中国科学: 数学 2017 年 第 47 卷 第 10 期: 1255 ∼ 1276
SCIENTIA SINICA Mathematica
《中国科学》杂志社
SCIENCE CHINA PRESS
CrossMark
click for updates
论 文

一阶拟线性双曲型方程组慢时间尺度下的零松弛极限

献给李大潜教授 80 华诞

彭跃军

Laboratoire de Mathématiques Blaise Pascal, Université Clermont Auvergne, CNRS, Clermont-Ferrand 63000, France
E-mail: peng@math.univ-bpclermont.fr

收稿日期: 2016-10-25; 接受日期: 2017-03-15; 网络出版日期: 2017-05-03

摘要 本文考虑慢时间尺度下带松弛时间源项的高维一阶拟线性双曲型方程组 Cauchy 问题的光滑解, 这个方程组具有非守恒的形式; 假设它是部分耗散的对称双曲组, 当松弛时间趋于零时, 它在形式上趋于一个两阶非线性抛物型方程组. 在双曲型方程组满足一些结构性的假设下, 本文得到了两个收敛性的结果. 对于大初值, 本文证明了双曲型方程组在一个对松弛时间一致的时间区间上的收敛性, 当初值在常数平衡态附近变化时, 证明了光滑解关于时间的一致整体存在性和双曲型方程组的整体收敛性. 本文也给出一些有物理背景的例子来作为这些结果的应用.

关键词 一阶拟线性双曲组 零松弛极限 抛物型方程组 局部和整体收敛性
MSC (2010) 主题分类 35B25, 35L60, 35K58

1 引言

令 G 为 $\mathbb{R}^n$ 中的一个区域, $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ 为所有的 n 阶实方阵的集合. 令 $Q: G \to \mathbb{R}^n$ 为光滑的向量函数, A_j $(1 \leqslant j \leqslant d): G \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ 为光滑的矩阵函数. 考虑如下带松弛源项的一阶拟线性双曲型方程组:

$$\partial_{t'} U + \sum_{j=1}^{d} A_j(U) \partial_{x_j} U = \frac{Q(U)}{\varepsilon}, \quad t' > 0, \quad x \in \mathbb{R}^d, \tag{1.1}$$

其中 t' 和 x 分别表示通常的时间和空间变量; $U: \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^n$ 是未知函数; $\varepsilon \in (0,1]$ 是小参数, 在物理模型中, 它通常表示松弛时间, 所以, 零松弛极限是指在所考虑的问题中 $\varepsilon \to 0$. 关于方程组 (1.1) 的零松弛极限问题已有很多成熟的研究, 已知在适当的稳定性条件下, 当 $\varepsilon \to 0$ 时, 可证明 (1.1) 的极限仍为一阶双曲型方程组, 这方面的数学结果与模型可参见文献 [1–6], 与此相关的问题也可参见文献 [7–9].

英文引用格式: Peng Y J. Zero relaxation limit in slow time scaling for first-order quasi-linear hyperbolic systems (in Chinese). Sci Sin Math, 2017, 47: 1255–1276, doi: 10.1360/N012016-00193

本文考虑方程组 (1.1) 的光滑解在慢时间尺度下的零松弛极限, 慢时间 t 由关系式 $t=\varepsilon t'$ 来定义, 例如, 将 U 仍视为 (t,x) 的函数, 则 (1.1) 等价于

$$\partial_t U+\frac{1}{\varepsilon}\sum_{j=1}^{d}A_j(U)\partial_{x_j}U=\frac{Q(U)}{\varepsilon^2},\quad t>0,\quad x\in\mathbb{R}^d. \tag{1.2}$$

给定光滑函数 $\bar{U}:\mathbb{R}^d\times(0,1]\to\mathbb{R}^n$, 考虑方程组 (1.2) 的 Cauchy 问题并给出初始条件

$$U(0,x)=\bar{U}(x,\varepsilon),\quad x\in\mathbb{R}^d. \tag{1.3}$$

假设 (1.2) 是对称双曲组[10], 即对所有的 $U\in G$, 存在一个对称正定矩阵 $A_0(U)$, 称为对称子, 使得对所有的 $j\in\{1,\dots,d\}$,

$$\tilde{A}_j(U)\overset{\text{def}}{=}A_0(U)A_j(U)$$

是对称矩阵. 对称双曲组 (1.2) 具有的一个重要性质是, 光滑解 U^ε 满足下列的能量等式 (参见文献 [11]):

$$\frac{d}{dt}\langle A_0(U^\varepsilon)U^\varepsilon,U^\varepsilon\rangle=\langle \mathrm{div}_\varepsilon A(U^\varepsilon)U^\varepsilon,U^\varepsilon\rangle+\frac{2}{\varepsilon^2}\langle A_0(U^\varepsilon)Q(U^\varepsilon),U^\varepsilon\rangle, \tag{1.4}$$

其中 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 表示 $L^2(\mathbb{R}^d)$ 的内积,

$$\mathrm{div}_\varepsilon A(U)=\partial_t A_0(U)+\frac{1}{\varepsilon}\sum_{j=1}^{d}\partial_{x_j}\tilde{A}_j(U). \tag{1.5}$$

以下记 $\|\cdot\|$ 为 $L^2(\mathbb{R}^d)$ 的范数, 对任何正整数 s, 记 H^s 为通常的 Sobolev 空间 $H^s(\mathbb{R}^d)$ 并用 $\|\cdot\|_s$ 表示它的范数. 由于 $A_0(U)$ 是对称正定矩阵, 所以, 当 U 为有界函数时, $\langle A_0(U)U,U\rangle$ 就等价于 $\|U\|^2$. 在上述能量等式的基础上, Lax [12] 和 Kato [13] 分别证明了光滑解的局部存在性定理, 它可陈述如下 (参见文献 [11]). 假设 $s>d/2+1$, $\bar{U}(\cdot,\varepsilon)\in H^s$, 则存在一个最大时间 $T_\varepsilon>0$, 使得 Cauchy 问题 (1.2) 和 (1.3) 具有唯一的定义在 $[0,T_\varepsilon)$ 上的光滑解 U^ε, 并且

$$U^\varepsilon\in C([0,T_\varepsilon),H^s)\cap C^1([0,T_\varepsilon),H^{s-1}).$$

一般情形下, T_ε 依赖于 ε, 如 $T_\varepsilon=+\infty$, 则光滑解关于时间整体定义, 否则光滑解只在局部时间区域上定义.

拟线性双曲型方程组 (1.2) 的一个重要性质是, 光滑解一般会在有限时间内破裂并出现激波 (参见文献 [11,12,14,15]), 此时必有

$$T_\varepsilon<+\infty,\quad \lim_{t\to T_\varepsilon^-}\|U^\varepsilon(t,\cdot)\|_s=+\infty.$$

对于零松弛极限问题, 此时要保证的一个基本结论是, 存在不依赖于 $\varepsilon>0$ 的常数 $T_0>0$, 使得当 ε 充分小时, $T_\varepsilon\geqslant T_0$. 另一方面, 具有耗散结构的方程组可以阻止间断的形成, 并得到它在常数平衡态附近整体光滑解的存在性, 耗散结构的性质由方程组的右端项 Q 与 A_j 的耦合关系来体现. Hsiao 和 Li [16] 给出了一维方程组的一个全耗散条件, 并在此条件下得到了 Cauchy 问题在平衡态附近整体光滑解的存在性. 然而具有物理意义的数学模型经常不满足全耗散条件, 而只满足部分耗散条件. Hanouzet 和 Natalini [17] 及 Yong [18] 给出了一些部分耗散条件, 结合其他的一些对方程组的结构性条件, 他们分别在一维和高维的情形下, 得到了守恒律方程组的 Cauchy 问题在平衡态附近整体光滑解的存在性.

本文主要考虑两个问题, 分别是 Cauchy 问题 (1.2) 和 (1.3) 的局部光滑解和整体光滑解在 $\varepsilon \to 0$ 时的收敛性, 并综述已经在文献 [19,20] 中得到的一些结果, 它们是本文中的定理 3.1、4.1 和 4.2. 我们将看到, 与 (1.1) 的情形不同的是, 方程组 (1.2) 一般收敛于二阶抛物型的方程组. 对于一些特殊的双曲型方程组收敛于抛物型方程组的问题, 前人已有一些研究, 可参见文献 [21–28], 其中的一些问题将在注 3.1 和最后一节的例子中给出更多的解释. 文献 [29] 也考虑了用 BGK (Bhatnagar-Gross-Krook) 模型来逼近抛物型方程的问题. 除此之外, 我们还考虑当 $\varepsilon > 0$ 固定时, 非守恒律方程组的 Cauchy 问题 (1.2) 和 (1.3) 整体光滑解的存在性, 主要结果是定理 4.3.

最后我们指出, 当 (1.2) 的右端项还依赖于 ε 时, 即 $Q = Q(\varepsilon, U)$, 文献 [19] 也证明了 Cauchy 问题 (1.2) 和 (1.3) 的局部光滑解的收敛性, 这样一种 Q 依赖于 ε 的情形在以前的文献中未曾见到, 但它包含了等离子体模型中的一个 Euler-Maxwell 方程组 (参见文献 [30]).

下面采用文献 [24] 中的一些记号并对方程组 (1.2) 给出一些结构性的假设. 首先, 令 $r \in \{1, 2, \dots, n\}$. 记

$$U = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}, \quad u \in \mathbb{R}^{n-r}, \quad v \in \mathbb{R}^r.$$

对任何向量 $V \in \mathbb{R}^n$, 记

$$V = \begin{bmatrix} V^I \\ V^{II} \end{bmatrix}, \quad V^I \in \mathbb{R}^{n-r}, \quad V^{II} \in \mathbb{R}^r.$$

对任何 $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, 用

$$\begin{bmatrix} M^{11} & M^{12} \\ M^{21} & M^{22} \end{bmatrix}, \quad M^{11} \in \mathcal{M}_{n-r}(\mathbb{R}), \quad M^{22} \in \mathcal{M}_r(\mathbb{R})$$

来表示 M 的分块形式. 为简单起见, 假设 $A_j(U)$ 满足

$$A_j^{11}(u, 0) = 0, \tag{1.6}$$

并且源项 $Q(U)$ 具有下列形式:

$$Q(U) = \begin{bmatrix} 0 \\ q(U) \end{bmatrix}, \tag{1.7}$$

其中 $q : G \to \mathbb{R}^r$ 是光滑函数并满足

$$\forall (u, 0) \in G, \quad q(u, v) = 0 \Leftrightarrow v = 0, \quad \partial_v q(u, 0) \text{ 是可逆阵.} \tag{1.8}$$

需要指出的是, 在本文研究的问题中, (1.6) 可以由其他一些比较弱的条件来代替, 此时, (1.2) 的极限方程组会伴随一些微分限制方程组, 具体可参见文献 [19,20] 和注 4.1.

