



## 论文

## 线性离散时间广义系统的最优预见控制

曹梦娟<sup>①②</sup>, 廖福成<sup>①\*</sup>, 吴江<sup>①</sup><sup>①</sup> 北京科技大学数理学院, 北京 100083<sup>②</sup> 北京科技大学自动化学院, 北京 100083

\* 通信作者. E-mail: fcliao@ustb.edu.cn

收稿日期: 2015-01-30; 接受日期: 2015-06-11; 网络出版日期: 2015-10-27

国家自然科学基金(批准号: 61174209)资助项目

**摘要** 本文研究线性离散时间广义系统的最优预见控制器的设计问题. 首先完善了关于线性离散时间广义系统最优调节理论的一个定理. 然后将一阶前向差分算子作用在状态方程和可预见的目标值信号上, 构造了包含可预见目标值信号的广义扩大误差系统, 把跟踪问题转化为关于广义扩大误差系统的调节问题, 并讨论了广义扩大误差系统的能稳性、因果能控性及因果能观性与原系统相应特性的关系. 再利用因果能控性的特点, 通过引入预反馈把问题转化为一个等价的广义因果系统的调节问题, 对二次型性能指标函数进行改造, 将问题转化为从广义扩大误差系统导出的正常系统的最优控制问题. 最后利用前述最优调节理论的定理, 得到了带有预见前馈补偿的最优预见控制器. 为了便于应用, 对所得到的理论给出了简明的实现步骤. 数值仿真结果说明了理论结果的正确性和有效性.

**关键词** 线性离散时间广义系统 广义扩大误差系统 因果能控 因果能观 预见控制 最优控制

## 1 引言

比起通常的控制系统, 广义系统是一类更一般化, 并有着广泛应用背景的动力系统. 广义系统又称为奇异系统或隐式系统. 人们已经发现, 广义系统大量出现在电力系统、能源系统、航天工程、化学过程、经济系统、社会系统和生物系统中<sup>[1~3]</sup>. 自 20 世纪 90 年代初至今, 广义系统理论的研究已从基础向纵深发展, 涉及了从线性到非线性, 从无时滞到时滞<sup>[4]</sup>, 从定常系统到时变系统<sup>[5]</sup>, 从线性二次型最优控制到  $H_2$  和  $H_\infty$  控制等<sup>[6,7]</sup>, 取得了丰硕的成果. 另外, 文献 [8] 得到了切换广义系统的稳定性条件, 文献 [9] 研究了基于观测器的随机广义系统的控制器设计问题.

预见控制研究的基本问题是: 当目标值信号的未来值为已知时, 如何对其加以利用以提高闭环系统对目标值信号的跟踪性能. 继 Tomizuka 的开创性工作之后<sup>[10]</sup>, 人们在预见控制方面进行了大量的研究<sup>[11~13]</sup>, 其中, 带有预见前馈补偿的线性二次型最优控制理论已经非常完善. 近年来, 又有学者把  $H_2$ ,  $H_\infty$  控制的思想引入预见控制研究中, 用于考察系统的鲁棒性<sup>[14~16]</sup>. 文献 [12] 提出了一种基于 T-S 模糊模型的鲁棒预见辅助操纵方法, 以补偿由于驾驶员输入延迟和飞机不确定性所导致的跟踪性能降低、操纵负担过重的缺陷. 文献 [17] 把预见控制理论与多采样率系统相结合, 提出并较为系统地

**引用格式:** 曹梦娟, 廖福成, 吴江. 线性离散时间广义系统的最优预见控制. 中国科学: 信息科学, 2015, 45: 1415–1431, doi: 10.1360/N112013-00151

研究了具有输入时滞的多采样率系统的预见控制理论. 文献 [18, 19] 提出了一种基于信息融合估计的预见控制方法, 还将其推广到了非线性系统中 [20].

在广义系统理论和预见控制理论都有了长足发展的前提下, 将它们相结合来研究广义系统的最优预见控制问题就自然地成为了一个新的课题. 它可以充分发挥两者的优势, 使所得结果更加完美. 但是, 由于广义系统较一般系统有自己独特的性质, 例如广义系统不仅含有指数解, 还含有脉冲解. 广义系统的极点除了有穷极点还有无穷极点等等 [21]. 这样就使得课题的研究过程存在着很多困难. 文献 [22] 提出了广义系统预见控制的概念并进行了初步研究. 文献 [23] 把文献 [22] 的研究方法推广到多采样率离散时间广义因果系统. 文献 [24] 研究了具有状态时滞的离散时间广义系统的预见控制问题.

本文在文献 [22~24] 的基础上, 研究一般形式的线性离散时间因果系统的最优预见控制问题, 而且把主要注意力集中在闭环系统的实现上. 首先利用一阶前向差分算子将广义系统连同可预见目标值信号一起, 构造广义扩大误差系统, 把问题转化为广义系统的调节问题. 在文献 [25] 的理论基础上讨论一般形式的具有正则非因果性的广义系统. 为了便于直接应用本文的结果, 详细地给出了实现理论结果的算法, 使得其实现变得简单易行.

全文安排如下: 第 1 节是引言. 第 2 节是全文的准备, 证明了关于广义系统调节器的一个定理. 第 3 和 4 节研究广义系统预见控制理论. 其中第 3 节推出广义扩大误差系统, 把跟踪问题转化为广义扩大误差系统的调节问题. 第 4 节设计了最优预见控制器, 并且为了便于应用, 给出了闭环系统的实现步骤. 第 5 节是数值仿真. 最后, 第 6 节是结束语.

本文采用以下记号: 用  $A > 0 (A \geq 0)$  表示矩阵  $A$  对称正定 (半正定), 用  $\text{rank}(A)$  表示矩阵  $A$  的秩,  $\det(A)$  表示矩阵  $A$  的行列式,  $\deg \det(sE - A)$  表示多项式  $\det(sE - A)$  的次数,  $x \in R^n$  表示  $x$  为  $n$  维列向量,  $A \in R^{r \times n}$  表示  $A$  为  $r \times n$  实矩阵.

## 2 问题的数学模型及线性离散时间广义系统的最优调节理论

考虑如下的正则线性离散时间广义系统

$$\begin{cases} Ex(k+1) = Ax(k) + Bu(k), \\ y(k) = Cx(k), \end{cases} \quad (1)$$

其中,  $x(k) \in R^n$  是状态向量,  $u(k) \in R^r$  是输入向量,  $y(k) \in R^m$  是输出向量,  $E, A, B, C$ , 是具有适当维数的常数矩阵,  $E$  为奇异矩阵, 满足  $\text{rank}(E) = q < n$ .

假定系统 (1) 是能稳、能检测以及因果能控和因果能观的.

