

波射线理论在大气正压不稳定中的应用

亢妍妍^{①②*}, 李耀锟^③

① 北京大学物理学院, 北京 100871;

② 国家海洋环境预报中心, 国家海洋局海洋灾害预报技术研究重点实验室, 北京 100081;

③ 北京师范大学全球变化与地球系统科学研究院, 北京 100875

* 联系人, E-mail: yanyan051022@163.com

2016-07-08 收稿, 2016-08-22 修回, 2016-08-23 接受, 2016-11-21 网络版发表

国家重点基础研究发展计划(2014CB953903, 2015CB953601)和国家自然科学基金(41505042)资助

摘要 应用球面上Rossby波射线理论初步探讨了基本流为急流的大气中正压扰动的动力学行为, 对正压不稳定的条件进行了再思考, 指出存在一个准地转位势涡度梯度 β_M 的负区, 在这个区域中向北传播的扰动振幅增长很大, 为扰动发展的不稳定区, 此外扰动能量无法穿越 $\beta_M=0$ 的线, 据此称之为陷波线. 在 90°E , 20°N 给定一个初始扰动, 应用包含急流的理想风速廓线分析指出, 对于非定常波, 扰动的行为依赖于初始的纬向波数 k 和经向波数 l . k 值较小的大气长波经向传播范围大, 向北传播容易被陷波线捕获, 而尺度较小的短波不能到达陷波线, 因此能够在西风南北振荡并向下游传播. 对 $k=1$, $l=8$ 的大气长波, 向北传播时波能量增加, 在急流以北波能量达到最大值, 当靠近陷波线时能量迅速减小, 最终在陷波线中能量衰减为零. 向北传播时波能量的增大, 意味着扰动从急流以南的基本风场中获得的能量传到急流以北, 在陷波线附近能量又还给了基本流, 完成了大气中能量的南北输送. 进一步计算了1和6月500 hPa上实际纬向风速廓线下扰动能量的传播, 其结果大体和理想基流的结果相同, 不同之处在于冬季低纬度向南的扰动容易被东风带阻挡, 不能传播到南半球; 而夏季低纬非定常扰动可以穿越东风带到达南半球, 并且在东风带中形成西传的波动.

关键词 正压不稳定, 波射线, Rossby波, 位势涡度梯度, 急流

早在20世纪30年代Rossby指出高空图上的槽、脊实际上是一类发生在旋转地球大气中的长波或行星波^[1], 大气长波发现不仅极大推动了天气预报和大气环流的研究, 而且开创了Rossby波动力学这一全新领域. 最早研究大气不稳定性的是赵九章^[2], 指出扰动发展的能量主要来自于背景的力管场. Kuo^[3]研究了正压大气的不稳定性, 他指出正压大气不稳定的必要条件是存在绝对涡度梯度的零线, 这一结论被称为Rayleigh-Kuo准则. 之后又有学者进一步分析了大气的斜压不稳定^[4~7], 这些研究为20世纪发展数值天气预报奠定了重要的理论基础. 当今新的气象

方法不断出现, 数值模式已普遍应用于天气和气候预报, 然而回顾当年这些重要的理论, 对于人们从动力学角度更深刻认识地球流体运动的基本规律有启发性意义.

Rossby波的稳定性一般是通过本征值的方法来讨论, 将正压位势涡度方程在小扰动假定下线性化, 并取谐波解, 即 $\psi(x, y, t) = e^{ik(x-ct)}\phi(y)$, 如基本风场为 $U(y)$, 则可以得到通常的Reyeigh-Kuo方程^[3]. 在一定条件下, 这个方程原则上可求得本征值解, 本征值为 $c=c_r+ic_i$. 如果 $c_i>0$, 则波动不稳定. 这个方法存在两个众所周知的问题: (1) 数学上, 这是一个变系数

引用格式: 亢妍妍, 李耀锟. 波射线理论在大气正压不稳定中的应用. 科学通报, 2016, 61: 3718–3725

Kang Y Y, Li Y K. On the barotropic instability using wave ray theory (in Chinese). Chin Sci Bull, 2016, 61: 3718–3725, doi: 10.1360/N972016-00501

常微分方程,并不是对所有风速廓线都能求得解析解,甚至近似解;(2)物理上,即使求出本征值 c_i ,但由于 $c_i > 0$,波振幅将指数形式地快速增长,容易违背小扰动假定.另一方面实际大气中的扰动并不是正弦行星波,而是以螺旋行星波^[8,9]为主.螺旋行星波的波数和频率均为时间和空间的缓变函数,不是简单的简谐波,其等位相线为螺旋状的结构.正弦行星波和螺旋行星波不仅在几何形态上不同,在动力学上也有重大差异,倾斜的槽脊线才能完成动量的南北输送^[10],对此叶笃正和朱抱真^[11]有过详细的讨论.季劲钧^[12]、陈英怡和巢纪平^[13]进而把问题扩展到斜压大气,并推导出螺旋行星波的波作用密度守恒,刘飞等人^[14]在这个基础上定量计算了斜压大气中波能量的发展以及波射线路径.