方程组 (1.2) 的部分耗散条件可以表述如下 (参见文献 [5]): 存在一个常数 $c_0 > 0$ 使得

$$A_0(u, 0)Q'(u, 0)V \cdot V \leqslant -c_0|V^{II}|^2, \quad \forall (u, 0) \in G, \quad \forall V \in \mathbb{R}^n, \tag{1.9}$$

其中 $|\cdot|$ 表示 $\mathbb{R}^n$ 中的 Euclid 范数. 条件 (1.7)–(1.9) 蕴含着 $Q'(u, 0)$ 为分块对角矩阵, 更进一步有

$$Q'(u, 0) = \mathrm{diag}(0, \partial_v q(u, 0)), \quad \partial_v q(u, 0) \text{ 是负定阵.} \tag{1.10}$$

且 $A_0(u,0)$ 也为分块对角矩阵, 即 $A_0^{12}(u,0)=0$ (参见文献 [5]). 在能量估计中, 由条件 (1.9) 可以得到变量 v 的耗散估计. 此外, 当 $r=n$ 时, (1.9) 表示的是一个全耗散条件.

本文的结构如下: 第 2 节用渐近展开的方法来揭示 (1.2) 的光滑解在 $\varepsilon\to 0$ 时满足的极限方程组. 第 3 节给出局部光滑解的收敛性定理. 第 4 节在常数平衡态附近来研究光滑解的一致整体存在性和收敛性, 并给出极限方程组的抛物性质, 研究了当参数 ε 固定时非守恒律方程组 (1.2) 的 Cauchy 问题光滑解的整体存在性. 最后一节给出一些具有物理背景的例子, 它们都满足主要定理中需要的条件.

2 光滑解的形式渐近展开

既然 $\varepsilon\to 0$, 考虑 Cauchy 问题 (1.2) 和 (1.3) 具有下列形式展开的近似解:

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\varepsilon^k(U_k(t,x)+I_k(\tau,x)),\quad U_k=\begin{bmatrix} u_k\\ v_k\end{bmatrix},\quad \tau=\frac{t}{\varepsilon^2},\tag{2.1}$$

其中 I_k 为 $t=0$ 附近的校正项, 也可称为初始层项, 这里要求当 $\tau\to+\infty$ 时, $I_k(\tau,\cdot)$ 指数衰减于零. 下面, 我们形式上推导 U_k 和 I_k 满足的方程组. 首先注意到, 对任何光滑函数 H 和 $V=\sum_{k=0}^{+\infty}\varepsilon^kV_k$, 形式上有

$$H(V)=H(V_0)+\sum_{k=1}^{+\infty}\varepsilon^k[H'(V_0)V_k+\mathcal{C}(H,k,\underline{V})],\tag{2.2}$$

其中 $\mathcal{C}(H,k,\underline{V})$ 仅依赖于 H 和 $\underline{V}=(V_0,V_1,V_2,\dots)$ 的前 k 个分量, 并且 $\mathcal{C}(H,1,\underline{V})=0$. 关于 U_k 和 I_k 满足的方程组的推导主要是基于这样一个事实: 由 (2.1) 定义的级数和 $\sum_{k=0}^{+\infty}\varepsilon^kU_k(t,x)$ 都是 (1.2) 的形式解. 以下关于 U_k 和 I_k 满足的方程组的形式推导与文献 [24] 中的计算类似.

2.1 U_k 的方程组的推导

首先将 $\sum_{k=0}^{+\infty}\varepsilon^kU_k(t,x)$ 代入 (1.2), 并比较 ε 的各阶次方项的系数可得

$$\varepsilon^{-2}:\quad Q(U_0)=0,\tag{2.3}$$

$$\varepsilon^{-1}:\quad \sum_{j=1}^dA_j(U_0)\partial_{x_j}U_0-Q'(U_0)U_1=0,\tag{2.4}$$

$$\begin{aligned}\varepsilon^k:\quad &\partial_tU_k+\sum_{j=1}^dA_j(U_0)\partial_{x_j}U_{k+1}+\sum_{l=0}^k\sum_{j=1}^d[A_j'(U_0)U_{l+1}+\mathcal{C}(A_j,l+1,\underline{U})]\partial_{x_j}U_{k-l}\\ &-[Q'(U_0)U_{k+2}+\mathcal{C}(Q,k+2,\underline{U})],\quad \forall\,k\geqslant 0.\end{aligned}\tag{2.5}$$

利用假设 (1.6)–(1.8), 由方程组 (2.3) 可得 $v_0=0$, 由方程组 (2.4) 可得

$$\sum_{j=1}^dA_j^{21}(u_0,0)\partial_{x_j}u_0-\partial_vq(u_0,0)v_1=0.$$

所以,

$$v_1 = \partial_v q(u_0, 0)^{-1} \sum_{j=1}^{d} A_j^{21}(u_0, 0) \partial_{x_j} u_0. \tag{2.6}$$

类似地, 方程组 (2.5) 可写为如下两个子方程组:

$$\partial_t u_k + \sum_{j=1}^{d} A_j^{12}(U_0) \partial_{x_j} v_{k+1} + f_k((U_i, \nabla U_i)_{0 \leqslant i \leqslant k}, v_{k+1}) = 0, \quad \forall\, k \geqslant 0, \tag{2.7}$$

$$\partial_t v_k + g_k((U_i, \nabla U_i)_{0 \leqslant i \leqslant k+1}) - \partial_v q(u_0, 0) v_{k+2} = 0, \quad \forall\, k \geqslant 0, \tag{2.8}$$

其中 f_k 和 g_k 由下面的式子给出:

$$\begin{aligned} f_k((U_i, \nabla U_i)_{0 \leqslant i \leqslant k}, v_{k+1}) = {} & \sum_{l=0}^{k} \sum_{j=1}^{d} [(\partial_v A_j^{11}(U_0) v_{l+1} + \mathcal{C}(A_j^{11}, l+1, \underline{U})) \partial_{x_j} u_{k-l} \\ & + (\partial_u A_j^{12}(U_0) u_{l+1} + \partial_v A_j^{12}(U_0) v_{l+1} + \mathcal{C}(A_j^{12}, l+1, \underline{U})) \partial_{x_j} v_{k-l}] \end{aligned} \tag{2.9}$$

和

$$\begin{aligned} g_k((U_i, \nabla U_i)_{0 \leqslant i \leqslant k+1}) = {} & \mathcal{C}(q, k+2, \underline{U}) + \sum_{j=1}^{d} [A_j^{21}(U_0) \partial_{x_j} u_{k+1} + A_j^{22}(U_0) \partial_{x_j} v_{k+1}] \\ & + \sum_{l=0}^{k} \sum_{j=1}^{d} [(\partial_u A_j^{21}(U_0) u_{l+1} + \partial_v A_j^{21}(U_0) v_{l+1} + \mathcal{C}(A_j^{21}, l+1, \underline{U})) \partial_{x_j} u_{k-l} \\ & + (\partial_u A_j^{22}(U_0) u_{l+1} + \partial_v A_j^{22}(U_0) v_{l+1} + \mathcal{C}(A_j^{22}, l+1, \underline{U})) \partial_{x_j} v_{k-l}]. \end{aligned} \tag{2.10}$$

由方程组 (2.8) 可得

$$v_{k+1} = \partial_v q(u_0, 0)^{-1} [\partial_t v_{k-1} + g_{k-1}((U_i, \nabla U_i)_{0 \leqslant i \leqslant k})], \quad \forall\, k \geqslant 1. \tag{2.11}$$

需要指出的是, 由于 $v_0 = 0$, 从 (2.9) 可以看出, f_k 确实不依赖于 u_{k+1}.

对 $k = 0$, 由 (2.7) 和 (2.9) 可得

$$\partial_t u_0 + \sum_{j=1}^{d} [A_j^{12}(u_0, 0) \partial_{x_j} v_1 + \partial_v A_j^{11}(U_0) v_1 \partial_{x_j} u_0] = 0.$$

再与 (2.6) 结合可见, u_0 满足下列的两阶非线性偏微分方程组:

$$\partial_t u_0 + \sum_{i,j=1}^{d} A_{ij}(u_0) \partial_{x_i x_j}^2 u_0 + \sum_{i,j=1}^{d} B_{ij}(u_0) \partial_{x_i} u_0 \partial_{x_j} u_0 = 0, \tag{2.12}$$

其中系数 A_{ij} 和 B_{ij} 由下两式定义:

$$A_{ij}(u_0) = A_i^{12}(u_0, 0) \partial_v q(u_0, 0)^{-1} A_j^{21}(u_0, 0), \tag{2.13}$$

$$B_{ij}(u_0) = A_i^{12}(u_0, 0) \partial_u [\partial_v q(u_0, 0)^{-1} A_j^{21}(u_0, 0)] + \partial_v A_j^{11}(u_0, 0) \partial_v q(u_0, 0)^{-1} A_i^{21}(u_0, 0). \tag{2.14}$$

类似地, 对 $k \geqslant 1$, 由 (2.7) 和 (2.11) 可见, u_k 满足一个两阶线性偏微分方程组, 它可写为

$$\partial_t u_k + \sum_{i,j=1}^{d} A_{ij}(u_0)\partial^2_{x_i x_j} u_k + \sum_{j=1}^{d} C_j^k \partial_{x_j} u_k + \sum_{j=1}^{d} D_j^k u_k + E_k = 0, \tag{2.15}$$

其中系数 C_j^k、D_j^k 和 E_k 可以依赖于 $(U_i)_{0\leqslant i\leqslant k-1}$ 及它关于 t 和 x 的一阶导数, 但不依赖于 u_k.

从以上推导可以看出, 由关系式 (2.6) 和 (2.11) 可知, U_k 完全由 u_k 的求解来决定, 注意到由 (2.12) 和 (2.15) 定义的方程组具有相同的主部算子

$$\partial_t + \sum_{i,j=1}^{d} A_{ij}(u_0)\partial^2_{x_i x_j},$$

所以, 矩阵 $A_{ij}(u_0)$ 完全决定了这两个方程组的性质. 下面的结果给出了这两个方程组为抛物型的一个充分条件, 它的证明可参见文献 [24].

命题 2.1 令 $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_d) \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ 和

$$A^{21}(\omega, u_0) = \sum_{j=1}^{d} \omega_j A_j^{21}(u_0, 0).$$

假设 $\mathrm{Ker}(A^{21}(\omega, u_0)) = \{0\}$, 即 $r \geqslant n-r$ 且 $A^{21}(\omega, u_0)$ 是一个满秩矩阵, 则 $\sum_{i,j=1}^{d} \omega_i\omega_j A_{ij}(u_0)$ 是一个负定矩阵, 即 (2.12) 和 (2.15) 同为严格抛物型方程组.