从系统 (1) 因果能控知, 存在矩阵  $K \in R^{r \times n}$ ,

$$\deg \{ \det [sE - (A + BK)] \} = \text{rank}(E).$$

因此, 可以令状态预反馈控制输入为

$$u(k) = Kx(k) + v(k), \quad (2)$$

其中  $v(k)$  为  $r$  维的输入向量, 亦称为伺服输入向量. 那么, 所得闭环控制系统

$$Ex(k+1) = (A + BK)x(k) + Bv(k) \quad (3)$$

是因果的. 由 (3) 的因果性可知存在可逆矩阵  $Q_1, P_1$  使得

$$Q_1 E P_1 = \begin{bmatrix} I_q & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad Q_1 (A + BK) P_1 = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \quad Q_1 B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}. \quad (4)$$

再令  $x(k) = P_1 \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix}$ , 其中  $x_1(k) \in R^q, x_2(k) \in R^{n-q}$ .

这样, 系统 (1) 就等价于

$$\begin{cases} x_1(k+1) = A_{11}x_1(k) + A_{12}x_2(k) + B_1v(k), \\ 0 = A_{21}x_1(k) + A_{22}x_2(k) + B_2v(k). \end{cases} \quad (5)$$

而且, 由于系统 (3) 是因果的, 所以  $A_{22}$  是可逆的.

对于线性离散时间广义系统 (1), 定义二次性能指标函数为

$$J = \sum_{k=1}^{\infty} [x^T(k) F x(k) + u^T(k) R u(k)]. \quad (6)$$

并设权矩阵  $F \geq 0, R > 0$ , 有如下定理.

**定理 1** 如果广义系统 (1) 是能稳、因果能控和因果能观的, 并且  $(F^{1/2}, A)$  能检测, 则使性能指标函数 (6) 达到极小的最优控制  $u(k)$  存在, 且由下式确定

$$u(k) = \left[ K - \left[ \bar{R}^{-1} H^T + [\bar{R} + \bar{B}_1^T \bar{P} \bar{B}_1]^{-1} \bar{B}_1^T \bar{P} \bar{A}_1 \right] \begin{bmatrix} I_q & 0 \end{bmatrix} P_1^{-1} \right] x(k),$$

式中, 各个符号所代表的含义在接下来的证明中给出. 特别地,  $\bar{P}$  是代数 Riccati 方程

$$\bar{P} = \tilde{F} + \bar{A}_1^T \bar{P} \bar{A}_1 - \bar{A}_1^T \bar{P} \bar{B}_1 [\bar{R} + \bar{B}_1^T \bar{P} \bar{B}_1]^{-1} \bar{B}_1^T \bar{P} \bar{A}_1$$

的对称半正定解.

**证明** 由 (5) 式中的第 2 式马上得到  $x_2(k) = -A_{22}^{-1} A_{21} x_1(k) - A_{22}^{-1} B_2 v(k)$ , 再结合 (2) 式有

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x(k) \\ u(k) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ K & I_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k) \\ v(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ K P_1 & I_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ \frac{x_2(k)}{v(k)} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ K P_1 & I_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ \frac{-A_{22}^{-1} A_{21} x_1(k) - A_{22}^{-1} B_2 v(k)}{v(k)} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ K P_1 & I_r \end{bmatrix} \left[ \begin{array}{c|c} I_q & 0 \\ \hline -A_{22}^{-1} A_{21} & -A_{22}^{-1} B_2 \\ \hline 0 & I_r \end{array} \right] \begin{bmatrix} x_1(k) \\ v(k) \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

把性能指标函数 (6) 用这样的状态向量表示, 得到

$$J = \sum_{k=1}^{\infty} \begin{bmatrix} x(k) \\ u(k) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} F \\ R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k) \\ u(k) \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^{\infty} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ v(k) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \bar{F} & H \\ H^T & \bar{R} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ v(k) \end{bmatrix}, \quad (7)$$

其中

$$\begin{bmatrix} \bar{F} & H \\ H^T & \bar{R} \end{bmatrix} = \left[ \begin{array}{c|c} I_q & 0 \\ \hline -A_{22}^{-1}A_{21} & -A_{22}^{-1}B_2 \end{array} \right]^T \begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ KP_1 & I_r \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} F \\ R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ KP_1 & I_r \end{bmatrix} \left[ \begin{array}{c|c} I_q & 0 \\ \hline -A_{22}^{-1}A_{21} & -A_{22}^{-1}B_2 \end{array} \right]. \quad (8)$$

由于  $\begin{bmatrix} F \\ R \end{bmatrix}$  是对称半正定矩阵且  $\begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ KP_1 & I_r \end{bmatrix} \left[ \begin{array}{c|c} I_q & 0 \\ \hline -A_{22}^{-1}A_{21} & -A_{22}^{-1}B_2 \end{array} \right]$  是列满秩的, 所以 (8) 式所表示的矩阵  $\begin{bmatrix} \bar{F} & H \\ H^T & \bar{R} \end{bmatrix}$  和其左上角的子块  $\bar{F}$  都是对称半正定的. 再次, 直接计算得到  $\bar{R} = R$ , 因此  $\bar{R} > 0$ .

利用配方法, 对性能指标函数 (7) 变形如下:

$$\begin{aligned} J &= \sum_{k=1}^{\infty} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ v(k) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \bar{F} & H \\ H^T & \bar{R} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ v(k) \end{bmatrix} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \begin{bmatrix} I & 0 \\ \bar{R}^{-1}H^T & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ v(k) \end{bmatrix} \right\}^T \left\{ \begin{bmatrix} I & 0 \\ -\bar{R}^{-1}H^T & I \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \bar{F} & H \\ H^T & \bar{R} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ -\bar{R}^{-1}H^T & I \end{bmatrix} \right\} \\ &\quad \left\{ \begin{bmatrix} I & 0 \\ \bar{R}^{-1}H^T & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ v(k) \end{bmatrix} \right\} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ v(k) + \bar{R}^{-1}H^T x_1(k) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \bar{F} - H\bar{R}^{-1}H^T & 0 \\ 0 & \bar{R} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ v(k) + \bar{R}^{-1}H^T x_1(k) \end{bmatrix} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} [x_1^T(k) \tilde{F} x_1(k) + w^T(k) \bar{R} w(k)], \end{aligned} \quad (9)$$

其中

$$\tilde{F} = \bar{F} - H\bar{R}^{-1}H^T, w(k) = v(k) + \bar{R}^{-1}H^T x_1(k). \quad (10)$$

在上述推导中, 由于

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ -\bar{R}^{-1}H^T & I \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \bar{F} & H \\ H^T & \bar{R} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ -\bar{R}^{-1}H^T & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{F} - H\bar{R}^{-1}H^T & 0 \\ 0 & \bar{R} \end{bmatrix},$$

所以  $\begin{bmatrix} \bar{F} & H \\ H^T & \bar{R} \end{bmatrix}$  经过合同变换变为  $\begin{bmatrix} \bar{F} - H\bar{R}^{-1}H^T & 0 \\ 0 & \bar{R} \end{bmatrix}$ , 因此  $\tilde{F}$  也是对称半正定矩阵. 将  $v(k) = w(k) - \bar{R}^{-1}H^T x_1(k)$  代入 (5) 式中第 1 式得

$$x_1(k+1) = \bar{A}_1 x_1(k) + \bar{B}_1 w(k), \quad (11)$$

其中,  $\bar{A}_1 = A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21} - (B_1 - A_{12}A_{22}^{-1}B_2)\bar{R}^{-1}H^T$ ,  $\bar{B}_1 = B_1 - A_{12}A_{22}^{-1}B_2$ . 这样广义系统 (1) 的最优控制问题变为寻找正常系统 (11) 的控制输入  $w(k)$  使得性能指标函数 (9) 达到最小.