Rossby波的能量以群速度传播,在不均介质中有一条空间曲线,若其每一点的切线方向与群速度的方向相合,则称这条曲线为波射线^[15],Whitham^[16]对射线的运动学给出了一个详细的介绍.大气和海洋中的扰动形式多样,其共同形成一个缓慢变化的波群或波包,Hoskins和Karoly^[17]最早用射线的方法研究了缓变介质中球面Rossby波的传播,之后众多学者对射线理论进行补充和发展^[18~21].射线理论同时能计算行星波振幅的空间分布和时间演变,如果Rossby波传播过程中振幅不断增加,意味着Rossby波不断从基本场中吸收能量,最终导致不稳定的发生.区别于Kuo理论中简谐波的近似,本文假设大气是一个缓慢变化的介质,用缓变波群的概念来研究一个扰动的总体行为,通过球面上Rossby波的射线理论^[17]来研究基本流包含了急流的大气正压不稳定性问题及其他有关的动力学特征,进一步发展郭晓岚提出的正压不稳定这一经典理论.

1 资料和方法

1.1 资料介绍

本文使用的风场资料来自美国国家环境预测中心/国家大气研究中心(NCEP/NCAR)再分析资料^[22],包括长期月平均的水平纬向风场,水平分辨率为 $2.5^\circ \times 2.5^\circ$,气候平均的时间从1981年1月到2010年12月.

1.2 正压位势涡度方程

参照Hoskins和Karoly^[17]球坐标系统中涡度方程,使用Mercator投影,做如下坐标变换:

$$x = a\lambda, y = a \ln[(1 + \sin \varphi) / \cos \varphi], z = z, \quad (1)$$

以及

$$\frac{1}{a \cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \lambda} = \frac{1}{\cos \varphi} \frac{\partial}{\partial x}, \quad \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial \varphi} = \frac{1}{\cos \varphi} \frac{\partial}{\partial y}, \quad (2)$$

$$\nabla_M^2 = \frac{1}{\cos^2 \varphi} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right),$$

式中, λ, φ 分别为经度、纬度, a 为地球半径.

在Mercator投影下,球坐标系中的正压位势涡度方程为

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u}_M \frac{\partial}{\partial x} \right) q + \beta_M \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0, \quad (3)$$

式中, $\bar{u}_M$ 为Mercator投影下的基本纬向风速, q 为准地转位势涡度, β_M 为准地转位势涡度的经向梯度, Ω 为地球自传角速度,表达式分别为

$$\bar{u}_M = \bar{u} / \cos \varphi, \quad (4)$$

$$q = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \psi,$$

$$\beta_M = \frac{2\Omega}{a} \cos^2 \varphi - \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{\cos^2 \varphi} \frac{\partial}{\partial y} (\cos^2 \varphi \bar{u}_M).$$

1.3 群速度和射线方程

应用WKB近似,设

$$\psi = A(T, X, Y) e^{i(kx + ly - \sigma t)}, \quad (5)$$

式中, A 为振幅, $X = \varepsilon x, Y = \varepsilon y, T = \varepsilon t, \varepsilon$ 为小参数, k, l 分别为纬向和经向波数, σ 为频率.由式(3)得到色散关系为

$$\sigma = \bar{u}_M k - \frac{\beta_M k}{K^2}, \quad (6)$$

式中, $K^2 = k^2 + l^2$,进一步得到波射线的控制方程:

$$c_{gx} = \frac{\partial \sigma}{\partial k} = \frac{\sigma}{k} + \frac{2\beta_M k^2}{K^4},$$

$$c_{gy} = \frac{\partial \sigma}{\partial l} = \frac{2\beta_M kl}{K^4}, \quad (7)$$

$$\frac{dk}{dt} = -\frac{\partial \sigma}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{dl}{dt} = -\frac{\partial \sigma}{\partial y} = k \left(-\frac{\partial \bar{u}_M}{\partial y} + \frac{1}{K^2} \frac{\partial \beta_M}{\partial y} \right).$$

根据陈英怡和巢纪平^[13]推导的波作用密度方程:

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{c}_g \mathcal{E}) = 0, \quad (8)$$

式中,波作用密度量为

$$\mathcal{E} = \frac{K^4}{\beta_M} A^2 = \frac{\beta_M}{(c - \bar{u}_M)^2} A^2. \quad (9)$$

波作用密度是指能量在一个周期内的平均值,波作用密度的时间变化在均匀介质中完全取决于波作用密度通量的散度. 如果令 Rossby 波能量 $E = K^2 A_0^2$, 对于正压大气, 式(8)可以写为^[13,14]

$$\frac{D_g E}{DT} = 2k l A_0^2 \frac{\partial U}{\partial Y} - E \cdot \nabla \bar{C}_g. \quad (10)$$

式(10)为下文所用的波能量的计算方程.

对无界空间, 或边界上扰动为零的空间, 即分析一个区域内部的性质, 对式(10)作区域积分:

$$t > 0, \iint \frac{\beta_M A^2}{(c - \bar{u}_M)^2} dx dy = 0. \quad (11)$$

如 $c \neq \bar{u}_M$, 式(11)成立的必要条件为在区域中至少存在一条线, 在线上 $\beta_M = 0$.