2.2 I_k 的方程组的推导

由于 $t = \varepsilon^2\tau$, 则有形式展开

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \varepsilon^k U_k(t,x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \varepsilon^k P_k(\tau, x), \tag{2.16}$$

其中

$$P_k(\tau, x) = \sum_{l=0}^{\lfloor k/2 \rfloor} \frac{\tau^l}{l!} \frac{\partial^l U_{k-2l}}{\partial t^l}(0, x).$$

由此得到

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \varepsilon^k (U_k(t,x) + I_k(\tau,x)) = \sum_{k=0}^{+\infty} \varepsilon^k (P_k(\tau,x) + I_k(\tau,x)). \tag{2.17}$$

现将方程组 (1.2) 用变量 (τ, x) 写为

$$\partial_\tau U + \varepsilon \sum_{j=1}^{d} A_j(U)\partial_{x_j} U = Q(U).$$

将 (2.17) 代入 (1.2) 并利用 (2.2) 可得

$$\begin{cases} \partial_\tau(I_0+P_0) = Q(I_0+P_0), \\ \partial_\tau(I_1+P_1) = Q'(I_0+P_0)(I_1+P_1) - \displaystyle\sum_{j=1}^{d} A_j(I_0+P_0)\partial_{x_j}(I_0+P_0), \\ \partial_\tau(I_k+P_k) = Q'(I_0+P_0)(I_k+P_k) + \mathcal{F}(k, \underline{I+P}), \quad \forall\, k \geqslant 2, \end{cases}$$

其中 $\mathcal{F}(k,\underline{I+P})$ 只依赖于 $\underline{I+P}\overset{\text{def}}{=}(I_i+P_i)_{i\geqslant 0}$ 的前 k 个分量, 并且由下式表示:

$$\mathcal{F}(k,\underline{I+P})=-\sum_{j=1}^{d}A_j(I_0+P_0)\partial_{x_j}(I_{k-1}+P_{k-1})-\sum_{l=0}^{k-2}\sum_{j=1}^{d}[A'_j(I_0+P_0)(I_{l+1}+P_{l+1})\\+\mathcal{C}(A_j,l+1,\underline{I+P})]\partial_{x_j}(I_{k-2-l}+P_{k-2-l}),\quad \forall\, k\geqslant 2.$$

另一方面, 由 (2.16) 可知, $\sum_{k=0}^{+\infty}\varepsilon^k P_k(\tau,x)$ 也是 (1.2) 的解, 所以也有

$$\begin{cases}\partial_\tau P_0=Q(P_0),\\ \partial_\tau P_1=Q'(P_0)P_1-\displaystyle\sum_{j=1}^{d}A_j(P_0)\partial_{x_j}P_0,\\ \partial_\tau P_k=Q'(P_0)P_k+\mathcal{F}(k,\underline{P}),\quad k\geqslant 2.\end{cases}$$

由于 $P_0(\tau,x)=U_0(0,x)$ 和 $Q(0,P_0)=0$, 可得

$$\begin{cases}\partial_\tau I_0=Q(I_0+P_0),\\ \partial_\tau I_k=Q'(I_0+P_0)I_k+[Q'(I_0+P_0)-Q'(P_0)]P_k(\tau,x)+\mathcal{G}(k,\tau,x),\quad \forall\, k\geqslant 1,\end{cases}\tag{2.18}$$

其中

$$\mathcal{G}(k,\tau,x)=\mathcal{F}(k,\underline{I+P})-\mathcal{F}(k,\underline{P}),\quad \forall\, k\geqslant 1,$$
$$\mathcal{F}(1,\underline{I+P})=-\sum_{j=1}^{d}A_j(I_0+P_0)\partial_{x_j}(I_0+P_0).$$

同样地, 将初始值 $\bar{U}$ 作形式展开得到

$$\bar{U}(x,\varepsilon)=\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k\bar{U}_k(x),\quad \bar{U}_k=\begin{bmatrix}\bar{u}_k\\ \bar{v}_k\end{bmatrix}.$$

如果 $\sum_{k=0}^{+\infty}\varepsilon^k(U_k(t,x)+I_k(\tau,x))$ 是 (1.2) 和 (1.3) 的解, 则应有

$$U_k(0,x)+I_k(0,x)=\bar{U}_k(x),$$

或等价地有

$$\begin{cases}u_k(0,x)+I_k^I(0,x)=\bar{u}_k(x),\\ v_k(0,x)+I_k^{II}(0,x)=\bar{v}_k(x),\quad \forall\, k\geqslant 0,\end{cases}\tag{2.19}$$

其中

$$I_k=\begin{bmatrix}I_k^I\\ I_k^{II}\end{bmatrix}.$$

由 (2.18) 中的第一个方程和条件 (1.7), 显然有 $\partial_\tau I_0^I=0$, 所以可取 $I_0^I=0$. 结合 $v_0=0$, 可得

$$u_0(0,x)=\bar{u}_0(x),\quad I_0^{II}(0,x)=\bar{v}_0(x).\tag{2.20}$$

这就定义了 u_0 和 I_0^{II} 的初始值. 此外, I_0^{II} 满足非线性常微分方程组

$$\partial_\tau I_0^{II} = q(\bar{u}_0(x), I_0^{II}). \tag{2.21}$$

由 (1.10) 可知, $\partial_v q(u,0)$ 为负定阵, 所以, 常微分方程组 (2.21) 在 $I_0^{II}=0$ 的附近是可求解的, 参见文献 [31] 和 [19, 引理 4.1]. 用同样的方法可以推导出 u_k 和 I_k 的初始值及 I_k 满足的线性方程组, 这里的具体计算省略, 可参见文献 [19,24].

3 方程组的局部收敛性

由上一节的讨论可知, $I_0^I=0$; u_0 和 I_0^{II} 满足非线性的偏微分或常微分方程组; 对 $k\geqslant 1$, u_k 和 I_k 满足线性的偏微分或常微分方程组, 并且 v_k 可由 $(U_i)_{0\leqslant i\leqslant k-1}$ 的求导和代数关系式 (2.6) 和 (2.11) 给出. 由于线性方程组相对容易求解, 所以, $(U_k)_{k\geqslant 0}$ 和 $(I_k)_{k\geqslant 0}$ 最终由 u_0 和 I_0^{II} 的求解来决定. 由命题 2.1 知, 我们可假设 (2.12), 即 u_0 满足的方程组是严格抛物型的, 这样根据局部存在性的理论 (参见文献 [32]), (2.12) 的 Cauchy 问题存在局部光滑解, 在 (1.7)–(1.9) 的假设下, 我们也能严格地给出 I_0^{II} 在周期区域上的求解, 参见文献 [19].

令 $m\geqslant 2$ 和 $T_m>0$. 假设已经得到了上述问题的光滑函数 $(U_k)_{0\leqslant k\leqslant m}$ 和 $(I_k)_{0\leqslant k\leqslant m}$, 它们定义在时间区域 $[0,T_m]$ 上, 并且 $I_k(\tau,\cdot)$ 关于 τ 指数衰减. 在 $[0,T_m]$ 上, 定义截断的近似解

$$U_\varepsilon^m(t,x) = \sum_{k=0}^{m} \varepsilon^k (U_k(t,x) + I_k(\tau,x)) \tag{3.1}$$

及在方程组 (1.2) 中的误差

$$R_m^\varepsilon = \partial_t U_\varepsilon^m + \frac{1}{\varepsilon}\sum_{j=1}^{d} A_j(U_\varepsilon^m)\partial_{x_j} U_\varepsilon^m - \frac{Q(U_\varepsilon^m)}{\varepsilon^2}. \tag{3.2}$$

显然, U_ε^m 是 (1.2) 的近似解的一个必要条件是, 当 $\varepsilon\to 0$ 时, $R_\varepsilon^m\to 0$. 根据引言中所述, 已知 Cauchy 问题 (1.2) 和 (1.3) 的光滑解 U^ε 定义在时间区间 $[0,T_\varepsilon)$ 上, 定义解的直接误差

$$W^\varepsilon = U^\varepsilon - U_\varepsilon^m,$$

则对所有的 $T_\varepsilon^1\in(0,T_\varepsilon)\cap(0,T_m]$, W^ε 在 $[0,T_\varepsilon^1]$ 上有定义. 当 $\varepsilon\to 0$ 时, 问题 (1.2) 和 (1.3) 的局部收敛性归结于要证明 $T_\varepsilon\geqslant T_0$, 且 W^ε 在一个不依赖于 ε 的固定时间区域上趋向于零. 更进一步, 事实上, 我们可以证明当 ε 充分小时, $T_\varepsilon>T_m$ 且 W^ε 在 $[0,T_m]$ 上趋向于零.

由 U_ε^m 的构造及直接验证可以得到 W^ε 的初始误差估计和关于 R_m^ε 的估计, 它的证明可参见文献 [19].

引理 3.1 存在不依赖于任何时间和 ε 的常数 $\mu>0$ 和 $c>0$, 使得

$$\|W^\varepsilon(0,\cdot)\|_s \leqslant c\varepsilon^m, \tag{3.3}$$

$$R_m^\varepsilon = \varepsilon^{m-1}\begin{bmatrix} 0 \\ r_m \end{bmatrix} + \varepsilon^{m-1}F_m^\varepsilon,$$

其中 $r_m \in C([0,T_m],H^s)$, $F_m^\varepsilon \in C([0,T_m],H^s)$, 并满足

$$\|F_m^\varepsilon(t)\|_s \leqslant c\varepsilon + c\mathrm{e}^{-\frac{\mu t}{\varepsilon^2}}, \quad \forall\, t \in [0,T_m].$$

引理 3.2 令 $m \geqslant 2$. 如果 $\varepsilon > 0$ 充分小, 则存在一个最大时间 $T_\varepsilon^2 \in (0,T_\varepsilon) \cap (0,T_m]$, 使得

$$\|W^\varepsilon(t)\|_s \leqslant \varepsilon, \quad \forall\, t \in [0,T_\varepsilon^2], \tag{3.4}$$

$$\|W^\varepsilon(T_\varepsilon^2)\|_s = \varepsilon \quad \text{或者} \quad T_\varepsilon^2 = T_m. \tag{3.5}$$

证明 对任何 $T_\varepsilon^1 \in (0,T_\varepsilon) \cap (0,T_m]$, 由于 $W^\varepsilon \in C([0,T_\varepsilon],H^s)$, 所以, $t \mapsto \|W^\varepsilon(t)\|_s$ 是定义在 $[0,T_\varepsilon^1]$ 上的一个连续函数. 此外, 对任何固定的整数 $m \geqslant 2$, 任何固定的常数 $c > 0$ 和充分小的 $\varepsilon > 0$, 总有 $c\varepsilon^m < \varepsilon$.