对于系统 (11), 利用文献 [26, 27] 的方法可知, 当本定理条件满足时, 它是能稳的, 并且  $(\tilde{F}^{1/2}, \bar{A}_1)$  是能检测的, 所以得到其最优调节器为

$$w(k) = -[\bar{R} + \bar{B}_1^T \bar{P} \bar{B}_1]^{-1} \bar{B}_1^T \bar{P} \bar{A}_1 x_1(k), \quad (12)$$

其中  $\bar{P}$  是代数 Riccati 方程

$$\bar{P} = \tilde{F} + \bar{A}_1^T \bar{P} \bar{A}_1 - \bar{A}_1^T \bar{P} \bar{B}_1 [\bar{R} + \bar{B}_1^T \bar{P} \bar{B}_1]^{-1} \bar{B}_1^T \bar{P} \bar{A}_1 \quad (13)$$

的唯一对称半正定解.

通过以上的讨论, 我们得到广义系统 (1) 的最优控制输入为

$$\begin{aligned} u(k) &= Kx(k) + v(k) = Kx(k) + w(k) - \bar{R}^{-1}H^T x_1(k) \\ &= Kx(k) - [\bar{R} + \bar{B}_1^T \bar{P} \bar{B}_1]^{-1} \bar{B}_1^T \bar{P} \bar{A}_1 x_1(k) - \bar{R}^{-1}H^T x_1(k) \\ &= Kx(k) - \{\bar{R}^{-1}H^T + [\bar{R} + \bar{B}_1^T \bar{P} \bar{B}_1]^{-1} \bar{B}_1^T \bar{P} \bar{A}_1\} x_1(k) \\ &= [K - [\bar{R}^{-1}H^T + [\bar{R} + \bar{B}_1^T \bar{P} \bar{B}_1]^{-1} \bar{B}_1^T \bar{P} \bar{A}_1][I_q \ 0]P_1^{-1}]x(k). \end{aligned} \quad (14)$$

至此, 我们得到了线性离散时间广义系统 (1) 在二次性能指标函数 (6) 下的最优调节器.

### 3 广义扩大误差系统的推导

假设我们所考虑的线性离散时间广义系统形式仍如 (1) 所示:

$$\begin{cases} Ex(k+1) = Ax(k) + Bu(k), \\ y(k) = Cx(k). \end{cases}$$

为了研究这个系统的预见控制, 还需要作出以下基本假设.

**假设 1 (H1)** 对于系统 (1), 设存在  $\lambda \neq 0, \lambda \neq 1$ , 使得  $\det(\lambda E - A) \neq 0$ .

**注** 这里的条件是正则的加强条件.

**假设 2 (H2)** 假设矩阵  $\begin{bmatrix} C & 0 \\ E - A & B \end{bmatrix}$  行满秩.

**假设 3 (H3)** 假设目标值信号  $R(k)$  的可预见步数为  $M_R$ , 即设在当前时刻  $k$ ,  $R(k)$  的  $M_R$  步未来值

$$R(k+1), R(k+2), \dots, R(k+M_R)$$

为已知.  $M_R$  步之后认为它是常数, 即

$$R(k+j) = R(k+M_R), j = M_R+1, M_R+2, \dots$$

为了利用系统可预见的目标值信号构造带有前馈补偿的控制器, 我们需要对广义系统 (1) 构造广义扩大误差系统.

对原系统 (1), 假设误差信号为

$$e(k) = R(k) - y(k),$$

本文需要用到一阶前向差分算子  $\Delta$ , 规定为: 对任意向量  $r(k)$ ,

$$\Delta r(k) = r(k+1) - r(k).$$

我们希望设计一个控制器, 使输出向量  $y(k)$  无静态误差地跟踪标信号  $R(k)$ . 为此引入二次型性能指标函数

$$J = \sum_{k=-M_R+1}^{\infty} [e^T(k) Q_e e(k) + \Delta u(k)^T \Psi \Delta u(k)]. \quad (15)$$

其中,  $Q_e > 0, \Psi > 0$ . 文献 [11] 曾经指出, 在性能指标函数中引入  $\Delta u(k)$  可以使闭环系统中包含积分器, 从而有助于消除静态误差.

利用文献 [25] 的方法把跟踪误差  $e(k)$  和可预见的目标信号  $R(k)$  的差分加到状态向量中, 得到

$$E_{R0} X_{R0}(k+1) = \Phi_{R0} X_{R0}(k) + G_{R0} \Delta u(k), \quad (16)$$

其中

$$\begin{aligned} X_{R0}(k) &= \begin{bmatrix} X_R(k) \\ X_0(k) \end{bmatrix}, E_{R0} = \begin{bmatrix} I_{mM_R} & 0 \\ 0 & E_0 \end{bmatrix}, \Phi_{R0} = \begin{bmatrix} A_R & 0 \\ G_{PR} & \Phi \end{bmatrix}, \\ G_{R0} &= \begin{bmatrix} 0 \\ G \end{bmatrix}, G_{PR} = [G_R \ 0 \ \cdots \ 0], \\ X_0(k) &= \begin{bmatrix} e(k) \\ \Delta x(k) \end{bmatrix}, E_0 = \begin{bmatrix} I_m & 0 \\ 0 & E \end{bmatrix}, \Phi = \begin{bmatrix} I_m & -C \\ 0 & A \end{bmatrix}, G = \begin{bmatrix} 0 \\ B \end{bmatrix}, G_R = \begin{bmatrix} I_m \\ 0 \end{bmatrix}, \\ X_R(k) &= \begin{bmatrix} \Delta R(k) \\ \Delta R(k+1) \\ \vdots \\ \Delta R(k+M_R-1) \end{bmatrix}, A_R = \begin{bmatrix} 0 & I_m & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & I_m \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

从系统 (1) 知应将观测量取为  $\Delta y(k)$ , 利用 (16) 中的状态向量可得到

$$\Delta y(k) = C_{R0} X_{R0}(k), \quad (17)$$

其中  $C_{R0} = [0 \ C_0]$ ,  $C_0 = [0 \ C]$ .