如果在笛卡尔坐标系下, y_1 表示笛卡尔坐标系的经向方向, 上述条件可以写为

$$\beta_M = \beta - \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y_1^2} = 0. \quad (12)$$

此即 Kuo^[3] 最早给出的正压 Rossby 波不稳定的必要条件.

在实际大气中, β_M 将会出现正值和负值区, 标以 β_M^+ 和 β_M^- 区, 在一般大气环流形势下 β_M 为正值, 但也会出现负值区, 特别在高纬 β 值小时. 把 β_M 分成正、负两个区时, β_M^+ 区远大于 β_M^- 区, 因此式(11)为

$$\iint \frac{\beta_M^+ A^2}{(c - \bar{u}_M)^2} d\Omega = \iint \frac{|\beta_M^-| A^2}{(c - \bar{u}_M)^2} d\Omega. \quad (13)$$

为了达到平衡, β_M^- 值区的波振幅必然将远大于 β_M^+ 区的波振幅. 这表明波的发展或增长很大的区域在 β_M^- 区及其边界附近. 这样就圈定了波发展或不稳定区, 进一步发展了正压不稳定理论.

2 扰动不稳定的分析示例

为了研究正压大气稳定性的一般规律, 首先选取一个理想的纬向平均风场, 其形式为 $\bar{u} = 30 \sin^8(2\varphi) + 5$. 北半球风场廓线如图1所示(南北半球对称), 45°N 存在西风急流. 在这一理想纬向风场下, 位势涡度梯度 β_M 见图1虚线, 在 58°~70°N 之间 β_M 为负值.

假设 90°E, 20°N 存在一个初始扰动, 分别研究

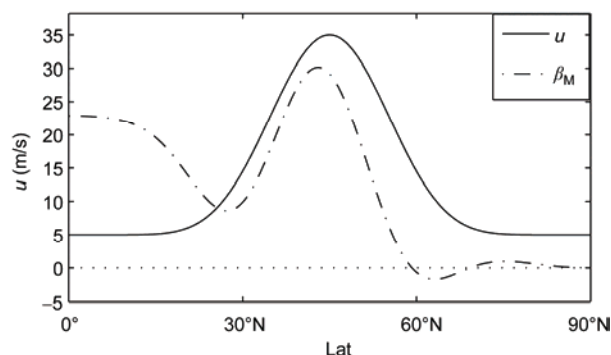


图1 $\bar{u} = 30 \sin^8(2\varphi) + 5$ 风廓线以及对应的绝对位势涡度梯度 $\beta_M \times 10^{12}$

Figure 1 Wind profile of $\bar{u} = 30 \sin^8(2\varphi) + 5$ and the corresponding absolute potential vorticity gradient $\beta_M \times 10^{12}$

超长波 $k=1$, 长波 $k=3$, 以及 $k>3$ 的情况. 假设北半球在经圈方向存在 2 个波, 即相当于 $l=8$, 取不同的经向波数 $l=6, 8, 10$ 波射线路径没有实质上变化(图略), 只是不同的初始波数导致群速度和相速度不同而已. 因此下文以 $l=8$ 为例, 来研究不同纬向波数 k 对波射线路径以及能量发展的影响.

首先初始波数取 $k=1, l=8$, 周期大概为 50 d. 如图2(a)所示, 扰动能量先是向西北方向传播, 大概 6 d 到达 58°N, 即在 $\beta_M = 0$ 的纬度附近完全转为向东传播. 如图2(b)所示 E/E_0 表示波能量增长的幅度, 可以看出来波能量在第 5 天时开始快速增长, 6 d 后能量达到最大值, 之后能量逐渐衰减为零. 其传播速度取决于初始波数 k, l 所决定的初始频率 σ_0 和基本气流 $\bar{u}_M$. 由图2(c)可见扰动能量在往北传播到急流北侧 58°N 附近时达到最大值, 波能量增大 10 倍, 容易发生不稳定. 扰动能量发展或者不稳定的区域非常接近 $\beta_M = 0$ 的线, 但是其继续向北到达 $\beta_M = 0$ 的线时能量又逐渐衰减为零. 计算表明扰动的经向传播尺度依赖于 k , 如果初始波数取 $k=3, l=8$, 波动初始周期大概为 20 d, 波先是向东北方向传播, 其向北不能到达 $\beta_M = 0$ 的线, 而是到达一个纬度后折向低纬传播, 并跨过赤道进入南半球, 最终振荡东传(图2(a)), 对于 $k>3$ 的大气短波向北都不能到达陷波线, 而是以波动的形式向下游传播. 波能量如图2(b)中虚线所示, 扰动向北传播的过程中能量增加, 第 3 天到达最北, 能量也达到最大值, 伴随着波射线向南传播, 波能量也迅速衰减. 巢纪平和叶笃正^[8]曾讨论过, 导波 ($kl>0$) 在急流以南发展, 而曳波 ($kl<0$) 在急流以南衰减.

