

塑性本构关系和塑性体积变形

高 万 章

(北京建筑工程学院基础部, 北京 100044)

摘 要

在塑性本构关系的研究中, 人们一直延用着单一曲线假设和维象理论的屈服条件。因此, 不但使得塑性变形过程中的理论问题得不到解决, 而且由此得到的本构关系只能近似地用于少数塑性性能很好的材料。本文在作者于 1984 年导出的 σ_m, τ_P, S_2 空间内对塑性变形进行分析, 根据相似曲线假设和在 σ_m, τ_P, S_2 空间建立的更加理性化的屈服条件建立的全量本构关系, 较好地描述了各种工程材料在各种应力状态作用下的塑性变形规律及塑性变形时的体积变化规律。根据 σ_m, τ_P, S_2 以及它们各自引起的变形的相互独立性, 还较好地解决了偏离简单加载的问题, 并从理论上提出了材料在拉伸时失稳的原因。使塑性力学中的几个疑难问题得到了解决。为建立一个与材料变形行为一致的更加理性化的新塑性理论体系奠定了基础。

关键词: 滑移系, 相似曲线假设, 相对加载, 本构关系, 拉伸失稳

一、引 言

通过对应力张量的合理分解, 我们已经找到了 σ_m, τ_P, S_2 这样三个应力分量^{[1][2]}。这三个应力分量具有以下三个特点:

- (1) 它们相互独立并且与其对应的应力张量(或它的三个主应力)等价。
- (2) 它们与其对应的应变分量分别成单一线性关系, 即

$$\begin{cases} \sigma_m = \frac{E}{1-2\nu} \varepsilon_m, \\ \tau_P = G\gamma_P, \\ S_2 = G\gamma_2, \end{cases} \quad (1)$$

其中 ε_m 为 σ_m 对应的平均应变, γ_P, γ_2 分别为纯剪切应力 τ_P, S_2 对应的剪应变,

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}.$$

- (3) 它们和材料破坏时所表现出来的物理现象相一致。

根据这三个应力分量, 我们可以找到与实验结果一致的各向同性材料的滑移系。单晶体

本文 1989 年 9 月 1 日收到。

1) 高万章, 广义纯剪切与滑移线方向, 北京建筑工程学院基础部科研教学报告会论文集, 1985 年 6 月。

2) 高万章, 简单、精确的通用极限状态公式, 北方七省市(区)第一届力学学术会议论文集, 1986 年 11 月。

材料的滑移系与它的结晶形状及晶格内的原子排列有关, 滑移系的开动则与应力状态有关^[2]。各向同性材料一般由随机排列的晶粒(例如各种多晶体金属材料)或颗粒(例如岩土材料)构成。从宏观上看, 不存在象单晶体材料中固有的那些滑移系。因此, 滑移系及其开动都应只与应力状态有关。对于密实材料, 我们假定 σ_m 只引起弹性变形。因此, 塑性滑移只与 τ_P , S_2 有关。因为 τ_P 和 S_2 是两组相互独立的平面纯剪切应力(如图 1 所示), 它们引起的

变形也应该是相互独立的。又因为 $|\mu_s| = |S_2/\tau_P| \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$, 即 $|S_2| \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \tau_P$ 。所以恒有

$|S_2| < \tau_P$ 。这说明, τ_P 和 S_2 引起的变形并不是同时进入塑性变形状态。当 τ_P 达到屈服极限

值 τ_{PS} 而进入塑性变形状态时, S_2 的值还远

小于 τ_{PS} , 因而仍然滞留在弹性变形状态。

我们把这个变形阶段称为第一塑性变形阶段。

随着塑性变形的发展, 材料不断强化, 使

τ_P 和 S_2 不断增大, 当 S_2 的值也达到材料的

屈服极限值而进入塑性变形状态时, 则 τ_P 和

S_2 同时处于塑性变形状态。我们把这个变形

阶段称为第二塑性变形阶段。在第一塑性变

形阶段只有和 τ_P 对应的滑移面(即图 1 中 τ_P

所在平面)开动; 在第二塑性变形阶段, τ_P 和

S_2 对应的滑移面(如图 1 中左侧单元体所示)全都开动。这些滑移面的外法线方向分别为^{[1], [1, 2]}

$$[l_{11}l_{21}l_{31}] = \left[+\left(\frac{S_1 + S_2}{2S_1 + S_2}\right)^{\frac{1}{2}} \quad 0 \quad \pm\left(\frac{S_1}{2S_1 + S_2}\right)^{\frac{1}{2}} \right] \quad (\mu_s \geq 0), \quad (2)$$

$$[l_{11}l_{21}l_{31}] = \left[+\left(\frac{S_1}{2S_1 + S_2}\right)^{\frac{1}{2}} \quad 0 \quad \mp\left(\frac{S_1 + S_2}{2S_1 + S_2}\right)^{\frac{1}{2}} \right] \quad (\mu_s \leq 0), \quad (3)$$