如果 $T_m < T_\varepsilon$, 则 $[0,T_\varepsilon) \cap [0,T_m] = [0,T_m]$, 这是一个有界闭区间. 由 (3.3) 可得, 存在一个最大时间 $T_\varepsilon^2 \in (0,T_m]$, 使得 (3.4) 和 (3.5) 成立, 否则 $T_m \geqslant T_\varepsilon$, 所以 $[0,T_\varepsilon) \cap [0,T_m] = [0,T_\varepsilon)$. 既然 T_ε 是 U^ε 的最大存在时间, 那么有

$$\lim_{t \to T_\varepsilon^-} \|W^\varepsilon(t)\|_s = +\infty.$$

所以仍然存在一个最大时间 $T_\varepsilon^2 \in (0,T_m]$, 使得 (3.3) 成立并且有 $\|W^\varepsilon(T_\varepsilon^2)\|_s = \varepsilon$. 这样就证明了 (3.4) 和 (3.5). □

由 (1.2) 和 (3.2), 可得

$$\partial_t W^\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon}\sum_{j=1}^d A_j(U^\varepsilon)\partial_{x_j} W^\varepsilon = \frac{a^\varepsilon}{\varepsilon} + \frac{b^\varepsilon}{\varepsilon^2} - R_m^\varepsilon, \tag{3.6}$$

其中

$$a^\varepsilon = \sum_{j=1}^d [A_j(U_\varepsilon^m) - A_j(U^\varepsilon)]\partial_{x_j} U_\varepsilon^m, \quad b^\varepsilon = Q(U^\varepsilon) - Q(U_\varepsilon^m).$$

令 $\alpha \in \mathbb{N}^d$ 为多重指标并且 $|\alpha| \leqslant s$. 记

$$\partial^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_d^{\alpha_d}}, \quad |\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_d.$$

将微分算子 ∂^α 作用于 (3.6) 并与 $A_0(U^\varepsilon)\partial^\alpha W^\varepsilon$ 在 $L^2(\mathbb{R}^d)$ 中作内积, 由矩阵 A_0 和 $\tilde{A}_j$ 的对称性, 我们得到如下能量等式 (见 (1.4)):

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\langle A_0(U^\varepsilon)\partial^\alpha W^\varepsilon, \partial^\alpha W^\varepsilon\rangle = {} & \langle \mathrm{div}_\varepsilon A(U^\varepsilon)\partial^\alpha W^\varepsilon, \partial^\alpha W^\varepsilon\rangle + \frac{2}{\varepsilon}\langle A_0(U^\varepsilon)\partial^\alpha a^\varepsilon, \partial^\alpha W^\varepsilon\rangle \\ & + \frac{2}{\varepsilon^2}\langle A_0(U^\varepsilon)\partial^\alpha b^\varepsilon, \partial^\alpha W^\varepsilon\rangle - 2\langle A_0(U^\varepsilon)\partial^\alpha R_m^\varepsilon, \partial^\alpha W^\varepsilon\rangle \\ & + \frac{2}{\varepsilon}\sum_{j=1}^d \langle A_0(U^\varepsilon) f_{\alpha j}^\varepsilon, \partial^\alpha W^\varepsilon\rangle,\end{aligned}$$

其中 $\mathrm{div}_\varepsilon A(U^\varepsilon)$ 由 (1.5) 定义,

$$f_{\alpha j}^\varepsilon = A_j(U^\varepsilon)\partial_{x_j}(\partial^\alpha W^\varepsilon) - \partial^\alpha(A_j(U^\varepsilon)\partial_{x_j} W^\varepsilon).$$

利用这个能量等式和引理 3.1, 我们可以得到下面的引理, 它给出了证明局部收敛性的一个最主要的估计, 由于这个引理的证明篇幅较长, 这里省略, 具体可参见文献 [19].

以下用 $c>0$ 表示不依赖于时间和 ε 的适当的不同常数.

引理 3.3 存在不依赖于 ε 的常数 $c_1>0$ 使得对任何 $t\in(0,T_\varepsilon^2]$ 和任何 $\alpha\in\mathbb{N}^d$, $|\alpha|\leqslant s$, 有下列能量估计:

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\langle A_0(U^\varepsilon)\partial^\alpha W^\varepsilon,\partial^\alpha W^\varepsilon\rangle+\frac{c_1}{\varepsilon^2}\|\partial^\alpha W^{II,\varepsilon}(t)\|^2\\
&\quad\leqslant\frac{c}{\varepsilon^2}\|W^{II,\varepsilon}(t)\|_{|\alpha|-1}^2+c\left(1+\frac{1}{\varepsilon^2}\nu_\varepsilon(t)\right)\|W^\varepsilon(t)\|_s^2\\
&\qquad+\frac{c}{\varepsilon^2}\|W^{II,\varepsilon}(t)\|_s\|W^\varepsilon(t)\|_s^2+c\varepsilon^{2m},
\end{aligned}\tag{3.7}$$

其中 $\|W^{II,\varepsilon}\|_{-1}=0$,

$$\nu_\varepsilon(t)=\mathrm{e}^{-\frac{\mu t}{\varepsilon^2}}.\tag{3.8}$$

关于方程组 (1.2) 的局部收敛性, 我们有如下的结果.

定理 3.1 令 $s>d/2+1$ 是正整数, U^ε 是 Cauchy 问题 (1.2) 和 (1.3) 定义于它的最大存在时间区间 $[0,T_\varepsilon)$ 上的光滑解. 令 $m\geqslant 2$ 是任意固定的整数, U_ε^m 为由渐近展开方法构造的定义于 $[0,T_m]$ 上的近似解, 并且 T_m 不依赖于 ε. 假设 (1.6)–(1.9) 成立, 则存在 $\varepsilon_0>0$ 使得对所有的 $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$, 有 $T_\varepsilon>T_m$ 和

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T_m}\|U^\varepsilon(t)-U_\varepsilon^m(t)\|_s\leqslant c\varepsilon^m,\tag{3.9}$$

并且

$$\int_0^{T_m}\|v^\varepsilon(t)-v_\varepsilon^m(t)\|_s^2dt\leqslant c\varepsilon^{2(m+1)}.\tag{3.10}$$

证明 为简单起见, 在证明中, 我们去掉所有的上标 ε. 首先证明

$$\|W(t)\|_s^2+\frac{1}{\varepsilon^2}\int_0^t\|W^{II}(t')\|_s^2dt'\leqslant c\varepsilon^{2m},\quad\forall\,t\in[0,T_\varepsilon^2].\tag{3.11}$$

在引理 3.3 中, 当 $|\alpha|=1$ 时, (3.7) 的右端项 $\frac{c}{\varepsilon^2}\|W^{II}\|^2$ 可被它的左端项 $\frac{c_1}{\varepsilon^2}\|W^{II}\|^2$ 当 $|\alpha|=0$ 时来控制. 更一般地, 令 $\eta\in(0,1]$. 将 (3.7) 乘以 $\eta^{|\alpha|}$ 并对所有的指标 $\alpha\in\mathbb{N}^d$ 和 $|\alpha|\leqslant s$ 作和可得

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\sum_{|\alpha|\leqslant s}\eta^{|\alpha|}\langle A_0(U^\varepsilon)\partial^\alpha W,\partial^\alpha W\rangle+\frac{c_1}{\varepsilon^2}\sum_{|\alpha|\leqslant s}\eta^{|\alpha|}\|\partial^\alpha W^{II}(t)\|^2\\
&\quad\leqslant\frac{c}{\varepsilon^2}\sum_{|\alpha|\leqslant s-1}\eta^{|\alpha|+1}\|W^{II}(t)\|_{|\alpha|}^2+c\left(1+\frac{1}{\varepsilon^2}\nu_\varepsilon(t)\right)\|W(t)\|_s^2\\
&\qquad+\frac{c}{\varepsilon^2}\|W^{II}(t)\|_s\|W(t)\|_s^2+c\varepsilon^{2m},
\end{aligned}$$

其中常数 c 不依赖于 η. 现令 η 充分小, 则有

$$\frac{c}{\varepsilon^2}\sum_{|\alpha|\leqslant s-1}\eta^{|\alpha|+1}\|W^{II}(t)\|_{|\alpha|}^2\leqslant\frac{c_1}{2\varepsilon^2}\sum_{|\alpha|\leqslant s}\eta^{|\alpha|}\|\partial^\alpha W^{II}(t)\|^2,$$

$$\frac{c_1\eta^s}{2\varepsilon^2}\|W^{II}(t)\|_s^2 \leqslant \frac{c_1}{2\varepsilon^2}\sum_{|\alpha|\leqslant s}\eta^{|\alpha|}\|\partial^\alpha W^{II}(t)\|^2.$$

所以,

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\sum_{|\alpha|\leqslant s}\eta^{|\alpha|}\langle A_0(U^\varepsilon)\partial^\alpha W,\partial^\alpha W\rangle+\frac{c_1\eta^s}{2\varepsilon^2}\|W^{II}(t)\|_s^2\\&\quad\leqslant c\bigg(1+\frac{1}{\varepsilon^2}\nu_\varepsilon(t)\bigg)\|W(t)\|_s^2+\frac{c}{\varepsilon^2}\|W^{II}(t)\|_s\|W(t)\|_s^2+c\varepsilon^{2m}.\end{aligned}$$

由 Young 不等式可得

$$c\|W^{II}(t)\|_s\|W(t)\|_s^2 \leqslant \frac{c_1\eta^s}{4}\|W^{II}(t)\|_s^2+\frac{c^2}{c_1\eta^s}\|W(t)\|_s^4.$$

利用 (3.4), 我们得到

$$\frac{d}{dt}\sum_{|\alpha|\leqslant s}\eta^{|\alpha|}\langle A_0(U^\varepsilon)\partial^\alpha W,\partial^\alpha W\rangle+\frac{c_1\eta^s}{4\varepsilon^2}\|W^{II}(t)\|_s^2\leqslant c\bigg(1+\frac{1}{\eta^s}+\frac{1}{\varepsilon^2}\nu_\varepsilon(t)\bigg)\|W(t)\|_s^2+c\varepsilon^{2m}.$$

现固定 $\eta>0$. 注意到

$$\sum_{|\alpha|\leqslant s}\eta^{|\alpha|}\langle A_0(U^\varepsilon)\partial^\alpha W,\partial^\alpha W\rangle \Leftrightarrow \|W\|_s^2.$$

对任何 $t\in(0,T_\varepsilon^2]$, 将上述不等式在 $[0,t]$ 上积分并利用 (3.3) 可得

$$\|W(t)\|_s^2+\frac{1}{\varepsilon^2}\int_0^t\|W^{II}(t')\|_s^2dt'\leqslant c\int_0^t\bigg(1+\frac{1}{\varepsilon^2}\nu_\varepsilon(t')\bigg)\|W(t')\|_s^2dt'+c\varepsilon^{2m},\quad \forall\, t\in[0,T_\varepsilon^2].$$

再注意到

$$\forall\, t\leqslant T_\varepsilon^2\leqslant T_m,\quad \int_0^t\bigg(1+\frac{1}{\varepsilon^2}\nu_\varepsilon(t')\bigg)dt'\leqslant \text{const}.$$

所以, 由 Gronwall 不等式可得 (3.11).