可以将 (16) 和 (17) 式合写为

$$\begin{cases} E_{R0}X_{R0}(k+1) = \Phi_{R0}X_{R0}(k) + G_{R0}\Delta u(k), \\ \Delta y(k) = C_{R0}X_{R0}(k). \end{cases} \quad (18)$$

这就是构造的广义扩大误差系统. 系统的维数为  $mM_R + m + n$ .

把 (15) 式的性能指标函数变换成用系统 (18) 的有关量表示, 得到

$$J = \sum_{k=-M_R+1}^{\infty} [X_{R0}^T(k) \Omega X_{R0}(k) + \Delta u(k)^T \Psi \Delta u(k)]. \quad (19)$$

其中  $\Omega = \begin{bmatrix} 0 & & \\ & Q_e & \\ & & 0 \end{bmatrix} \geq 0$  为  $(mM_R + m + n) \times (mM_R + m + n)$  的对称半正定矩阵.

这时, 线性二次型最优控制问题为, 当系统 (18) 受扰偏离原平衡状态时, 要求产生一个控制向量, 使系统状态  $X_{R0}(k)$  恢复到原平衡状态附近, 并使性能指标函数 (19) 达到最小, 这是最优调节问题.

## 4 最优预见控制器的设计与实现

### 4.1 广义扩大误差系统的性质

在给出线性离散时间广义系统最优预见控制器的设计之前, 首先给出广义扩大误差系统的性质. 分为 4 个定理.

**定理 2** 若原系统 (1) 正则且 (H1) 成立, 则广义扩大误差系统 (18) 正则.

**证明** 定理 2 的证明已经在文献 [25] 中给出.

**注** 由此看出, 系统 (1) 正则并不能保证扩大误差系统正则.

**定理 3** (a) 若原系统 (1) 能稳且 (H2) 成立, 则扩大误差系统 (18) 能稳. (b) 若原系统 (1) 因果能控, 则扩大误差系统 (18) 也是因果能控的.

**证明**

(a) 的证明已经在文献 [25] 中给出.

(b) 需验证  $\text{rank} \begin{bmatrix} E_{R0} & 0 & 0 \\ \Phi_{R0} & E_{R0} & G_{R0} \end{bmatrix} = mM_R + m + n + \text{rank}(E_{R0})$ . 注意到

$$\begin{aligned} \text{rank} \begin{bmatrix} E_{R0} & 0 & 0 \\ \Phi_{R0} & E_{R0} & G_{R0} \end{bmatrix} &= \text{rank} \begin{bmatrix} I_{mM_R} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E_0 & 0 & 0 & 0 \\ A_R & 0 & I_{mM_R} & 0 & 0 \\ G_{PR} & \Phi & 0 & E_0 & G \end{bmatrix} \\ &= mM_R + \text{rank} \begin{bmatrix} E_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_{mM_R} & 0 & 0 \\ \Phi & 0 & E_0 & G \end{bmatrix} = mM_R + \text{rank} \begin{bmatrix} E_0 & 0 & 0 & 0 \\ \Phi & 0 & E_0 & G \\ 0 & I_{mM_R} & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= mM_R + \text{rank} \begin{bmatrix} 0 & E_0 & 0 & 0 \\ 0 & \Phi & E_0 & G \\ I_{mM_R} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = mM_R + mM_R + \text{rank} \begin{bmatrix} E_0 & 0 & 0 \\ \Phi & E_0 & G \end{bmatrix} \\
&= 2mM_R + \text{rank} \begin{bmatrix} I_m & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 & 0 & 0 \\ I_m & -C & I_m & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 & E & B \end{bmatrix} = 2mM_R + m + \text{rank} \begin{bmatrix} E & 0 & 0 & 0 \\ -C & I_m & 0 & 0 \\ A & 0 & E & B \end{bmatrix} \\
&= 2mM_R + m + m + \text{rank} \begin{bmatrix} E & 0 & 0 \\ A & E & B \end{bmatrix} = 2mM_R + 2m + n + \text{rank}(E).
\end{aligned}$$

而

$$\text{rank}(E_{R0}) = \text{rank} \begin{bmatrix} I_{mM_R} & 0 & 0 \\ 0 & I_m & 0 \\ 0 & 0 & E \end{bmatrix} = mM_R + m + \text{rank}(E),$$

所以

$$\begin{aligned}
\text{rank} \begin{bmatrix} E_{R0} & 0 & 0 \\ \Phi_{R0} & E_{R0} & G_{R0} \end{bmatrix} &= 2mM_R + 2m + n + \text{rank}(E) \\
&= mM_R + m + n + [mM_R + m + \text{rank}(E)] \\
&= mM_R + m + n + \text{rank}(E_{R0}).
\end{aligned}$$

证毕.

**定理 4** 若原系统 (1) 因果能观, 则扩大误差系统 (18) 也是因果能观的.

**证明** 需验证  $\text{rank} \begin{bmatrix} E_{R0} & \Phi_{R0} \\ 0 & E_{R0} \\ 0 & C_{R0} \end{bmatrix} = mM_R + m + n + \text{rank}(E_{R0})$ . 注意到

$$\begin{aligned}
\text{rank} \begin{bmatrix} E_{R0} & \Phi_{R0} \\ 0 & E_{R0} \\ 0 & C_{R0} \end{bmatrix} &= \text{rank} \begin{bmatrix} I_{mM_R} & 0 & A_R & 0 \\ 0 & E_0 & G_{PR} & \Phi \\ 0 & 0 & I_{mM_R} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E_0 \\ 0 & 0 & 0 & C_0 \end{bmatrix} \\
&= mM_R + \text{rank} \begin{bmatrix} E_0 & G_{PR} & \Phi \\ 0 & I_{mM_R} & 0 \\ 0 & 0 & E_0 \\ 0 & 0 & C_0 \end{bmatrix} = mM_R + \text{rank} \begin{bmatrix} E_0 & 0 & \Phi \\ 0 & I_{mM_R} & 0 \\ 0 & 0 & E_0 \\ 0 & 0 & C_0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
&= mM_R + mM_R + \text{rank} \begin{bmatrix} E_0 & \Phi \\ 0 & E_0 \\ 0 & C_0 \end{bmatrix} = 2mM_R + \text{rank} \begin{bmatrix} I_m & 0 & I_m & -C \\ 0 & E & 0 & A \\ 0 & 0 & I_m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E \\ 0 & 0 & 0 & C \end{bmatrix} \\
&= 2mM_R + 2m + \text{rank} \begin{bmatrix} E & A \\ 0 & E \\ 0 & C \end{bmatrix} = 2mM_R + 2m + n + \text{rank}(E) \\
&= mM_R + m + n + \text{rank}(E_{R0}),
\end{aligned}$$

所以定理成立. 证毕.