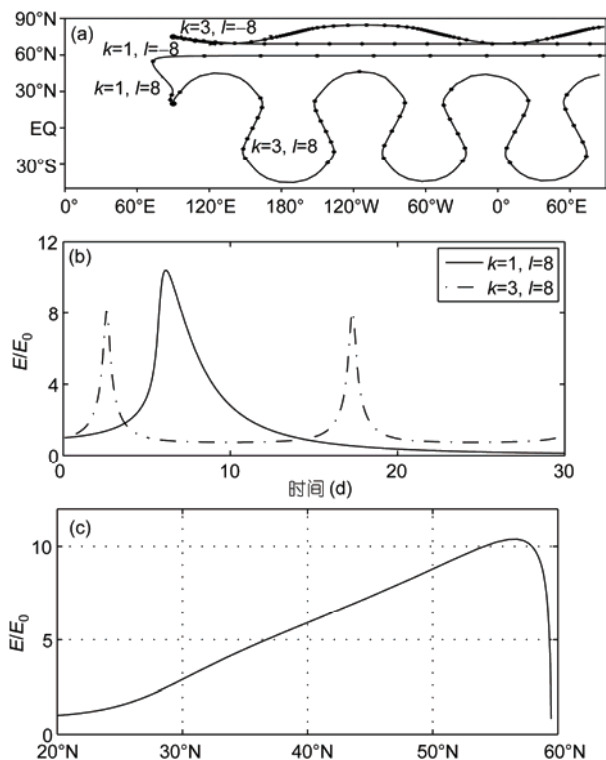


图2 波射线路径和波能量发展图. (a) 波射线路径, 波源分别放在(90°E, 20°N)和(90°E, 75°N); 点的间隔为2 d; (b) 波源90°E, 20°N处波能量发展的时间演变; (c) 初始波数 $k=1, l=8$ 波能量发展与纬度的对应关系

Figure 2 The diagram of ray paths and energy evolution. (a) Ray paths, wave sources are located at 90°E, 20°N and 90°E, 75°N; the markers on the rays indicate 2-day interval; (b) energy evolution for the wave source 90°E, 20°N; (c) energy evolution with latitude for initial wave numbers $k=1, l=8$

对于 $\beta_M=0$ 线以北的扰动, 由于高纬度 β 效应很小, 为了避免风速 u 的作用太大而完全盖过了 β 效应, 使用理想风廓线 $u=30\sin^8(2\varphi)+0.2$, 既保证了准地转位势涡度梯度 β_M 的值不发生变化, 又保证高纬风速较小. 假设初始扰动位于90°E, 75°N, 给定初始波数 $k=1, l=-8$ 时, 波射线路径如图2(a)所示, 这个扰动能量向东南方向传播, 由于所在纬度西风风速非常小, 其传播速度非常缓慢, 需要90 d才能到达 $\beta_M=0$ 的线, 并且在 $\beta_M=0$ 的线附近时, 其能量迅速增长到20倍以上(能量图略). 而对于初始波数 $k=3, l=-8$ 的扰动, 能够在高纬振荡东传(图2(a)), 其传播速度也非常缓慢. 高纬度由于科氏力较弱, Rossby的传播主要受纬向基本风场的影响. 绕极环流风速较大时, 扰动跟随着风场沿纬圈传播, 风速较小时才可以形成南北振荡, 但是其传播速度非常慢, 在月的时间尺度上

它对大气环流的影响并不重要. 由于南北方向来的波都不能穿越 $\beta_M=0$ 的线, 因此也可称这两条线为陷波线.

文中第2节对于式(13)的讨论中指出, 在负的 β_M 区中扰动可大振幅发展, 为此分析了两条陷波线中间 $\beta_M<0$ 的区域扰动的传播. 将扰源放在90°E, 60°N, 取 $k=1, l=-8$, 扰动以曳波形式向东北传播(图3(a)), 6 d以后接近北边的 $\beta_M=0$ 的线, 其能量迅速增长, 6 d时已经增长20倍以上(图3(b)), 可以认为 $\beta_M<0$ 的区域对于向北传播的扰动是个不稳定区.

如上所述, 从陷波线南边来的大气长波, 在向北传播时波能量增大, 这意味着扰动从急流以南的基本风场中取得的能量传到急流以北, 在陷波线中还给基本风场. 由于这是一个无外源作用的模式, 扰动增大的能量来自基本流, 大气长波起到能量南北输送的作用.

3 气候态的纬向风观测以及扰动能量传播

以上只是给出来一个理想的纬向平均风场, 下面来分析实际大气中纬向平均风场的情况. 根据NCEP的30年长期月平均风场资料, 分别计算了1~12月500 hPa高度上纬向平均风场及其 β_M 廓线, 发现在气候平均场上, 1, 5和6月北半球高纬存在 $\beta_M<0$ 的区域, 那么在现实的未经过长时间平均的大气环流场中必然也存在位势涡度梯度 $\beta_M<0$ 的区域, 因此这是一个值得研究的理论问题. 分别以1和6月气候平均的纬向风速廓线为例来研究冬夏北半球的正压不稳定问题.