最后证明 $T_\varepsilon>T_m$. 由 T_ε^2 的定义知, 我们只需证明 $T_\varepsilon^2=T_m$. 由引理 3.2 可知, $T_\varepsilon^2\in(0,T_\varepsilon)\cap(0,T_m]$ 并且 $[0,T_\varepsilon^2]$ 是使 (3.4) 和 (3.5) 成立的最大区间. 另一方面, 由 (3.11) 可得

$$\|W(t)\|_s\leqslant c\varepsilon^m,\quad \forall\, t\in[0,T_\varepsilon^2].$$

特别地, $\|W(T_\varepsilon^2)\|_s\leqslant c\varepsilon^m$. 当 $m\geqslant 2$ 并且 ε 充分小时, 对所有固定的常数 $c>0$, 总是有 $c\varepsilon^m<\varepsilon$. 这样由 (3.5) 就得到 $T_\varepsilon^2=T_m$. □

推论 3.1 在定理 3.1 的假设下, u^ε 在 $C([0,T_m],H^s)$ 中一致收敛于抛物型方程组 (2.12) 满足 (2.20) 中初值的光滑解 u_0, 并且有误差估计

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T_m}\|u^\varepsilon(t)-u_0(t)\|_s\leqslant c\varepsilon. \tag{3.12}$$

证明 由 (3.9) 得到

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T_m}\|u^\varepsilon(t)-u_\varepsilon^m(t)\|_s\leqslant c\varepsilon^m.$$

由于 $I_0^I=0$, 利用 (3.1), 在 $C([0,T_m],H^s)$ 中关于 ε 一致性地成立

$$u_\varepsilon^m=u_0+O(\varepsilon).$$

再结合 $m\geqslant 2$ 就得到 (3.12), 最后由此式就得到 u^ε 在 $C([0,T_m],H^s)$ 中一致收敛于 u_0, 所以, $u^\varepsilon-u_0$ 的初始值在 H^s 中强收敛于零. □

注 3.1 Lattanzio 和 Yong [24] 考虑了下列形式的一阶拟线性对称双曲型方程组的零松弛极限:

$$\partial_t U+\frac{1}{\varepsilon}\sum_{j=1}^d A_j(\varepsilon U)\partial_{x_j}U+\sum_{j=1}^d \bar{A}_j(U)\partial_{x_j}U=\frac{Q(U)}{\varepsilon^2}, \tag{3.13}$$

并假设 $A_j^{11}(0)=0$. 对于由 (1.3) 给出的光滑初值, 他们同样证明了局部光滑解的收敛性. 在这个方程组中, 奇性项仅来自于 $A_j(\varepsilon U)/\varepsilon$ 和 $Q(U)/\varepsilon^2$, 处理包含 $\bar{A}_j(U)$ 的项是没有任何困难的, 第一个奇性项的好处在于, 对任何 $\alpha\in\mathbb{N}^d$, $|\alpha|\geqslant 1$, $\partial^\alpha(A_j(\varepsilon U)/\varepsilon)$ 本质上没有奇性, 这对处理高阶能量估计带来极大的便利. 现在将 (1.8) 写为

$$\partial_t U+\frac{1}{\varepsilon}\sum_{j=1}^d A_j(0)\partial_{x_j}U+\sum_{j=1}^d\left(\bar{A}_j(U)+\frac{A_j(\varepsilon U)-A_j(0)}{\varepsilon}\right)\partial_{x_j}U=\frac{Q(U)}{\varepsilon^2}.$$

既然 $(A_j(\varepsilon U)-A_j(0))/\varepsilon$ 本质上没有奇性, 我们可以看出 (3.13) 只是半线性方程组的一个推广. 在最后一节的例子中我们可以看到, 文献 [24] 中的结果不能应用于给出的任何一个拟线性方程组的例子.

注 3.2 比方程组 (1.2) 更一般的一个情形是, 它的右端项 Q 不仅依赖于 U 还依赖于 ε, 即 $Q=Q(\varepsilon,U)$, 此时光滑解的局部收敛性的结果也已经在文献 [19] 中得到, 这种情形包含了一个 Euler-Maxwell 方程组, 它是关于等离子体物理的一个模型.

4 方程组的整体收敛性

在本节中, 为简单起见, 假设 (1.3) 中的初始值 $\bar{U}$ 不依赖于 ε: $\bar{U}=\bar{U}(x)$.

方程组 (1.2) 关于时间的整体收敛性与它的光滑解的整体存在性具有紧密的联系, 事实上, 它是建立在解关于 ε 的一致整体存在性的基础上. 首先固定参数, 取 $\varepsilon=1$, 考虑带部分耗散结构的守恒律方程组

$$\partial_t U+\sum_{j=1}^d \partial_{x_j}F_j(U)=Q(U). \tag{4.1}$$

方程组 (1.2) 或 (4.1) 的平衡态是指常数向量 $U_e\in G$ 使得 $Q(U_e)=0$, 它显然是方程组 (4.1) 的一个特解. 由假设 (1.7) 和 (1.8) 可得 $U_e=(u_e,0)$, 其中 $u_e\in\mathbb{R}^{n-r}$ 为常数向量. 关于方程组 (4.1) 光滑解整体存在性的证明本质上需要两个条件, 第一个是熵耗散条件

$$[\eta'(U)-\eta'(U_e)]Q(U)\leqslant -c_0|q(U)|^2, \tag{4.2}$$

其中 η 表示 (4.1) 的一个严格凸熵. 这个条件与 (1.9) 类似, 并且, 如果 (1.2) 由守恒律方程组 (4.1) 得到, 如 $A_j=F_j'$, 则由 (4.2) 可得到耗散条件 (1.9), 参见文献 [18]. 在引言中已经提到, 由耗散条件可得

到能量估计中变量 v 的耗散估计. 第二个条件现在被称为 Shizuta-Kawashima 条件, 可参见文献 [33], 以下它也被简记为 (SK), 对于方程组 (1.2), 这个条件可写为

$$\forall\, \omega=(\omega_1,\dots,\omega_d)\in\mathcal{S}^{d-1},\quad \mathrm{Ker}(Q'(U_e))\ \text{不包含矩阵}\ \sum_{j=1}^d \omega_j A_j(U_e)\ \text{的任何右特征向量}, \tag{4.3}$$

其中 Ker 表示核算子, $\mathcal{S}^{d-1}$ 表示 $\mathbb{R}^n$ 中的单位球面, 由 (SK) 条件可以得到 ∇u 的耗散估计. 在上述的两个条件之下, 方程组 (4.1) 的 Cauchy 问题在平衡态附近整体光滑解的存在性已经被证明, 参见一维空间的结果[17] 和高维空间的结果[18]. 并且文献 [26, 34] 还研究了解的长时间行为. 需要指出的是, (SK) 条件并不是光滑解整体存在性的必要条件, 已知对多个不满足 (SK) 条件的部分耗散的拟线性双曲型方程组, 可以得到带小初值的整体光滑解的存在性, 这方面的结果可参见文献 [30, 35–37].

现考虑依赖于 ε 的方程组 (1.2), 此时, 文献 [17, 18] 中的结果可以简单地表述如下. 令 $s>d/2+1$ 为正整数. 存在依赖于 ε 的常数 $\delta_\varepsilon\in(0,1]$ 和 $c_\varepsilon>0$, 使得当 $\|\bar U-U_e\|_s\leqslant\delta_\varepsilon$ 时, Cauchy 问题 (1.2) 和 (1.3) 存在唯一的整体光滑解 U^ε, 并满足

$$\|U^\varepsilon(t)-U_e\|_s\leqslant c_\varepsilon\|\bar U-U_e\|_s,\quad \forall\, t\geqslant 0.$$

在这个结果中, 有可能出现一个平凡的情形, 即

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\delta_\varepsilon=0,$$

此时, 当 $\varepsilon\to 0$ 时, 初始值只可取常数状态 U_e. 反之, 如果能够证明 δ_ε 和 c_ε 确实不依赖于 ε, 则上述情形可以得到避免, 这里涉及一致整体存在性的问题. 为此, 除了假设 (1.6)–(1.9) 和 (SK) 之外, 我们还需要对对称子 A_0 作下列的一个技术性的假设:

$$\forall\,(u,0)\in G_e,\quad \partial_v A_0^{11}(u,0)=0, \tag{4.4}$$

其中 $G_e\subset G$ 是 $(u_e,0)$ 的一个邻域. 注意到这个假设在 $n-r=1$ 时总是满足的, 事实上, 此时 A_0^{11} 是一个取正值的函数, 所以可以用新的对称子 $(A_0^{11})^{-1}A_0$ 来代替 A_0 使得上述条件满足.

对于带阻尼等熵的空气动力学方程组, 光滑解的一致整体存在性和收敛性问题已经得到了解决, 可参见文献 [25, 27]. 此后, 文献 [26] 考虑了具有 (1.2) 形式的一些特殊方程组, 其中 $A_j(v)$ 为对称阵, 并不依赖于 u, 在这些假设下, 作者也得到了光滑解的一致整体存在性, 但没有研究解的收敛性. 另外一个例子是在辐射迁移理论中得到的 $M1$ 模型, 作者也得到了类似的结果, 可参见文献 [28]. 本节对一般的方程组 (1.2) 考虑这个问题, 上述的几个例子可看作我们结果的特殊情形.

我们的主要结果如下.

定理 4.1 令 $s>d/2+1$ 为正整数, $\bar U-U_e\in H^s$. 假设条件 (1.6)–(1.9)、(4.3) 和 (4.4) 都成立, 则存在不依赖于 ε 的正常数 δ 和 c, 使得当 $\|\bar U-U_e\|_s\leqslant\delta$ 时, 对所有的 $\varepsilon\in(0,1]$, Cauchy 问题 (1.2) 和 (1.3) 具有唯一的整体光滑解 U^ε, 并满足 $U^\varepsilon-U_e\in C(\mathbb{R}^+;H^s)\cap C^1(\mathbb{R}^+;H^{s-1})$ 和

$$\|U^\varepsilon(t)-U_e\|_s^2+\int_0^t\left(\|\nabla u^\varepsilon(\tau)\|_{s-1}^2+\frac{1}{\varepsilon^2}\|v^\varepsilon(\tau)\|_s^2\right)d\tau\leqslant c\|\bar U-U_e\|_s^2,\quad \forall\, t\geqslant 0. \tag{4.5}$$

定理 4.1 的证明主要是建立关于时间和 ε 的一致估计 (4.5), 这个过程需要一定的篇幅, 这里省略, 具体细节可参见文献 [20]. 现在引入

$$w^\varepsilon=\frac{v^\varepsilon}{\varepsilon}. \tag{4.6}$$

关于定理 4.1 中得到的光滑解的整体收敛性结果可以叙述如下.