**定理 5** 若原系统 (1) 能检测, 则  $(\Omega^{1/2}, \Phi_{R0})$  能检测.

**证明** 对于任意的复数  $s, |s| \geq 1$ , 有

$$\begin{aligned}
\text{rank} \begin{bmatrix} sE_{R0} - \Phi_{R0} \\ \Omega^{1/2} \end{bmatrix} &= \text{rank} \begin{bmatrix} sI_{mM_R} - A_R & 0 & 0 \\ -G_M & (s-1)I_m & C \\ 0 & 0 & sE - A \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 0 & Q_e^{1/2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&= mM_R + \text{rank} \begin{bmatrix} (s-1)I_m & C \\ 0 & sE - A \\ 0 & 0 \\ Q_e^{1/2} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&= mM_R + m + \text{rank} \begin{bmatrix} sE - A \\ C \end{bmatrix},
\end{aligned}$$

所以若原系统能检测, 则  $(\Omega^{1/2}, \Phi_{R0})$  能检测. 证毕.

#### 4.2 最优预见控制器的设计

通过上面的讨论, 我们得到了广义扩大误差系统的性质, 下面给出本文一个重要的定理.

**定理 6** 若系统 (1) 是能稳、能检测以及因果能控和因果能观的, 且满足 (H1)~(H3) 的假设条件, 则扩大误差系统 (18) 的使性能指标函数 (19) 达到极小的最优调节器  $\Delta u(k)$  存在, 且由下式确定,

$$\Delta u(k) = F_{R0} X_{R0}(k), \quad (20)$$

其中

$$F_{R0} = [K_{R0} - [\hat{\Psi}^{-1} \hat{H}^T + [\hat{\Psi} + \hat{B}_1^T \tilde{P} \hat{B}_1]^{-1} \hat{B}_1^T \tilde{P} \hat{A}_1] [I_{mM_R+m+q} \ 0_{(mM_R+m+q) \times (n-q)}] P_2^{-1}],$$

其中,  $\tilde{P}$  是下面代数 Riccati 方程

$$\tilde{P} = \tilde{\Omega} + \hat{A}_1^T \tilde{P} \hat{A}_1 - \hat{A}_1^T \tilde{P} \hat{B}_1 [\hat{\Psi} + \hat{B}_1^T \tilde{P} \hat{B}_1]^{-1} \hat{B}_1^T \tilde{P} \hat{A}_1$$

唯一的对称半正定解.

所涉及到的有关矩阵如下:

$$K_{R0} = \begin{bmatrix} I_{mM_R} & 0 & 0 \\ 0_{1 \times (m+mM_R)} & K \end{bmatrix}, Q_2 = \begin{bmatrix} I_{mM_R} & 0 & 0 \\ 0 & I_m & 0 \\ 0 & 0 & Q_1 \end{bmatrix}, P_2 = \begin{bmatrix} I_{mM_R} & 0 & 0 \\ 0 & I_m & 0 \\ 0 & 0 & P_1 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} \hat{\Omega} & \hat{H} \\ \hat{H}^T & \hat{\Psi} \end{bmatrix} = \left[ \begin{array}{c|c} I_{mM_R+m+q} & 0 \\ \hline -A_{22}^{-1} \tilde{A}_{21} & -A_{22}^{-1} B_2 \\ \hline 0 & I_r \end{array} \right]^T \begin{bmatrix} P_2 & 0 \\ K_{R0} P_2 & I_r \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \Omega \\ \Psi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_2 & 0 \\ K_{R0} P_2 & I_r \end{bmatrix} \left[ \begin{array}{c|c} I_{mM_R+m+q} & 0 \\ \hline -A_{22}^{-1} \tilde{A}_{21} & -A_{22}^{-1} B_2 \\ \hline 0 & I_r \end{array} \right]$$

$$\tilde{\Omega} = \hat{\Omega} - \hat{H} \hat{\Psi}^{-1} \hat{H}^T, \hat{A}_1 = \tilde{A}_{11} - \tilde{A}_{12} A_{22}^{-1} \tilde{A}_{21} - (\tilde{B}_1 - \tilde{A}_{12} A_{22}^{-1} B_2) \hat{\Psi}^{-1} \hat{H}^T, \hat{B}_1 = \tilde{B}_1 - \tilde{A}_{12} A_{22}^{-1} B_2$$

$$\tilde{A}_{11} = \begin{bmatrix} A_R & 0 & 0 \\ G_M & I_m & -C_1 \\ 0 & 0 & A_{11} \end{bmatrix}, \tilde{A}_{12} = \begin{bmatrix} 0_{mM_R \times (n-q)} \\ -C_2 \\ A_{12} \end{bmatrix}, \tilde{A}_{21} = \begin{bmatrix} 0_{(n-q) \times (m+mM_R)} & A_{21} \end{bmatrix},$$

$$\tilde{B}_1 = \begin{bmatrix} 0_{(m+mM_R) \times 1} \\ B_1 \end{bmatrix}, G_M = \begin{bmatrix} I_m & 0_{m \times m(M_R-1)} \end{bmatrix}.$$

其中  $Q_1, P_1, K, A_{11}, A_{12}, A_{21}, A_{22}, B_1, B_2$  与 (4) 式中的同名量相同.

**证明** 事实上, 若系统 (18) 是正则的, 且满足能稳性、因果能控性和因果能观性条件, 并且  $(\Omega^{1/2}, \Phi_{R0})$  能检测, 这里的结论就是成立的. 而定理 2 到定理 5 说明, 系统 (18) 的这些条件都是满足的, 然后利用定理 1, 就得到本定理的结论. 证毕.

进一步注意到

$$X_{R0}(k) = \begin{bmatrix} X_R(k) \\ e(k) \\ \Delta x(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta R(k) \\ \vdots \\ \Delta R(k + M_R - 1) \\ e(k) \\ \Delta x(k) \end{bmatrix},$$

对 (20) 式中的增益矩阵  $F_{R0}$  进行分块,

$$F_{R0} = \begin{bmatrix} F_R(0) & \cdots & F_R(M_R - 1) & \left| \begin{array}{c} F_e \\ F_x \end{array} \right| \end{bmatrix},$$

则  $\Delta u(k)$  可写为

$$\begin{aligned}\Delta u(k) &= \left[ F_R(0) \cdots F_R(M_R-1) \middle| F_e \middle| F_x \right] \begin{bmatrix} \Delta R(k) \\ \vdots \\ \Delta R(k+M_R-1) \\ e(k) \\ \Delta x(k) \end{bmatrix} \\ &= \sum_{j=0}^{M_R-1} F_R(j) \Delta R(k+j) + F_e e(k) + F_x \Delta x(k).\end{aligned}\quad (21)$$

将 (21) 式中的  $k$  变为  $k-1$  并利用  $\Delta u(k-1) = u(k) - u(k-1)$  得到当  $k \geq 1$  时, 有

$$u(k) = u(k-1) + \sum_{j=0}^{M_R-1} F_R(j) \Delta R(k+j-1) + F_e e(k-1) + F_x \Delta x(k-1), \quad (22)$$

其中的各系数矩阵已如前述, 初始值  $x(0)$ ,  $u(0)$ ,  $e(0)$  可任意赋值.