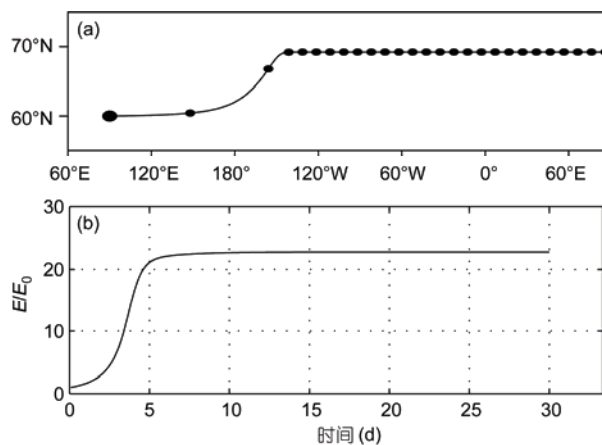


图3 波射线路径(a)和波能量发展的时间演变(b). 波源放在 90°E, 60°N, $k=1, l=-8$; 点的间隔为2 d

Figure 3 Ray paths (a) and energy evolution (b), wave sources are located at 90°E, 60°N, $k=1, l=-8$; the markers on the rays indicate 2-day interval

(i) 1月. 1月500 hPa的纬向风的分布如图4(a)所示, 随纬度分布廓线见图4(b). 可见西风急流在30°N附近, 在高纬是弱的西风, 低纬为东风. 图4(b)中同时给出 β_M (虚线)的分布, 在50°N和55°N之间为负值, 即50°N和55°N上 $\beta_M=0$, 为陷波线.

将初始扰动放在90°E, 20°N, 取 $l=8$, k 分别取1, 3, 5时, k 为1和3的波向北到达陷波线被截获, 而 $k=5$ 的扰动向北到达一定纬度以后折向低纬, 最终被东风带捕获(图5(a)). 波在传播过程中能量的变化见图5(b)和(c). 对于 $k=1$, 能量在第2天达到最大值, 最大值的纬度是39°N, 到达陷波线以后能量开始衰减, 到第10天已接近零. k 为5的这个波并未到达陷波线, 而是先向北传播, 到达拐点以后向南传播, 最终被东风带阻挡, 完全转为向东传播, 进入东风带以后能量迅速衰减为0. 总的来说, 在低纬度, 对于初始 $k < 4$ 的扰动, 可以向北传播到达陷波线被吸收, $k > 4$ 时, 扰动先是向北传播, 到达拐点折向南传播.

(ii) 6月. 图6(a)是气候态上6月500 hPa的纬向风, 这时西风急流在35°N附近, 高纬是弱的西风, 到20°N以南则为东风带, 风速廓线见图6(b). 因风速廓线的差别, β_M 的形式有所不同, 但在57.5°~60°N之间仍存在负区, 即仍存在陷波线.

初始扰动位于90°E, 20°N时, 取 $l=8$, k 为1和3的波动仍可跨过急流到达陷波线(图7(a)), 射线路径和能量演变与基本例子相似. 不同者, 当 $k=5$ 时, 波动南下进入东风带, 形成向西传播的周期性运动. 由于背景场在纬圈方向是均匀的, 如扰动源在北美南部可在赤道东风带形成向西传播的Rossby波列. 众所周知定常波无法穿越东风带, 只有非定常波才能在东风带中传播, 李艳杰与李建平^[21]详细讨论了非定常波在东风气流中传播需要满足的条件, 本文不作

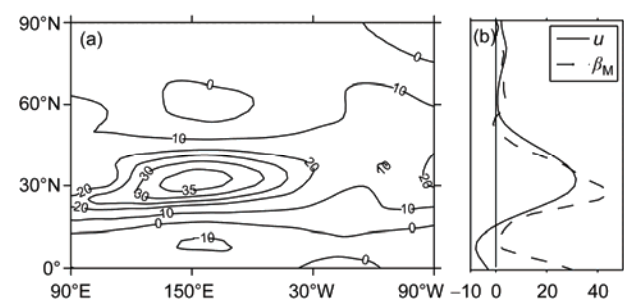


图4 1月500 hPa气候态纬向风场(a)及其纬向平均风廓线和 $\beta_M \times 10^{12}$ (b)
Figure 4 500 hPa climate wind for January (a) and zonal mean wind profile and $\beta_M \times 10^{12}$ (b)

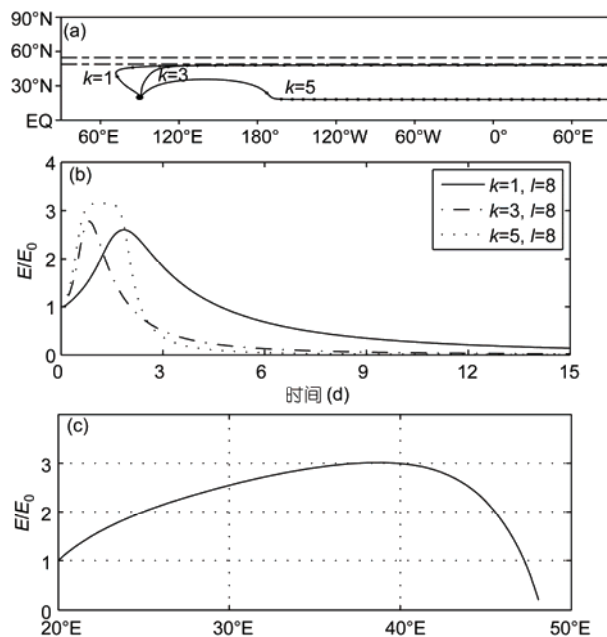


图5 波射线路径和波能量发展图. (a) 1月波射线路径, 波源放在90°E, 20°N, 点的间隔为2 d; (b) 波能量发展的时间演变; (c) 初始波数 $k=1, l=8$ 的波能量发展与纬度的对应关系