$$\begin{cases} [l_{12}l_{22}l_{32}] = \left[+\left(\frac{S_1}{2(2S_1 + S_2)}\right)^{\frac{1}{2}} \quad \mp\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \mp\left(\frac{S_1 + S_2}{2(2S_1 + S_2)}\right)^{\frac{1}{2}} \right], \\ [l_{13}l_{23}l_{33}] = \left[+\left(\frac{S_1}{2(2S_1 + S_2)}\right)^{\frac{1}{2}} \quad \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \mp\left(\frac{S_1 + S_2}{2(2S_1 + S_2)}\right)^{\frac{1}{2}} \right], \end{cases} \quad (4)$$

其中 $S_1 = \sigma_1 - \sigma_m$, $S_2 = \sigma_2 - \sigma_m$, $S_3 = \sigma_3 - \sigma_m$, $\sigma_m = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)$, 且 $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ 。

在(2), (3)式的面上作用的是 τ_P , 在(4)式的面上作用的是 S_2 。在第一塑性变形阶段, (2)或

(3)式的滑移面即已开动。我们称它为主滑移系; 在第二塑性变形阶段, (2), (3), (4)式的滑移

面都开动。由于材料和应力状态的不同, 受力物体有时能进入第二塑性变形阶段, 多数情况下

则不能进入这个变形阶段。我们称(4)式的滑移面为副滑移系。

在上述基础上, 我们得到了与实验结果一致的适用于各种各向同性材料的第一塑性变形

阶段开始时的屈服面方程^[3]。这就是

$$[\tau_{PS} - B(\sigma_m - \sigma_m^0)]^2 + [S_{20} - A(\sigma_m - \sigma_m^0)]^2 = [A^2 + (S_1^0 - B)^2](\sigma_m - \sigma_m^0)^2,$$

1) 见 746 页脚注 1)。

2) 见 746 页脚注 2)。

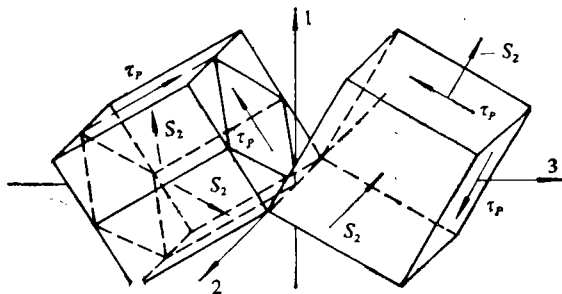


图 1 纯剪切应力及滑移系

$$\left(|S_{20}| \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \tau_P \right), \quad (5)$$

其中 A , B , S_r^0 , σ_m^0 都是与材料性质有关的常数。 S_{20} 是在屈服面上与 τ_{PS} 对应的 S_2 值. 这个方程还可以表示为

$$\tau_{PS} = \sqrt{[A^2 + (S_r^0 - B)^2](\sigma_m - \sigma_m^0)^2 - [S_{20} - A(\sigma_m - \sigma_m^0)]^2} + B(\sigma_m - \sigma_m^0), \quad \left(|S_{20}| \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \tau_{PS} \right). \quad (6)$$

将(1)式代入(6)式, 屈服面方程成为

$$\gamma_{PS} = \sqrt{\left[\frac{2(1+\nu)}{1-2\nu} \right]^2 [A^2 + (S_r^0 - B)^2](\epsilon_m - \epsilon_m^0)^2 - \left[\gamma_{20} - \frac{2(1+\nu)}{1-2\nu} A(\epsilon_m - \epsilon_m^0) \right]^2} + \frac{2(1+\nu)}{1-2\nu} B(\epsilon_m - \epsilon_m^0), \quad \left(|\gamma_{20}| \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \gamma_{PS} \right). \quad (7)$$

以上这些结果, 为研究材料在塑性变形过程中的变形规律奠定了一个新的基础.

二、比例强化模型和相似曲线假设

在经典理论中常用的强化模型和单一曲线假设, 只适用于轴线和 σ_m 轴重合的柱形屈服面. 对于(5)式所描述的轴线和 σ_m 轴不重合的锥形屈服面, 在确定它的强化模型时, 应注意以下三点:

(1) 我们已经假定静水应力(即平均应力) σ_m 只引起弹性变形. 在静水拉伸 (σ_m 为正) 时, 如果材料有可能破坏, 则正如(5)式描述的那样, 在 σ_m 的正象限区内, 屈服面应缩为一点, 即图 2 中 σ_m 轴上的 A 点. 显然, 屈服面顶点 A 的位置与塑性变形无关. 也就是说, 加载面顶点应始终和 A 点重合.