(22) 式就是本文所设计的原系统 (1) 的带有预见前馈补偿的最优预见控制器. 至此, 我们已得到本文最重要的定理.

**定理 7** 对于线性离散时间广义系统 (1), 若满足能稳、能检测以及因果能控和因果能观的条件, 且满足 (H1)~(H3) 的假设条件, 则它的带有预见前馈补偿的最优预见控制器为

$$u(k) = u(k-1) + \sum_{j=0}^{M_R-1} F_R(j) \Delta R(k+j-1) + F_e e(k-1) + F_x \Delta x(k-1).$$

注意, 上式中  $\sum_{j=0}^{M_R-1} F_R(j) \Delta R(k+j-1)$  就是目标值预见作用.

### 4.3 实现步骤

(1) 对广义扩大误差系统 (18) 进行分块,

$$\left[ \begin{array}{cc|c} I_{mM_R} & 0 & 0 \\ 0 & I_m & 0 \\ 0 & 0 & E \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} X_R(k+1) \\ e(k+1) \\ \Delta x(k+1) \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{cc|c} A_R & 0 & 0 \\ G_M & I_m & -C \\ 0 & 0 & A \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} X_R(k) \\ e(k) \\ \Delta x(k) \end{array} \right] + \left[ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ B \end{array} \right] \Delta u(k),$$

其中  $G_M = [I_m \ 0 \ \cdots \ 0]$ .

(2) 由于已经证明系统 (18) 是因果能控的, 我们将控制输入设为

$$\Delta u(k) = \left[ 0 \ 0 \middle| K \right] \left[ \begin{array}{c} X_R(k) \\ e(k) \\ \Delta x(k) \end{array} \right] + \Delta v(k) = K_{R0} X_{R0}(k) + \Delta v(k),$$

则得到因果闭环系统

$$\left[ \begin{array}{cc|c} I_{mM_R} & 0 & 0 \\ 0 & I_m & 0 \\ \hline 0 & 0 & E \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} X_R(k+1) \\ e(k+1) \\ \Delta x(k+1) \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{cc|c} A_R & 0 & 0 \\ G_M & I_m & -C \\ \hline 0 & 0 & A+BK \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} X_R(k) \\ e(k) \\ \Delta x(k) \end{array} \right] + \left[ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ B \end{array} \right] \Delta v(k). \quad (23)$$

(3) 再对 (23) 式进行如同 (5) 式的分解. 只须令

$$Q_2 = \left[ \begin{array}{cc|c} I_{mM_R} & 0 & 0 \\ 0 & I_m & 0 \\ \hline 0 & 0 & Q_1 \end{array} \right], P_2 = \left[ \begin{array}{cc|c} I_{mM_R} & 0 & 0 \\ 0 & I_m & 0 \\ \hline 0 & 0 & P_1 \end{array} \right].$$

首先通过计算得

$$\begin{aligned} Q_2 \left[ \begin{array}{cc|c} I_{mM_R} & 0 & 0 \\ 0 & I_m & 0 \\ \hline 0 & 0 & E \end{array} \right] P_2 &= \left[ \begin{array}{cc|c} I_{mM_R} & 0 & 0 \\ 0 & I_m & 0 \\ \hline 0 & 0 & Q_1 E P_1 \end{array} \right], \\ Q_2 \left[ \begin{array}{cc|c} A_R & 0 & 0 \\ G_M & I_m & -C \\ \hline 0 & 0 & A+BK \end{array} \right] P_2 &= \left[ \begin{array}{cc|c} A_R & 0 & 0 \\ G_M & I_m & -C \\ \hline 0 & 0 & Q_1 (A+BK) P_1 \end{array} \right], \\ Q_2 \left[ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ B \end{array} \right] &= \left[ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ Q_1 B \end{array} \right]. \end{aligned}$$

(4) 将上述各式代入 (23) 式并结合 (4) 式, 将结果重新分块得

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} I_{mM_R} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_q & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} X_R(k+1) \\ e(k+1) \\ \Delta x_1(k+1) \\ \Delta x_2(k+1) \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{ccc|c} A_R & 0 & 0 & 0 \\ G_M & I_m & -C_1 & -C_2 \\ 0 & 0 & A_{11} & A_{12} \\ \hline 0 & 0 & A_{21} & A_{22} \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} X_R(k) \\ e(k) \\ \Delta x_1(k) \\ \Delta x_2(k) \end{array} \right] + \left[ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ B_1 \\ B_2 \end{array} \right] \Delta v(k). \quad (24)$$

由于状态反馈和线性变换保持系统的能稳性, 所以 (24) 式满足能稳性条件. 再记

$$\begin{aligned} \tilde{A}_{11} &= \left[ \begin{array}{ccc} A_R & 0 & 0 \\ G_M & I_m & -C_1 \\ 0 & 0 & A_{11} \end{array} \right], \tilde{A}_{12} = \left[ \begin{array}{c} 0 \\ -C_2 \\ A_{12} \end{array} \right], \tilde{A}_{21} = \left[ 0 \ 0 \ A_{21} \right], \\ \tilde{B}_1 &= \left[ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ B_1 \end{array} \right], \tilde{x}_1(k) = \left[ \begin{array}{c} X_R(k) \\ e(k) \\ \Delta x_1(k) \end{array} \right], \tilde{x}_2(k) = \Delta x_2(k). \end{aligned}$$

则 (24) 式可简写为

$$\begin{cases} \tilde{x}_1(k+1) = \tilde{A}_{11}\tilde{x}_1(k) + \tilde{A}_{12}\tilde{x}_2(k) + \tilde{B}_1\Delta v(k), \\ 0 = \tilde{A}_{21}\tilde{x}_1(k) + A_{22}\tilde{x}_2(k) + B_2\Delta v(k). \end{cases} \quad (25)$$

(5) 利用定理 1 中线性离散时间广义系统 (1) 使性能指标函数 (6) 达到极小求得最优控制器的过程, 我们可以得到广义扩大误差系统 (18) 使性能指标函数 (19) 达到极小的最优控制  $\Delta u(k)$ , 是状态反馈形式, 可以表示为

$$\Delta u(k) = F_{R0} X_{R0}(k). \quad (26)$$

(6) 进一步注意到

$$X_{R0}(k) = \begin{bmatrix} X_R(k) \\ e(k) \\ \Delta x(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta R(k) \\ \vdots \\ \Delta R(k + M_R - 1) \\ e(k) \\ \Delta x(k) \end{bmatrix},$$