Figure 5 The diagram of ray paths and energy evolution. (a) Ray paths for January, wave sources are located at 90°E, 20°N, the markers on the rays indicate 2-day interval; (b) energy evolution with time; (c) energy evolution with latitude for initial wave numbers $k=1, l=8$

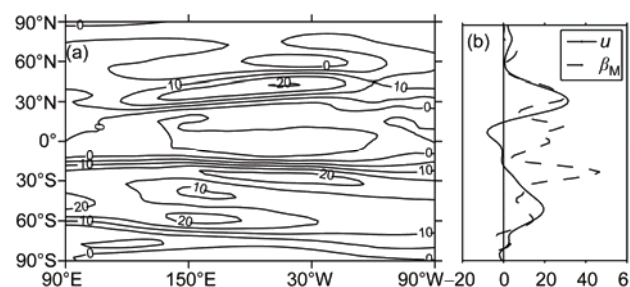


图6 6月500 hPa气候态纬向风场(a)及其纬向平均风廓线和 $\beta_M \times 10^{12}$ (b)

Figure 6 500 hPa climate wind for June (a) and zonal mean wind profile and $\beta_M \times 10^{12}$ (b)

详细的介绍.

4 结论

本文应用射线理论分析了Rossby波发展的动力学问题, 其不同于本征值方法, 不受扰动振幅的限制, 并且能够定量给出波的发展区域, 以及能量的运动轨迹. 射线理论不仅重现了郭晓岚正压不稳定的必要条件, 并进一步指出存在一个 $\beta_M \leq 0$ 的区, 在这个区域中向北传播的扰动振幅增长很大, 为扰动

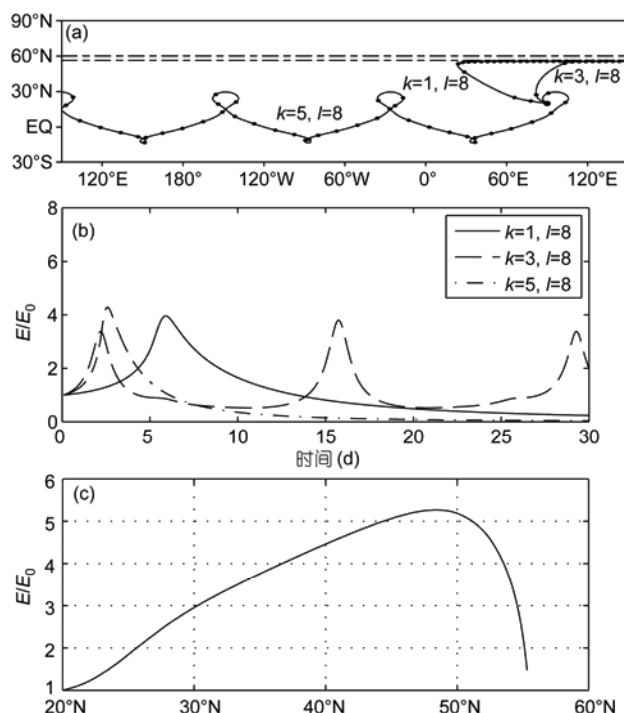


图7 波射线路径和波能量发展图。(a) 6月波射线路径, 波源放在90°E, 20°N, 点的间隔为2 d; (b) 波能量发展的时间演变; (c) 初始波数 $k=1, l=8$ 的波能量发展与纬度的对应关系

Figure 7 The diagram of ray paths and energy evolution. (a) Ray paths for June, wave sources are located at 90°E, 20°N, the markers on the rays indicate 2-day interval; (b) energy evolution with time; (c) energy evolution with latitude for initial wave numbers $k=1, l=8$

发展的不稳定区, 并称 $\beta_M=0$ 的线为陷波线。扰动能否到达陷波线主要取决于纬向波数 k 的大小。对于 k 值小的大气长波, 扰动的经向尺度大, 向北容易碰到陷波线被捕获, 因而无法向下游传播。扰动穿过急流

以后波振幅会增大数倍, 易发生不稳定现象, 而在接近陷波线时, 振幅迅速又减少为零。由于这是一个无外源作用的模式, 波在向北传播过程中振幅增大, 能量来自基本流, 而接近陷波线时, 能量又归还给基本流, 完成了动量的南北输送, 从物理本质上看, 这是一个波流相互作用问题, 大气长波对于能量的南北输送起到关键性作用。

