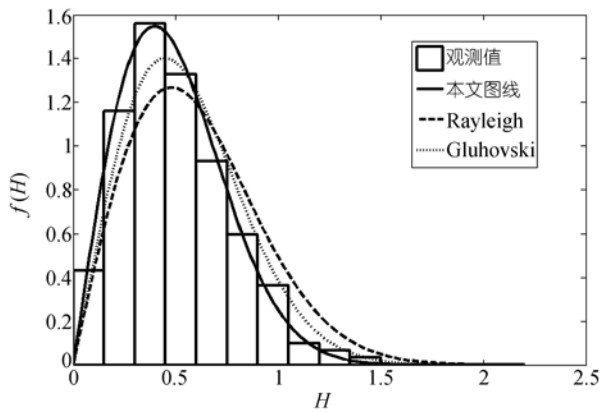


图 7 浅水中波高分布对比图
 $\mu=0.20, \eta=0.41$

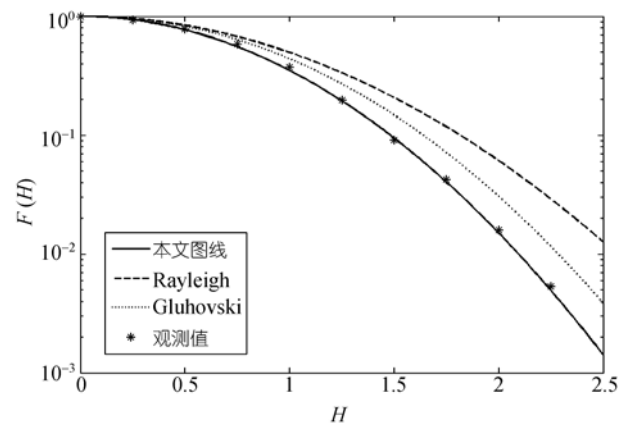


图 10 浅水中波高累积率对比图
 $\mu=0.33, \eta=0.52$

表 1 各种分布与观测资料的误差比较

		波高分布		累积率	
		均方根误差	相对误差	均方根误差	相对误差
第 1 组	Gluhovski	0.1765	4.7699	0.1375	2.4399
	Rayleigh	0.5523	11.3509	0.3105	6.5840
	$\mu=0.20, \eta=0.41$	0.0988	1.0197	0.0399	0.4905
第 2 组	Gluhovski	0.3103	2.5501	0.0979	3.2744
	Rayleigh	0.9511	14.5530	0.1659	9.0748
	$\mu=0.33, \eta=0.52$	0.1378	1.8104	0.0382	0.4316

下面用均方根误差和相对误差来检验拟合效果。均方根误差和相对误差的计算公式分别为

$$R = \sqrt{\sum_{i=1}^n (p_i - s_i)^2 / n}, \quad X = \sum_{i=1}^n \left(\frac{|p_i - s_i|}{s_i} \right), \quad (18)$$

其中 R 为均方根误差, X 为相对误差, p_i 为理论值, s_i 为实测值, n 为样本个数。

Hameed 和 Baba^[14]已经指出 Gluhovski 分布对浅水波高拟合较好, 现将 Gluhovski, Rayleigh 分布和本文分布比较, 结果见表 1。

由上表第 1 组、第 2 组数据比较可以容易看出本文波高分布以及其累积率与实测数据相比得到的均方根误差和相对误差都较其他两种分布小很多。因此可得出结论: 本文分布结果拟合效果最好。

4 结语

把水波动力学中的浅水 Stokes 波理论应用于随

机波研究中可以建立浅水的波高概率统计分布函数, 特别是在非线性研究方面, 优点更为明显。由本文的结果可以看出, 浅水因子和浅水波陡不仅是波浪动力学中的重要参量, 而且也是波浪统计学中的重要参量, 它们既能体现波高分布偏离瑞利分布的程度, 又可作为控制参量描述分布函数的变化。研究结果不仅在物理上更为合理, 而且在中应用中可以不需要依靠拟合来获取受水深影响的波高分布, 这就从理论上丰富了传统的海浪统计理论。新的波高概率分布函数与线性海浪理论中的瑞利分布相比有以下 3 个优点: (1) 浅水波陡能够调节波高密度函数的峰值, 这就克服了瑞利分布大波预报过高, 而众值预报过低的不足; (2) 小概率对应的波高值也比瑞利分布预报的低; (3) 浅水因子可以调整大概率对应的波高值, 控制波高的主要分布区间, 并且分布众值对应的波高随着浅水因子的变小而逐渐降低。这些结果将会在实际应用中发挥作用。

致谢 感谢审稿专家提出的宝贵意见。

参考文献

1 Longuet-Higgins M S. The statistical analysis of a random moving surface. Phil Trans Roy Soc, 1957, 249: 321—387[doi]
2 梅强中. 水波动力学. 北京: 科学出版社, 1984
3 文圣常, 余宙文. 海浪理论与计算原理. 北京: 科学出版社, 1984
4 侯一筠, 李明悝, 谢强, 等. 随机波面概率统计中的动力学应用. 海洋与湖沼, 2000, 31(4): 349—353
5 丁平兴, 孙孚, 孙亚珍, 等. 风浪统计性质的实验研究. I. 波高与周期的统计分布. 海洋学报, 1995, 17(4): 1—10
6 Battjes J A, Groenendijk H W. Wave height distributions on shallow foreshores. Coast Eng, 2000, 40: 161—182[doi]
7 Fernando J M, Inigo J L, Raul M. Transformation model of wave height distribution on planar beaches. Coast Eng, 2004, 50: 97—115[doi]
8 陈正寿, 于定勇, 柳枝. 基于 Beta 波面分布的非线性海浪波高分布. 中国海洋大学学报, 2005, 35(3): 412—416
9 Muraleedharan G, Rao A D, Kurup P G, et al. Modified Weibull distribution for maximum and significant wave height simulation and prediction. Coast Eng, 2007, 54: 630—638[doi]
10 侯一筠, 宋贵霆, 宋金宝, 等. 非线性随机海浪的波高分布. 中国科学 D 辑: 地球科学, 2006, 36(5): 481—485
11 Sato S. Surface waves in shallow water. Report of the Public Works Research Institute, Ministry of Construction, Japan. J Res PWRI, 1954, 1: 1—111
12 Rayleigh L. On periodic irrotational waves at the surface of deep water. Phil Mag, 1917, 33: 381—389
13 Longuet-Higgins M S. On the joint distribution of the period and amplitudes of sea waves. J Geophys Res, 1975, 80(18): 2688—2694[doi]
14 Hameed S T S, Baba M. Wave height distribution in shallow water. Ocean Eng, 1985, 12: 309—319[doi]