定理 4.2 在定理 4.1 的假设下, 当 $\varepsilon \to 0$ 时, 解序列 $(u^\varepsilon, w^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ 在下列意义下收敛:

$$u^\varepsilon \rightharpoonup u, \quad \text{在 } L^\infty(\mathbb{R}^+, H^s) \text{ 中弱 -* 收敛}, \tag{4.7}$$

$$w^\varepsilon \rightharpoonup w, \quad \text{在 } L^2(\mathbb{R}^+, H^s) \text{ 中弱收敛}. \tag{4.8}$$

并对所有的 $T > 0$ 和 $s' \in [0, s)$,

$$u^\varepsilon \to u, \quad \text{在 } C([0,T], H^{s'}_{\rm loc}) \text{ 中一致收敛}. \tag{4.9}$$

此外, 极限 (u, w) 满足 $u - u_e \in L^\infty(\mathbb{R}^+, H^s)$, $w \in L^2(\mathbb{R}^+, H^s)$, u 是方程组 (2.12) 满足初值

$$u(0, x) = \bar{u}(x) \tag{4.10}$$

的一个整体光滑解.

证明 首先指出, 将 (1.2) 写成分块的形式, 则 $(u^\varepsilon, w^\varepsilon)$ 满足

$$\begin{cases} \partial_t u^\varepsilon + \dfrac{1}{\varepsilon}\displaystyle\sum_{j=1}^d A_j^{11}(u^\varepsilon, \varepsilon w^\varepsilon)\partial_{x_j} u^\varepsilon + \sum_{j=1}^d A_j^{12}(u^\varepsilon, \varepsilon w^\varepsilon)\partial_{x_j} w^\varepsilon = 0, \\ \varepsilon^2 \partial_t w^\varepsilon + \displaystyle\sum_{j=1}^d A_j^{21}(u^\varepsilon, \varepsilon w^\varepsilon)\partial_{x_j} u^\varepsilon + \varepsilon \sum_{j=1}^d A_j^{22}(u^\varepsilon, \varepsilon w^\varepsilon)\partial_{x_j} w^\varepsilon = \dfrac{1}{\varepsilon} q(u^\varepsilon, \varepsilon w^\varepsilon). \end{cases} \tag{4.11}$$

由能量估计 (4.5) 可得, $(u^\varepsilon - u_e)_{\varepsilon>0}$ 在 $L^\infty(\mathbb{R}^+; H^s)$ 中有界, $(w^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ 在 $L^2(\mathbb{R}^+; H^s)$ 中有界. 由此推得, 存在函数 u 和 w, 满足 $u - u_e \in L^\infty(\mathbb{R}^+; H^s)$, $w \in L^2(\mathbb{R}^+; H^s)$, 并使得当 $\varepsilon \to 0$ 时, 通过抽取子序列 (仍用同样的记号, 下同), 有

$$\begin{aligned} &u^\varepsilon \rightharpoonup u, \quad \text{在 } L^\infty(\mathbb{R}^+; H^s) \text{ 中弱 -* 收敛}, \\ &w^\varepsilon \rightharpoonup w, \quad \text{在 } L^2(\mathbb{R}^+, H^s) \text{ 中弱收敛}, \\ &\varepsilon w^\varepsilon \to 0, \quad \text{在 } L^2(\mathbb{R}^+, H^s) \text{ 中强收敛}. \end{aligned}$$

由于 $A_j^{11}(u, 0) = 0$, 由 (4.11) 中的第一个方程组可知, $(\partial_t u^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ 在 $L^2(\mathbb{R}^+; H^{s-1})$ 中有界. 所以, $\partial_t u \in L^2(\mathbb{R}^+; H^{s-1})$, 并且存在子序列, 使得当 $\varepsilon \to 0$ 时, 有

$$\partial_t u^\varepsilon \rightharpoonup \partial_t u, \quad \text{在 } L^2(\mathbb{R}^+, H^{s-1}) \text{ 中弱收敛}.$$

令 $T > 0$ 和 $R > 0$, 则 $(u^\varepsilon - u_e)_{\varepsilon>0}$ 和 $(\partial_t u^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ 分别在 $L^2(0, T; H^s(B_R))$ 和 $L^2(0, T; H^{s-1}(B_R))$ 中有界. 由紧致性定理可得 (可参见文献 [38]), 对所有的 $s' \in [0, s)$, $(u^\varepsilon - u_e)_{\varepsilon>0}$ 是 $C([0, T]; H^{s'}(B_R))$ 中的相对紧集. 所以, 通过再次抽取子序列可得

$$u^\varepsilon \to u, \quad \text{在 } C([0, T]; H^{s'}(B_R)) \text{ 中一致收敛}.$$

由此得到, 当 $\varepsilon \to 0$ 时,

$$A_j(u^\varepsilon, \varepsilon w^\varepsilon) \to A_j(u, 0), \quad \text{在 } L^2(0, T; H^{s'}(B_R)) \text{ 中强收敛}.$$

由极限的唯一性可得, 当 $\varepsilon\to 0$ 时,

$$A_j(u^\varepsilon,\varepsilon w^\varepsilon)\begin{bmatrix}\partial_{x_j}u^\varepsilon\\ \partial_{x_j}w^\varepsilon\end{bmatrix}\rightharpoonup A_j(u,0)\begin{bmatrix}\partial_{x_j}u\\ \partial_{x_j}w\end{bmatrix},\quad \text{在 } L^2(0,T;H^{s-1}(B_R)) \text{ 中弱收敛},$$

并且

$$\varepsilon\sum_{j=1}^d A_j^{22}(u^\varepsilon,\varepsilon w^\varepsilon)\partial_{x_j}w^\varepsilon\to 0,\quad \text{在 } L^2(0,T;H^{s-1}(B_R)) \text{ 中强收敛}.$$

另一方面, 利用 (1.6) 可得

$$\begin{aligned}\frac{1}{\varepsilon}A_j^{11}(u^\varepsilon,\varepsilon w^\varepsilon)&=\frac{1}{\varepsilon}[A_j^{11}(u^\varepsilon,\varepsilon w^\varepsilon)-A_j^{11}(u^\varepsilon,0)]\\&\rightharpoonup\partial_v A_j^{11}(u,0)w,\quad \text{在 } L^2(0,T;H^{s-1}(B_R)) \text{ 中弱收敛}.\end{aligned}$$

同理可得

$$\frac{1}{\varepsilon}q(u^\varepsilon,\varepsilon w^\varepsilon)\rightharpoonup\partial_v q(u,0)w,\quad \text{在 } L^2(0,T;H^{s-1}(B_R)) \text{ 中弱收敛}.$$

并对所有的 $s'\in[1,s)$, 有

$$\partial_{x_j}u^\varepsilon\to\partial_{x_j}u,\quad \text{在 } C([0,T];H^{s'-1}(B_R)) \text{ 中一致收敛}.$$

由此得到

$$\frac{1}{\varepsilon}A_j^{11}(u^\varepsilon,\varepsilon w^\varepsilon)\partial_{x_j}u^\varepsilon\rightharpoonup\partial_v A_j^{11}(u,0)w\partial_{x_j}u,\quad \text{在 } L^2(0,T;H^{s-1}(B_R)) \text{ 中弱收敛}.$$

这样, 在广义函数的意义下, 我们可以在方程组 (4.11) 中通过极限并得到

$$\begin{cases}\partial_t u+\sum_{j=1}^d A_j^{12}(u,0)\partial_{x_j}w+\sum_{j=1}^d\partial_v A_j^{11}(u,0)w\partial_{x_j}u=0,\\ \sum_{j=1}^d A_j^{21}(u,0)\partial_{x_j}u=\partial_v q(u,0)w.\end{cases}$$

既然 $\partial_v q(u,0)$ 是可逆矩阵, 我们就证明了极限函数 u 满足方程组 (2.12). 现考虑 u 的初始值. 由于 u^ε 在 $C([0,T];H^{s'}(B_R))$ 中强收敛于 u, 因此有

$$u^\varepsilon(0,\cdot)\to u(0,\cdot),\quad \text{在 } H^{s'}(B_R) \text{ 中强收敛}.$$

再由 $u^\varepsilon(0,x)=\bar{u}(x)$ 可得, 在 $H^{s'}(B_R)$ 中成立 $u(0,\cdot)=\bar{u}(\cdot)$. 最后由 R 的任意性及 $s'\geqslant k-1>d/2$ 和连续嵌入 $H^{k-1}(\mathbb{R}^d)\hookrightarrow C(\mathbb{R}^d)$ 可得, $u(0,x)=\bar{u}(x)$ 对所有的 $x\in\mathbb{R}^d$ 成立. □

在定理 4.2 中, 除了解序列的整体收敛性, 我们还得到了极限方程组的 Cauchy 问题 (2.12) 和 (4.10) 的解的整体存在性. 这个结果提示了方程组 (2.12) 具有一些好的性质. 事实上, 我们可以证明它确实是严格抛物型方程组. 所以, Cauchy 问题 (2.12) 和 (4.10) 具有唯一光滑解.

命题 4.1 在定理 4.1 的假设下, 存在 u_e 的一个不依赖于 ω 的邻域 Ω_e 使得 (2.12) 在 Ω_e 中是严格抛物型方程组, 即对所有的 $u\in\Omega_e$ 和 $\omega\in\mathcal{S}^{d-1}$,

$$\sum_{i,j=1}^d\omega_i\omega_j A_{ij}(u)\tag{4.12}$$

是负定矩阵, 其中 $A_{ij}(u)$ 由 (2.13) 定义. 并且 Cauchy 问题 (2.12) 和 (4.10) 具有唯一的光滑解 u, 并满足

$$\|u(t,\cdot)-u_e\|_s^2+\int_0^t\|\nabla u(\tau,\cdot)\|_s^2d\tau\leqslant c\|\bar u-u_e\|_s^2,\quad \forall\, t\geqslant 0. \tag{4.13}$$

证明 首先定义矩阵

$$A(\omega,u)=\sum_{j=1}^d\omega_jA_j(u,0).$$

在引言中已经提到, 由假设 (1.7)–(1.9) 可得 $A_0^{12}(u,0)=0$ 且 $\partial_vq(u,0)$ 是负定阵. 将条件 (SK) 展开可知, 它等价于

$$\forall\,\omega\in\mathcal{S}^{d-1},\quad \mathrm{Ker}(A^{21}(\omega,u_e))\ \text{不包含}\ A^{11}(\omega,u_e)\ \text{的任何右特征向量}.$$

因为 $\mathcal{S}^{d-1}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的紧致集, 所以, 上述等价性条件蕴含着, 存在 u_e 的一个邻域 Ω_e 使得对所有的 $u\in\Omega_e$ 和 $\omega\in\mathcal{S}^{d-1}$, $\mathrm{Ker}(A^{21}(\omega,u))$ 不包含 $A^{11}(\omega,u)$ 的任何右特征向量. 另一方面, 由 (1.6) 可得 $A^{11}(\omega,u)=0$, 所以对所有的 $u\in\Omega_e$ 和 $\omega\in\mathcal{S}^{d-1}$, 有

$$\mathrm{Ker}(A^{21}(\omega,u))=\{0\}.$$

由此得到 $r\geqslant n-r$. 最后由矩阵的秩定理可知,

$$\mathrm{rank}(A^{21}(\omega,u))=n-r,$$

即 $A^{21}(\omega,u)$ 是满秩矩阵. 这样由命题 2.1 就得到由 (4.12) 定义的矩阵是负定的.