(2) 在加载过程中, 经过塑性变形使材料得到强化, 最大纯剪切应力由它的屈服极限值 τ_{PS} 增大到 τ_P . 这时 S_2 应按同一比值 $k = \tau_P / \tau_{PS}$ 增大(注意, 这和比例加载的含义是不同的). 这一点在比例加载及分段比例加载时已被实验证实.

(3) 在 μ_s 等于常数时, 同一加载面上的 τ_P 加载值与 σ_m 成线性关系, 各加载迹线都通过 σ_m 轴上的 A 点(屈服面的顶点). 如果我们把材料破坏(两部分相互分离)时的 τ_P 值也看成是 τ_P 的一个加载值, 这一点是实验结果的较好近似^[4].

满足以上三点, 加载面应为与屈服面共顶点的锥面. 它的方程是

$$[\tau_P - k B(\sigma_m - \sigma_m^0)]^2 + [S_2 - k A(\sigma_m - \sigma_m^0)]^2 = [(kA)^2 + k^2(S_r^0 - B)^2](\sigma_m - \sigma_m^0)^2, \quad \left(|S_2| \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \tau_P \right). \quad (8)$$

加载函数为

$$f = \sqrt{[\tau_P - k B(\sigma_m - \sigma_m^0)]^2 + [S_2 - k A(\sigma_m - \sigma_m^0)]^2} - \sqrt{(kA)^2 + k^2(S_r^0 - B)^2}(\sigma_m - \sigma_m^0), \quad \left(|S_2| \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \tau_P \right), \quad (9)$$

式中

$$k = \frac{\tau_P}{\tau_{PS}} = \frac{S_2}{S_{20}},$$

我们把 k 称为强化系数, 把由 k 引进的强化模型称为比例强化模型。在轴线与 σ_m 轴重合的柱形屈服面中, 这个模型被简化为等向强化模型。比例强化模型的加载面如图 2 所示。

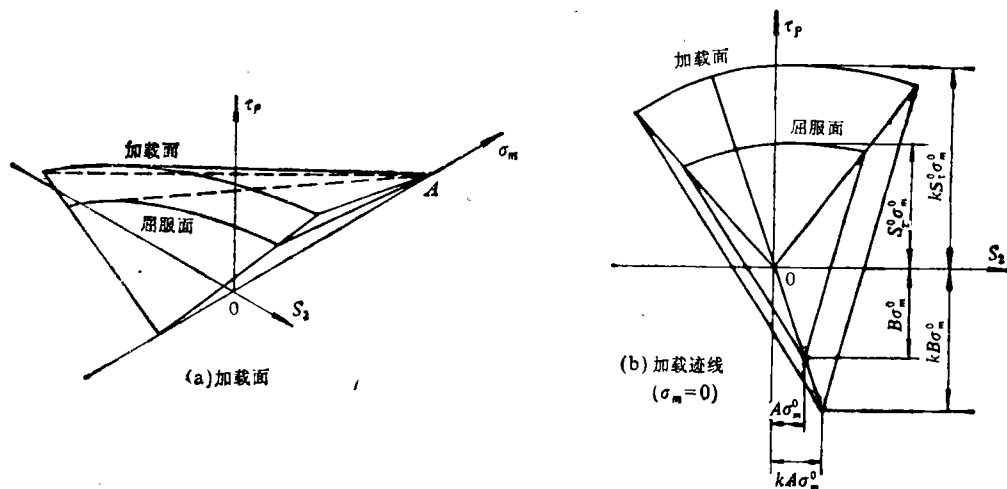


图 2 第一塑性变形阶段的加载面

按照比例强化模型, 在同一加载面上的 τ_P 加载值以及屈服极限值 τ_{PS} , 都将随着 σ_m 和 S_2 的变化而变化。因而对于 σ_m 和 S_2 的不同值, τ_P 和同它对应的 γ_P 间的应力应变曲线也必不相同。为了使问题得到简化, 我们假定这些不同的应力应变曲线都是相似曲线, 它们之间的相似比例系数就是对应于不同的 σ_m 和 S_2 的 τ_{PS} 的比值。我们把这个假设称为相似曲线假设。根据相似曲线假设应有

$$\tau_P / \tau_{PS} = \tau_P^0 / \tau_{PS}^0, \quad (10)$$

$$\gamma_P / \gamma_{PS} = \gamma_P^0 / \gamma_{PS}^0, \quad (11)$$

这里 $\tau_P(\gamma_P)$ 和 $\tau_P^0(\gamma_P^0)$ 处于同一加载面, $\tau_{PS}(\gamma_{PS})$ 和 $\tau_{PS}^0(\gamma_{PS}^0)$ 分别为 $\tau_P(\gamma_P)$ 和 $\tau_P^0(\gamma_P^0)$ 对应的屈服极限应力(应变)。它们可由(5)式或(6)式求出。在轴线和 σ_m 轴重合的柱形屈服面中, 相似曲线假设被简化为单一曲线假设。