对 (26) 式中的增益矩阵  $F_{R0}$  进行分块,

$$F_{R0} = \left[ F_R(0) \cdots F_R(M_R - 1) \middle| F_e \middle| F_x \right],$$

则  $\Delta u(k)$  可写为

$$\begin{aligned} \Delta u(k) &= \left[ F_R(0) \cdots F_R(M_R - 1) \middle| F_e \middle| F_x \right] \begin{bmatrix} \Delta R(k) \\ \vdots \\ \Delta R(k + M_R - 1) \\ e(k) \\ \Delta x(k) \end{bmatrix} \\ &= \sum_{j=0}^{M_R-1} F_R(j) \Delta R(k+j) + F_e e(k) + F_x \Delta x(k). \end{aligned} \quad (27)$$

将 (27) 式中的  $k$  变为  $k-1$  并利用  $\Delta u(k-1) = u(k) - u(k-1)$ , 当  $k \geq 1$  时有

$$u(k) = u(k-1) + \sum_{j=0}^{M_R-1} F_R(j) \Delta R(k+j-1) + F_e e(k-1) + F_x \Delta x(k-1),$$

其中的各系数矩阵可以确定, 初始值  $x(0)$ ,  $u(0)$ ,  $e(0)$  可任意赋值.

这就是本文对于系统 (1) 所求得带有预见前馈补偿的最优预见控制器, 下面通过数值仿真说明此控制器的有效性.

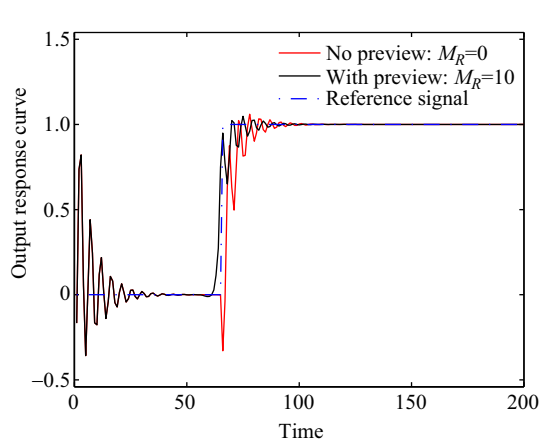


图 1 输出响应  
Figure 1 Output response

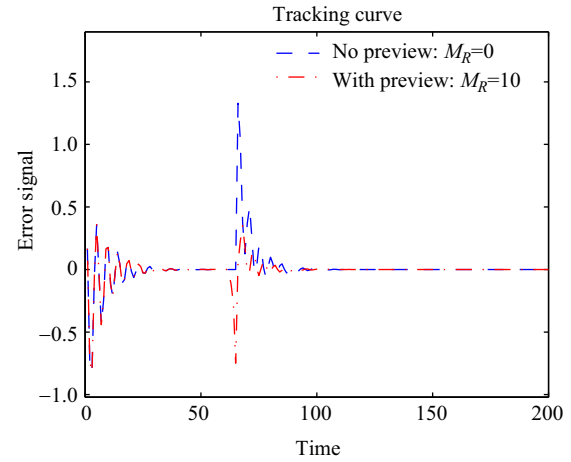


图 2 误差信号  
Figure 2 Error signals

## 5 数值仿真

考虑形如系统 (1) 的离散时间广义系统, 其中

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

通过计算, 系统满足本文的假设条件. 选择  $K = [1 \ 1 \ 0]$ , 使得闭环系统是因果的.

对于闭环系统, 存在非奇异矩阵  $Q_1, P_1$  将其系数矩阵变为

$$A_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, A_{12} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}, A_{21} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \end{bmatrix}, A_{22} = -3, B_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, B_2 = 1, C_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}, C_2 = 0.$$

取允许初始状态为  $x_1(0) = [0 \ 1]^T$ , 初始输入为  $u(0) = 0.5$ . 设预见步数为  $M_R = 10$ , 仿真时间  $T = 180$ . 目标值信号设为

$$R(k) = \begin{cases} 0, & 0 < k < [T/3], \\ 1, & k \geq [T/3]. \end{cases}$$

取权重矩阵为

$$Q_e = 5, \Psi = 1.$$

经计算知系统满足条件 (H1)~(H3), 因此相应的广义扩大误差系统满足引理 1 的全部条件. 用 MATLAB 进行数值仿真, 可以得到输出响应如图 1 所示.

通过比较采用预见控制和不采用预见控制两种情形下的跟踪曲线和相应的误差曲线, 如图 2. 可以发现, 当采用预见控制时, 超调量明显减小了, 而且可以更快地达到稳定状态.

## 6 结论及展望

本文针对线性离散时间广义系统, 设计了最优预见控制器. 首先利用一阶前向差分算子构造了含有预见信号的广义扩大误差系统, 再由系统的因果能控性通过预反馈的方法得到了不含非因果性的广义闭环系统. 在此基础上, 巧妙地将广义系统的最优控制问题转化为正常系统的最优控制问题. 再利用最优调节理论, 得到了带有预见前馈补偿的最优预见控制器. 为了方便本文结果的应用, 还给出了数值实现步骤. 最后的数值仿真说明了本文的正确性和有效性.

在以后的研究中, 一方面, 力求对原系统的所作假设和加强条件进行减弱, 使研究的背景更加广泛. 另一方面, 将本文的结论推广到带有时滞和不确定的广义系统中, 甚至非线性的广义系统中, 将会成为新的研究方向.