由方程组的严格抛物性质很容易得到解的唯一性和能量估计 (4.13), 可参见文献 [39]. □

定理 4.1 给出了 Cauchy 问题 (1.2) 和 (1.3) 的光滑解对于 $\varepsilon\in(0,1]$ 的一致整体存在性, 由于 (1.2) 为非守恒律的方程组, 它特别地给出了在 $\varepsilon=1$ 时关于拟线性双曲型非守恒律方程组光滑解的整体存在性. 这里要说明的是, 所有的守恒律方程组都可写为非守恒律方程组的形式, 另外, 确实存在一些有物理意义的非守恒律方程组的模型, 它们不能写为守恒律方程组的形式, 具体可参见文献 [40–42]. 事实上, 对于这个问题, 我们可以得到下面叙述的一个更进一步的结果, 它的证明可参见文献 [20]. 这个结果将文献 [17,18] 中关于守恒律方程组光滑解的整体存在性推广至非守恒律的方程组, 在证明上它们互相之间的差别仅在于 L^2 的能量估计, 因为不管对守恒律方程组还是非守恒律方程组, 高价能量估计都是由对称双曲型方程组的性质来得到的. 这个结果说明了, 当 ε 固定时, 我们不需要技术性的条件 (4.4) 就能得到光滑解的整体存在性.

定理 4.3 令 $s>d/2+1$ 为正整数, $\varepsilon=1$. 令 $\bar U-U_e\in H^s$. 假设条件 (1.6)–(1.9) 和 (SK) 都成立, 则当 $\bar U$ 在 H^s 中充分接近于 U_e 时, Cauchy 问题 (1.2) 和 (1.3) 存在唯一的整体光滑解 U 并满足

$$U-U_e\in C(\mathbb{R}^+;H^s)\cap C^1(\mathbb{R}^+;H^{s-1}).$$

特别地, 当 $d\geqslant 3$ 时, 在上述的结论中, 我们不需要条件 (1.6) 就能得到整体光滑解的存在唯一性.

注 4.1 在定理 4.1–4.3 中, 条件 (1.6)、(1.8)、(1.9) 和 (4.4) 不是最优的. 例如, 在定理 4.1 和 4.3 中, 条件 (1.6) 可减弱为, 对所有的 u, $A_j^{11}(u,0)$ 和 $\tilde A_j^{11}(u,0)$ 都为常数矩阵, 并且

$$\partial_uA_j^0(u,0)A_j^{11}(u,0)=0.$$

此外, 由于我们只考虑在 $(u_e,0)$ 附近的整体光滑解, 相应的一些假设也只需在 $(u_e,0)$ 的一个邻域中成立即可, 具体的比 (1.6)、(1.8)、(1.9) 和 (4.4) 更弱的充分条件已在文献 [20] 中作了详细的讨论.

5 例子

下面给出一些应用的例子, 用慢时间变量 t, 它们的方程组都具有 (1.2) 的形式, 其中除一个是半线性方程组, 其他都是非线性方程组, 可以验证它们都满足条件 (1.6)–(1.9)、(4.3) 和 (4.4), 所以, 它们都在定理 3.1 和 4.1–4.3 的应用范围内.

例 5.1 (广义离散的两速度模型) 这是一个一维半线性方程组, 它可以写为 (可参见文献 [43–45])

$$\begin{cases}\partial_t f+\dfrac{1}{\varepsilon}\partial_x f=\dfrac{(f+g)^\gamma(g-f)}{\varepsilon^2},\\ \partial_t g-\dfrac{1}{\varepsilon}\partial_x g=\dfrac{(f+g)^\gamma(f-g)}{\varepsilon^2}, \quad t>0, \quad x\in\mathbb{R},\end{cases}$$

其中 γ 是实数, $f+g>0$. 作未知变量代换:

$$u=f+g, \quad v=f-g,$$

则方程组可写为

$$\begin{cases}\partial_t u+\dfrac{1}{\varepsilon}\partial_x v=0,\\ \partial_t v+\dfrac{1}{\varepsilon}\partial_x u=-\dfrac{2u^\gamma v}{\varepsilon^2}.\end{cases}$$

现令

$$U=\begin{bmatrix}u\\ v\end{bmatrix}, \quad A_1=\begin{bmatrix}0&1\\ 1&0\end{bmatrix}, \quad q(U)=-2u^\gamma v,$$

则方程组具有 (1.2) 的形式, 对应于 $n=2$ 和 $r=1$, 并且它为对称双曲组, 相应的对称子为单位阵. 很容易验证这个方程组满足条件 (1.6)–(1.9)、(4.3) 和 (4.4), 当 $\varepsilon\to 0$ 时, u 的极限满足非线性抛物型方程

$$\partial_t u_0-\frac{1}{2}\partial_x(u_0^{-\gamma}\partial_x u_0)=0.$$

例 5.2 (带阻尼项的空气动力学方程组) 对于光滑解, 这个方程组可写为

$$\begin{cases}\partial_t\rho+\dfrac{1}{\varepsilon}\operatorname{div}(\rho v)=0,\\ \partial_t v+\dfrac{1}{\varepsilon}(v.\nabla)v+\dfrac{1}{\varepsilon}\nabla h(\rho)=-\dfrac{v}{\varepsilon^2}, \quad t>0, \quad x\in\mathbb{R}^d,\end{cases}$$

其中 $\rho>0$ 和 v 分别表示气体的密度和速度, h 表示焓函数, 它与压力函数 p 的关系由下式来定义:

$$h'(\rho)=\frac{p'(\rho)}{\rho}.$$

通常我们假设对所有的 $\rho>0$, 有 $p'(\rho)>0$. 由于这个方程组的重要性, 前人已对它有很多的研究, 可参见文献 [22, 25, 27, 46].

现引入

$$U=\begin{bmatrix}\rho\\ v\end{bmatrix}, \quad A_j(U)=\begin{bmatrix}v_j & \rho e_j^{\mathrm{T}}\\ h'(\rho)e_j & v_j I_d\end{bmatrix}, \quad j\in\{1,\ldots,d\}, \quad q(U)=-v,$$

则方程组是具有 (1.2) 形式的对称双曲组, 它的对称子为

$$A_0(U)=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & \rho(h'(\rho))^{-1}I_d\end{bmatrix},$$

并且

$$\tilde{A}_j(U)=A_0(U)A_j(U)=\begin{bmatrix}v_j & \rho e_j^{\mathrm{T}}\\ \rho e_j & \rho(h'(\rho))^{-1}v_jI_d\end{bmatrix}.$$

很容易验证这个方程组满足条件 (1.6)–(1.9)、(4.3) 和 (4.4), 当 $\varepsilon\to 0$ 时, ρ 的极限满足非线性抛物型方程

$$\partial_t\rho_0-\Delta p(\rho_0)=0,$$

并且它是线性方程的充要条件是 p 为线性函数.

例 5.3 (一维 Lagrange 坐标下带阻尼项的空气动力学方程组)　在例 5.2 中, 令 $dy=\rho dx-\rho vdt$, 则 Lagrange 坐标 (t,y) 当 $\rho>0$ 时有定义, 在这个坐标下, 一维带阻尼项的空气动力学方程组可写为

$$\begin{cases}\partial_t\tau-\dfrac{1}{\varepsilon}\partial_y v=0,\\ \partial_t v+\dfrac{1}{\varepsilon}\partial_y\bar{p}(\tau)=-\dfrac{v}{\varepsilon^2},\quad t>0,\quad y\in\mathbb{R},\end{cases}$$

其中

$$\tau=\frac{1}{\rho},\quad \bar{p}(\tau)=p\bigg(\frac{1}{\tau}\bigg).$$

文献 [47] 研究了当 $\varepsilon>0$ 固定时, 整体光滑解的长时间行为. 如果当 $\rho>0$ 时, 有 $p'(\rho)>0$, 则当 $\tau>0$ 时, 必有 $\bar{p}'(\tau)<0$. 令

$$U=\begin{bmatrix}\tau\\ v\end{bmatrix},\quad A_1(U)=\begin{bmatrix}0 & -1\\ \bar{p}'(\tau) & 0\end{bmatrix},$$

$$A_0(U)=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -(\bar{p}'(\tau))^{-1}\end{bmatrix},\quad q(U)=-v.$$

则方程组是具有 (1.2) 形式的对称双曲组, 它的对称子为 A_0. 很容易验证这个方程组满足条件 (1.6)–(1.9)、(4.3) 和 (4.4), 当 $\varepsilon\to 0$ 时, τ 的极限满足非线性抛物型方程

$$\partial_t\tau_0+\partial_{yy}^2 p\bigg(\frac{1}{\tau_0}\bigg)=0.$$

我们注意到当 $\tau\mapsto p(1/\tau)$ 是线性函数时, 极限方程组也是线性的, 这种情形对 Chaplygin 气体成立, 此时, $p(\rho)=-\rho^{-1}$.

例 5.4 (M1 模型)　这个模型产生于辐射迁移理论, 在一维情形, 关于它的一致整体收敛性的问题已在文献 [28] 中作了研究. 这个模型可写为

$$\begin{cases}\partial_t\rho+\dfrac{1}{\varepsilon}\partial_x(\rho v)=0,\\ \partial_t(\rho v)+\dfrac{1}{\varepsilon}\partial_x(\rho B(v))=-\dfrac{v}{\varepsilon^2},\quad t>0,\quad x\in\mathbb{R},\end{cases}$$

其中

$$\rho > 0, \quad v < \frac{2}{\sqrt{3}}, \quad B(v) = \frac{1}{3} + \frac{2v^2}{2+\Delta(v)},$$

这里

$$\Delta(v) = \sqrt{4-3v^2}.$$

令

$$U = \begin{bmatrix} \rho \\ v \end{bmatrix}, \quad A_1(U) = \begin{bmatrix} v & \rho \\ \frac{1}{\rho}(B(v)-v^2) & B'(v)-v \end{bmatrix}, \quad q(U) = -v,$$

则方程组为具有 (1.2) 形式的对称双曲组, 它的对称子为

$$A_0(U) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{3\rho^2}{(\Delta(v)-1)^2} \end{bmatrix}.$$

所以,

$$\tilde{A}_1(U) = \begin{bmatrix} v & \rho \\ \rho & \frac{9\rho^2 v^3}{\Delta(v)(2+\Delta(v))(\Delta(v)-1)^2} \end{bmatrix}.$$

很容易验证这个方程组满足条件 (1.6)–(1.9)、(4.3) 和 (4.4), 并且当 $\varepsilon \to 0$ 时, ρ 的极限满足线性热传导方程

$$\partial_t \rho_0 - \frac{1}{3}\partial^2_{xx}\rho_0 = 0.$$

例 5.5 (Beauchard-Zuazua 模型) 这最后的一个例子涉及由 Beauchard 和 Zuazua 构造的一个具非守恒形式的方程组 (参见文献 [26]). 它可写为

$$\partial_t U + \frac{1}{\varepsilon}\sum_{j=1}^{d} A_j(v)\partial_{x_j} U = -\frac{1}{\varepsilon^2}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & D \end{bmatrix} U, \quad U = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}, \quad u \in \mathbb{R}^{n-r}, \quad v \in \mathbb{R}^r, \tag{5.1}$$

其中对 $j \in \{1,\ldots,d\}$, $A_j(v)$ 是对称矩阵并仅依赖于 v, 但不依赖于 u, D 是 r 阶常数正定矩阵. 显然, 这是一个对称双曲方程组, 满足 (1.7)–(1.9), 并且 $A_j(0)$ 为常数矩阵. 由于这个方程组的对称子可取为单位矩阵, 所以, 条件 (4.4) 也自动满足. 假设 (SK) 成立, 文献 [26] 证明了在 $(u_e, 0)$ 附近光滑解的一致整体存在性, 根据注 4.1, 这个结果显然是定理 4.1 和 4.3 的特殊情形.