在另一方面, k 值较大的短波经向尺度小, 向北不能到达陷波线, 而是到达一定纬度时就发生转向, 以波动的形式向下游传播, 被约束在西风中的短波与西风急流中向下游传播的波列一致^[23~25]。扰动能量的传播形式与基本气流以及扰动本身的性质密切相关, 不同的初始条件(k, l)或者不同月份基本流场不同, 扰动发展的形式也不相同。本文分别选取1, 6月来代表冬季和夏季来研究了冬夏扰动发展的不同之处。无论冬夏北传的大气长波都容易被陷波线截获, 而短波则有很大不同。冬季低纬度向南的扰动容易被东风带阻挡, 而不能传播到南半球; 而夏季低纬扰动可以穿越东风带到达南半球, 并且在东风带中形成振荡型波动向西传播。本文只讨论纬向平均 u 风场的作用, 而热带降水的反馈以及经向流的输送在Rossby能量跨半球的传播过程中也起到非常重要的作用^[26,27]。

用射线方法来分析扰动发展也存在不足之处, 文中计算的扰动是对某一个初始波数而言的, 而现实的扰动是多个波数的叠加, 不会像文中这样简单, 但仍可以为数值模式研究波动发展提供理论上参考。

致谢 感谢巢纪平院士的建议与讨论。

参考文献

- 1 Rossby C G. Relation between variations in the intensity of the zonal circulation of the atmosphere and the displacements of the semi-permanent centers of action. *J Mar Res*, 1939, 2: 38–55
- 2 Jaw J J. The formation of the semi-permanent center of action in relation to the horizontal solenoidal field. *J Meteorol*, 1946, 3: 103–144
- 3 Kuo H L. Dynamic instability of two-dimensional nondivergent flow in a barotropic atmosphere. *J Meteorol*, 1949, 6: 105–122
- 4 Charney J G. The dynamics of long waves in a baroclinic westerly current. *J Meteorol*, 1947, 4: 135–163
- 5 Eady E T. Long waves and cyclone waves. *Tellus*, 1949, 1: 33–52
- 6 Pedlosky J. *Geophysical Fluid Dynamics*. Berlin: Springer-Verlag, 1979. 624
- 7 Chao J P, Wang X L. Energy propagation of Rossby wave in a baroclinic atmosphere (in Chinese). In: *Collection of Atmospheric Sciences*. Nanjing: Nanjing University Press, 1993. 49–61 [巢纪平, 王晓丽. 斜压大气中能量传播的射线理论. 见: 大气科学文集. 南京: 南京大学出版社, 1993. 49–61]

- 8 Chao J P, Ye D Z. The spiral-like planetary waves in the barotropic atmosphere (in Chinese). *Chin J Atmos Sci*, 1997, 1: 81–88 [巢纪平, 叶笃正. 正压大气中的螺旋行星波. *大气科学*, 1997, 1: 81–88]
- 9 Liu S S, Yang D S. The spiral structure of the planetary waves in the earth atmosphere (in Chinese). *Acta Meteorol Sin*, 1979, 1: 14–27 [刘式适, 杨大升. 地球大气行星波的螺旋结构. *气象学报*, 1979, 1: 14–27]
- 10 Chen J K. The variation mechanism of the spiral structure of the spherical planetary waves in a barotropic atmosphere (in Chinese). *Sci Meteorol Sin*, 1980, Z1: 27–41 [陈久康. 正压大气行星波螺旋结构变化的机制. *气象科学*, 1980, Z1: 27–41]
- 11 Ye D Z, Zhu B Z. Some Basic Problems in Atmospheric Circulation (in Chinese). Beijing: Science Press, 1958 [叶笃正, 朱抱真. 大气环流中的若干基本问题. 北京: 科学出版社, 1958]
- 12 Ji J J. Spiral planetary waves and the transfer processes of angular momentum in the baroclinic atmosphere (in Chinese). *Acta Meteorol Sin*, 1979, 37: 90–96 [季劲钧. 斜压球面螺旋行星波和角动量输送. *气象学报*, 1979, 37: 90–96]
- 13 Chen Y Y, Chao J P. Conservation of wave action and development of spiral Rossby waves (in Chinese). *Sci China Ser B*, 1983, 7: 663–672 [陈英怡, 巢纪平. 螺旋 Rossby 波的波密度守恒和稳定性. *中国科学 B 辑*, 1983, 7: 663–672]
- 14 Liu F, Chao J P, Huang G, et al. A semi-analytical model for the propagation of Rossby waves in slowly varying flow. *Chin Sci Bull*, 2011, 56: 2727–2731
- 15 Rossby C G. On the propagation of frequencies and energy in certain types of ocean and atmospheric waves. *J Meteorol*, 1945, 2: 187–204
- 16 Whitham G. A note on group velocity. *J Fluid Mech*, 1960, 9: 347–352
- 17 Hoskins B J, Karoly D J. The steady linear response of a spherical atmosphere to thermal and orographic forcing. *J Atmos Sci*, 1981, 38: 1179–1196
- 18 Karoly D J. Rossby wave propagation in a barotropic atmosphere. *Dyn Atmos Oceans*, 1983, 7: 111–125
- 19 Hoskins B J, Ambrizzi T. Rossby wave propagation on a realistic longitudinally varying flow. *J Atmos Sci*, 1993, 50: 1661–1671
- 20 Xu X D, Miao Q J. The low frequency dynamics on the wave ray propagation of tropical atmosphere energy dispersion (in Chinese). *Acta Meteorol Sin*, 2000, 58: 534–544 [徐祥德, 苗秋菊. 热带大气能量频散波射线的低频动力学特征. *气象学报*, 2000, 58: 534–544]
- 21 Li Y J, Li J P. Propagation of planetary waves in the horizontal non-uniform basic flow (in Chinese). *Chin J Geophys*, 2012, 55: 361–371 [李艳杰, 李建平. 水平非均匀基流中行星波的传播. *地球物理学报*, 2012, 55: 361–371]
- 22 Kalnay E, Kanamitsu M, Kistler R, et al. The NCEP/NCAR 40-year reanalysis project. *Bull Amer Meteorol Soc*, 1996, 77: 437–471
- 23 Branstator G. Horizontal energy propagation in a barotropic atmosphere with meridional and zonal structure. *J Atmos Sci*, 1983, 40: 1689–1708
- 24 Branstator G. Circumglobal teleconnections, the jet stream waveguide, and the North Atlantic Oscillation. *J Clim*, 2002, 15: 1893–1910
- 25 Ding Q, Wang B. Circumglobal teleconnection in the Northern Hemisphere summer. *J Clim*, 2005, 18: 3483–3505
- 26 Liu F, Wang B. Mechanisms of global teleconnections associated with the Asian summer monsoon: An intermediate model analysis. *J Clim*, 2013, 26: 1791–1806
- 27 Li Y J, Li J P, Jin F F, et al. Interhemispheric propagation of stationary Rossby waves in a horizontally nonuniform background flow. *J Atmos Sci*, 2015, 72: 3233–3256