## 参考文献

- 1 Luenberger D G. Dynamics equation in descriptor form. *IEEE Trans Automat Contr*, 1977, 22: 312–321
- 2 Verghese G C, Levy B C, Kalath T. A generalized state-space for singular systems. *IEEE Trans Autoatic control*, 1981, 26: 811–831
- 3 Feng Z S, Feng C Y. The invariance principle of singular nonlinear systems and its applications. *World Congress Comput Sci Inf Eng*, 2009, 5: 102–106
- 4 Sun X, Zhang Q L, Yang C Y, et al. Delay-dependent stability analysis and stabilization of discrete-time singular delay systems. *Acta Autom Sin*, 2010, 36: 1477–1483
- 5 Fang M. Delay-dependent stability analysis for discrete singular systems with time-varying delays. *Acta Autom Sin*, 2010, 36: 751–755
- 6 Chadli N, Darouach M. Novel bounded real lemma for discrete-time descriptor systems: application to  $H_\infty$  control design. *Automatica*, 2012, 48: 449–453
- 7 Ren J C, Zhang Q L. Non-fragile PD state  $H_\infty$  control for a class of uncertain descriptor systems. *Appl Math Comput*, 2012, 218: 8806–8815
- 8 Sajja S, Corless M, Zeheb E, et al. On dimensionality reduction and the stability of a class of switched descriptor systems. *Automatica*, 2013, 49: 1855–1860
- 9 Gao Z W, Shi X Y. Observer-based controller design for stochastic descriptor systems with Brownian motions. *Automatica*, 2013, 49: 2229–2235
- 10 Tomizuka M. Optimal continuous finite preview problem. *IEEE Trans Automat Control*, 1975, 20: 326–330
- 11 Katayama T, Ohki T, Inoue T, et al. Design of an optimal controller for a discrete-time system subject to previewable demand. *Int J Control*, 1985, 41: 677–699
- 12 Cheng J F, Dong X M, Xue J P, et al. Fuzzy preview controller design for aircraft-pilot closed loop system. *Acta Aeronaut et Astronaut Sin*, 2014, 35: 807–820 [程建锋, 董新民, 薛建平, 等. 飞机 — 驾驶员闭环系统模糊预见控制器设计. *航空学报*, 2014, 35: 807–820]
- 13 Nidhika B, Akhilesh S. Optimal preview control: a review. *Optimal Control Appl Methods*, 2015, 36: 241–268
- 14 Cohen A, Shaked U. Robust discrete-time  $H_\infty$ -optimal tracking with preview. *Int J Robust Nonlin Control*, 1995, 8: 29–37
- 15 Chintae C, Chintsao T.  $H_\infty$  preview control for discrete-time systems. *J Dynamic Syst Meas Control*, 2001, 123: 117–124
- 16 Cohen A, Shaked U. Linear discrete-time  $H_\infty$ -optimal tracking with preview. *IEEE Trans Autom Control*, 1997, 42: 270–276
- 17 Liao F C, Takaba K, Katayama T, et al. Design of an optimal preview servomechanism for discrete-time systems in a multirate setting. *Dynam Contin Discrete Impulsive Syst Ser B: Appl Algor*, 2003, 10: 727–744
- 18 Zhen Z Y, Wang Z S, Wang D B. Optimal preview tracking control based on information fusion in error system. *Control Theory Appl*, 2009, 26: 425–428 [甄子洋, 王志胜, 王道波. 基于误差系统的信息融合最优预见跟踪控制. *控制理论与应用*, 2009, 26: 425–428]

- 19 Zhen Z Y, Wang Z S, Wang D B. Discrete system optimal tracking control based on information fusion estimation. *Control Decision*, 2009, 24: 81–85 [甄子洋, 王志胜, 王道波. 基于信息融合估计的离散系统最优跟踪控制. *控制与决策*, 2009, 24: 81–85]
- 20 Wang Z S. Information fusion optimal preview control for nonlinear discrete system. *Control Decision*, 2008, 23: 397–402 [王志胜. 非线性离散系统的信息融合最优预见控制. *控制与决策*, 2008, 23: 397–402]
- 21 Yang D M, Zhang Q L, Yao B. *Singular Systems*. Beijing: Science Press, 2004. 47–50 [杨冬梅, 张庆灵, 姚波. 广义系统. 北京: 科学出版社, 2004. 47–50]
- 22 Liao F C, Zhang Y, Gu Z Q. Design of optimal preview controller for a class of linear discrete singular systems. *Control Eng China*, 2009, 16: 299–303 [廖福成, 张莹, 顾则全. 一类线性离散广义系统最优预见控制器设计. *控制工程*, 2009, 16: 299–303]
- 23 Liao F C, Tomizuka M, Cao M, et al. Optimal preview control for discrete-time descriptor causal systems in a multirate setting. *Int J Control*. 2013, 86: 844–854
- 24 Cao M J, Liao F C. Design of an optimal preview controller for linear discrete-time descriptor systems with state delay. *Int J Syst Sci*, 2015, 46: 932–943
- 25 Liao F C, Cao M J, Hu Z X, et al. Design of an optimal preview controller for linear discrete-time causal descriptor systems. *Int J Control*, 2012, 85: 1616–1624
- 26 Cheng Z L, Hong H M, Zhang J F. The optimal regulation of generalized State-space systems with quadratic cost. *Int Federation Autom Control*, 1988, 24: 707–710
- 27 Cheng Z L, Feng J. Numerical calculation for quadratic optimal regulator problem of linear discrete-time descriptor systems. In: *Proceedings of the Annual for Control and Decision of China, Heihe*, 1998. 56–61 [程兆林, 冯健. 离散时间奇异线性系统二次指标最优调节器问题的数值计算. *中国控制与决策学术年会论文集*, 黑河, 1998. 56–61]

## Optimal preview control of linear discrete-time descriptor systems

CAO MengJuan<sup>1,2</sup>, LIAO FuCheng<sup>1\*</sup> & WU Jiang<sup>1</sup>

<sup>1</sup> *School of Mathematics and Physics, University of Science and Technology Beijing, Beijing 100083, China;*

<sup>2</sup> *School of Automation and Electrical Engineering, University of Science and Technology Beijing, Beijing 100083, China*

\*E-mail: fcliao@ustb.edu.cn

**Abstract** We studied the design of an optimal preview controller for linear discrete-time descriptor systems. We first improved the theorem on optimal regulator theory for linear discrete-time descriptor systems. Then, we applied the first-order forward difference operator for the status equation and the previewable reference signal. Thus, a descriptor augmented error system with a previewable reference signal was created, and the tracking problem was transformed into a regulator problem of the descriptor augmented error system. We then discussed the relationship between the stability and causal controllability of the transformed and original system. By applying the feature of causal controllability, we introduced pre-feedback to transform the problem into an equivalent regulator problem for the descriptor causal system. The problem was then further transformed into an optimal control problem for a standard system derived from the descriptor augmented error system by modifying the quadratic performance index. Finally, we derived the optimal preview controller with preview action from the theorem thus obtained by improving the optimal regulator theory. For the ease of application, we presented the steps for realizing the theory, and validated the results through numerical simulation.

**Keywords** linear discrete-time descriptor system, descriptor augmented error system, causal controllability, causal observability, preview control, optimal control





**CAO MengJuan** was born in Shandong, China, in 1987. She is currently a Ph.D. candidate at the School of Automation, University of Science and Technology Beijing, China. Her research interests mainly include the preview control theory of descriptor systems, multi-rate systems, and computer simulation.



**LIAO FuCheng** was born in 1957. He received his Ph.D. degree in control theory and control engineering from the University of Science and Technology Beijing, China, in 2007. Currently, he is a professor at the School of Mathematics and Physics, University of Science and Technology Beijing, China. His current research interests are preview control and robust control.



**WU Jiang** was born in Liaoning, China, in 1985. He is currently a Ph.D. candidate at the School of Mathematics and Physics, University of Science and Technology, Beijing, China. His research interests mainly include the analysis of the stability of dynamic systems, and the preview control theory of stochastic systems, descriptor systems, etc.