现进一步假设 (1.6) 成立, 即对所有的 $j \in \{1,\ldots,d\}$,

$$A_j^{11}(0) = 0.$$

我们可以应用定理 4.2 来得到此方程组当 $\varepsilon \to 0$ 时的收敛性, 此时的极限方程组为

$$\partial_t u_0 - \sum_{i,j=1}^{d}(A_i^{12}(0)D^{-1}A_j^{21}(0)\partial^2_{x_ix_j}u_0 + (A_i^{11})'(0)D^{-1}A_j^{21}(0)\partial_{x_j}u_0\partial_{x_i}u_0) = 0.$$

再利用命题 4.1 可知, 对所有的 $\omega = (\omega_1,\ldots,\omega_d) \in \mathcal{S}^{d-1}$, 常数矩阵

$$\sum_{i,j=1}^{d}\omega_i\omega_j(A_i^{12}(0)D^{-1}A_j^{21}(0))$$

是正定的, 并且在 u_e 的一个邻域内, 极限方程组的 Cauchy 问题具有唯一的整体光滑解.

从这个例子可以看出, 当 A_j 为常数矩阵时, (5.1) 是线性方程组, 如果将它的右端项换成 $Q(U)/\varepsilon^2$, 则得到半线性的方程组. 假设 A_j 和 Q 满足 (1.6)–(1.9) 等条件, 则显然可以同样得到定理 4.1–4.3 中的结论.

参考文献

1 Whitham G B. Linear and Nonlinear Waves. New York: Wiley, 1974
2 Liu T P. Hyperbolic conservation laws with relaxation. Comm Math Phys, 1987, 108: 153–175
3 Chen G Q, Levermore C D, Liu T P. Hyperbolic conservation laws with stiff relaxation terms and entropy. Comm Pure Appl Math, 1994, 47: 787–830
4 Natalini R. Recent results on hyperbolic relaxation problems. In: Analysis of Systems of Conservation Laws. Boca Raton: Chapman & Hall/CRC, 1999, 128–198
5 Yong W A. Singular perturbations of first-order hyperbolic systems with stiff source terms. J Differential Equations, 1999, 155: 89–132
6 Serre D. Relaxations semi-linéaire et cinétique des systèmes de lois de conservation. Ann Inst H Poincaré Anal Non Linéaire, 2000, 17: 169–192
7 Jin S, Xin Z P. The relaxation schemes for systems of conservation laws in arbitrary space dimensions. Comm Pure Appl Math, 1995, 48: 235–276
8 Boillat G, Ruggeri T. Hyperbolic principal subsystems: Entropy convexity and subcharacteristic conditions. Arch Ration Mech Anal, 1997, 137: 305–320
9 Müller I, Ruggeri T. Rational Extended Thermodynamics, 2nd ed. New York: Springer-Verlag, 1998
10 Friedrichs K O. Symmetric hyperbolic linear differential equations. Comm Pure Appl Math, 1954, 7: 345–392
11 Majda A. Compressible Fluid Flow and Systems of Conservation Laws in Several Space Variables. New York: Springer-Verlag, 1984
12 Lax P D. Hyperbolic Systems of Conservation Laws and the Mathematical Theory of Shock Waves. Philadelphia: SIAM, 1973
13 Kato T. The Cauchy problem for quasi-linear symmetric hyperbolic systems. Arch Ration Mech Anal, 1975, 58: 181–205
14 Li T T, Yu W C. Boundary Value Problems for Quasilinear Hyperbolic Systems. Duke University Mathematics Series, V. Providence: Amer Math Soc, 1985
15 Li T T. Global Classical Solutions for Quasilinear Hyperbolic Systems. New York: Wiley, 1994
16 Hsiao L, Li T T. Global smooth solution of Cauchy problems for a class of quasilinear hyperbolic systems. Chin Ann Math Ser B, 1983, 4: 109–115
17 Hanouzet B, Natalini R. Global existence of smooth solutions for partially dissipative hyperbolic systems with a convex entropy. Arch Ration Mech Anal, 2003, 169: 89–117
18 Yong W A. Entropy and global existence for hyperbolic balance laws. Arch Ration Mech Anal, 2004, 172: 247–266
19 Peng Y J, Wasiolek V. Parabolic limits with differential constraints of first-order quasilinear hyperbolic systems. Ann Inst H Poincaré Anal Non Linéaire, 2016, 33: 1103–1130
20 Peng Y J, Wasiolek V. Uniform global existence and parabolic limit for partially dissipative hyperbolic systems. J Differential Equations, 2016, 260: 7059–7092
21 Marcati P, Milani A, Secchi P. Singular convergence of weak solutions for a quasilinear nonhomogeneous hyperbolic system. Manuscripta Math, 1988, 60: 49–69
22 Marcati P, Milani A. The one-dimensional Darcy's law as the limit of a compressible Euler flow. J Differential Equations, 1990, 84: 129–147
23 Marcati P, Rubino B. Hyperbolic to parabolic relaxation theory for quasilinear first order systems. J Differential Equations, 2000, 162: 359–399
24 Lattanzio C, Yong W A. Hyperbolic-parabolic singular limits for first-order nonlinear systems. Comm Partial Differential Equations, 2001, 26: 939–964
25 Coulombel J F, Goudon T. The strong relaxation limit of the multidimensional isothermal Euler equations. Trans Amer Math Soc, 2007, 359: 637–648
26 Beauchard K, Zuazua E. Large time asymptotics for partially dissipative hyperbolic systems. Arch Ration Mech Anal,

2011, 199: 177–227
27 Lin C, Coulombel J F. The strong relaxation limit of the multidimensional Euler equations. NoDEA Nonlinear Differential Equations Appl, 2013, 20: 447–461
28 Goudon T, Lin C. Analysis of the M1 model: Well-posedness and diffusion asymptotics. J Math Anal Appl, 2013, 402: 579–593
29 Bouchut F, Guarguaglini F R, Natalini R. Diffusive BGK approximations for nonlinear multidimensional parabolic equations. Indiana Univ Math J, 2000, 49: 723–749
30 Peng Y J, Wang S, Gu Q L. Relaxation limit and global existence of smooth solution of compressible Euler-Maxwell equations. SIAM J Math Anal, 2011, 43: 944–970
31 Arnold V. Equations Différentielles Ordinaires (In French, Translated from the Russian by Djilali Embarek), 4th ed. Moscow: Editions MIR, 1988
32 Ladyženskaja O, Solonnikov V A, Ural'ceva N N. Linear and Quasilinear Equations of Parabolic Type. Translations of Mathematical Monographs, vol, 23. Providence: Amer Math Soc, 1968
33 Shizuta Y, Kawashima S. Systems of equations of hyperbolic-parabolic type with applications to the discrete Boltzmann equation. Hokkaido Math J, 1985, 14: 249–275
34 Bianchini S, Hanouzet B, Natalini R. Asymptotic behavior of smooth solutions for partially dissipative hyperbolic systems with a convex entropy. Comm Pure Appl Math, 2007, 60: 1559–1622
35 Zeng Y N. Gas dynamics in thermal nonequilibrium and general hyperbolic systems with relaxation. Arch Ration Mech Anal, 1999, 150: 225–279
36 Carbou G, Hanouzet B, Natalini R. Semilinear behavior for totally linearly degenerate hyperbolic systems with relaxation. J Differential Equations, 2009, 246: 291–319
37 Xu J, Mori N, Kawashima S. Global existence and minimal decay regularity for the Timoshenko system: The case of non-equal waves speeds. J Differential Equations, 2015, 11: 5533–5553
38 Simon J. Compact sets in the space $L^p(0,T;B)$. Ann Mat Pura Appl (4), 1987, 146: 65–96
39 Kawashima S. Systems of hyperbolic-parabolic type, with applications to the equations of magnetohydrodynamics. PhD Thesis. Kyoto: Kyoto University, 1983
40 Le Floch P. Shock waves for nonlinear hyperbolic systems in non-conservative form. Http://hdl.handle.net/11299/5107, 1989
41 Sainsaulieu L. Euler system modeling vaporizing sprays. Progr Astronaut Aeronaut, 1993, 152: 280–305
42 Gallouët T, Hérard J M, Seguin N. Numerical modeling of two-phase flows using the two-fluid two-pressure approach. Math Models Methods Appl Sci, 2004, 14: 663–700
43 Tartar L. Solutions oscillantes des équations de Carleman. Sémin Équ Dériv Partielles, 1981, 12: 1–15
44 Platkowski T, Illner R. Discrete velocity models of the boltzmann equation: A survey on the mathematical aspects of the theory. SIAM Rev, 1988, 30: 213–255
45 Lions P L, Toscani G. Diffusive limit for finite velocity Boltzmann kinetic models. Rev Mat Iberoam, 1997, 13: 473–513
46 Sideris T C, Thomases B, Wang D. Long time behavior of solutions to the 3D compressible Euler equations with damping. Comm Partial Differential Equations, 2003, 28: 795–816
47 Hsiao L, Liu T P. Convergence to nonlinear diffusion waves for solutions of a system of hyperbolic conservation laws with damping. Comm Math Phys, 1992, 143: 599–605

Zero relaxation limit in slow time scaling for first-order quasi-linear hyperbolic systems

PENG YueJun

Abstract In this paper, we consider smooth solutions to the Cauchy problem for a multidimensional first-order quasi-linear hyperbolic system with a small parameter called relaxation time. The system is written in non-conservative form in a slow time scaling. We suppose that it is symmetrizable hyperbolic and partially dissipative. As the parameter goes to zero, it converges formally to a second-order nonlinear parabolic-type system. Under additional structural conditions on the hyperbolic system, we justify this convergence at two levels. For large initial data, we prove the local-in-time convergence of the system in a uniform time interval with respect to the parameter. When the initial data stay in a neighborhood of an equilibrium state, we prove the uniform global existence of solutions and the global-in-time convergence of the system. We also give examples of physical models to which the above results can be applied.

Keywords **first-order quasi-linear hyperbolic system, zero relaxation limit, parabolic system, local and global convergence**

MSC(2010) **35B25, 35L60, 35K58**

doi: 10.1360/N012016-00193