On the barotropic instability using wave ray theory

KANG YanYan^{1,2} & LI YaoKun³

¹School of Physics, Peking University, Beijing 100871, China;

²Key Laboratory of Research on Marine Hazards Forecasting, National Marine Environmental Forecasting Center, Beijing 100081, China;

³College of Global Change and Earth System Science, Beijing Normal University, Beijing 100875, China

Based on the spherical Rossby wave ray theory, dynamic characteristics of the barotropic disturbances associated with the westerly jet are discussed, and the barotropic instability conditions are reconsidered. The well-known Rayleigh-Kuo instability criterion indicates that the gradient of potential vorticity must change sign in the unstable area. Kuo uses the method of eigenvalues by assuming disturbances to be simple harmonic waves; however, in this work we assume the atmosphere to be a slowly varying medium, and calculate the amplitude of the Rossby wave by ray tracing. We find a band where the quasi-geostrophic potential vorticity gradient (β_M) is negative, and the amplitude of the northward perturbation grows substantially in this area, making it an unstable region for northward perturbations. In addition the perturbations cannot cross the line of $\beta_M=0$, and therefore, this is referred to as the “trapped line”.

Characteristics of the nonstationary Rossby wave are first analyzed using an ideal zonal mean wind profile $u = 30\sin^8(2\varphi) + 0.2$, with the “trapped line” located at 58°N and 70°N , and $\beta_M < 0$ between 58°N and 70°N . We put the wave source at 90°E , 20°N with meridional wave number $l = 8$, but with different zonal wave numbers k . The results suggest that the behavior of the disturbances depends on the initial wave numbers k and l . Northward disturbances with smaller k can propagate further, while disturbances with larger k cannot reach high latitudes and turn back towards the south at turning points $\beta_M / \left(u_M - \frac{\sigma}{k}\right) - k^2 = 0$. As such, only long Rossby waves with small k values can reach the

“trapped line”, while short Rossby waves with larger k values cannot reach it. Long Rossby waves with $k = 1$, $l = 8$, first propagate northwest, and then turn eastwards at the “trapped line”. Their energy increases while propagating northward, reaching its maximum in the northern part of the jet stream, and then decays rapidly to zero near the “trapped line”. The energy increases during northward propagation, which means the disturbance obtains energy from the base flow in the southern part of the jet stream, and gives it back to the base flow near the “trapped line”, which completes energy transport from south to north.

Further, we also calculated the energy evolution with realistic January and June wind profiles using NCEP data. We conclude that long waves with $k < 3$ are easily trapped by the “trapped line” in both winter and summer, while the propagation of short waves differs substantially between winter and summer. The non-stationary disturbances at low latitudes are easily blocked by easterly winds during winter; however, they can cross easterlies and then propagate to the southern hemisphere in summer, forming a westward wave in the easterlies. It is known that stationary Rossby waves cannot propagate in the easterlies, because only non-stationary waves that meet many conditions can propagate in the easterlies; therefore, this scenario will not be detailed in this paper.

barotropic instability, wave rays, Rossby wave, quasi-geostrophic potential vorticity gradient, jet stream

doi: 10.1360/N972016-00501