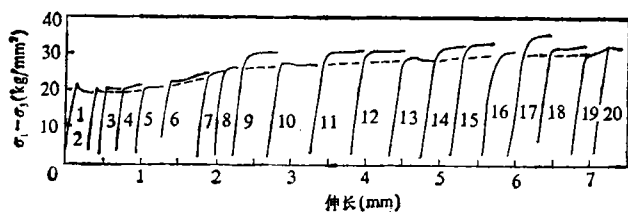


图 3 在组合应力作用下 Lode 的钢管实验^[3]

实验编号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
μ	-1.00	-1.00	0.02	0.02	-1.00	0.96	-1.00	-1.00	0.00	-1.00
实验编号	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
μ	-0.43	-0.69	-1.00	0.35	0.62	-1.00	0.00	0.97	-1.00	-1.00

相似曲线假设和图 3 中 Lode 的实验结果是一致的。在图 3 中, 虚线表示轴向拉伸时的应力应变曲线; 纵坐标是 $\tau_{\max}$ 的二倍; 横坐标是轴向

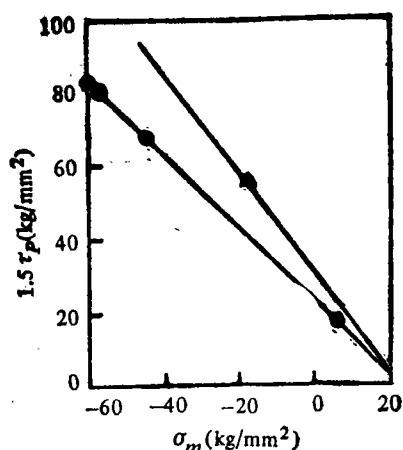


图 4 铸铁的极限应力

(● 表示 $\mu_s = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; ▲ 表示 $\mu_s = \frac{\sqrt{2}}{2}$)

在第一塑性变形阶段, 由于只有 τ_p 产生的塑性变形, σ_m , S_2 除对 τ_p 产生的塑性变形有间接影响外, 它们自身只产生弹性变形。因而使得偏离简单加载的问题成为一个比较简单的问题。

当 k 值不变时, 我们称(8)式的加载面为等加载面。为了求出 τ_p 对应的应变 γ_p , 我们需要知道对应某一组 σ_m , S_2 值的 τ_p - γ_p 应力应变关系。例如假定我们已经知道了平面纯剪切(它对应 $\sigma_m = 0$, $S_2 = 0$)的应力应变关系为

$$\tau_p^0 = \phi(\gamma_p^0). \quad (12)$$

采用弹性变形的形式表示为

$$\tau_p^0 = G' \gamma_p^0. \quad (13)$$

若已知某一应力状态的 τ_p (或 γ_p) 加载值及其对应的 σ_m , S_2 (或 ε_m , γ_2), 根据(6)式(或(7)式)即可求出对应于同一组 σ_m , S_2 (或 ε_m , γ_2) 的屈服极限 τ_{PS} (或 γ_{PS})。根据比例强化模形, 由(8)式可求出与 τ_p (或 γ_p) 位于等加载面上的 τ_p^0 (或 γ_p^0)。根据相似曲线假设, 由(10)式(或(11)式)求出 τ_p^0 (或 γ_p^0) 并代入(13)式即可求得

$$G' = \left(\frac{\tau_{PS}^0}{\tau_{PS}} \tau_p \right) / \gamma_p^0 = \frac{\tau_{PS}^0}{\tau_{PS}} \cdot \frac{\tau_p}{\gamma_p^0} \quad (14)$$

或

$$G' = \tau_p^0 / \left(\frac{\gamma_{PS}^0}{\gamma_{PS}} \gamma_p \right) = \frac{\gamma_{PS}^0}{\gamma_{PS}} \cdot \frac{\tau_p}{\gamma_p}, \quad (15)$$

显然, 在等加载面上, 所有 G' 都相等。

如果各应力点的应力分量 τ_p 对应的塑性应变分量 γ_p^0 都相等, 由这些应力点构成的面被称为等塑性变形面。

伸长。因为 $\mu_s = \frac{2\mu}{\sqrt{9-\mu^2}}$ (μ 为应力 Lode 参数),

当 μ 等于常数时, μ_s 等于常数, τ_p 和 $\tau_{\max}$ 以及 γ_p 和轴向伸长的比值也都是常数。所以和采用 τ_p - γ_p 坐标是一致的。但如果采用 τ_p - γ_p 坐标, 不同 μ_s 值时 τ_p 的差别将更明显。更能说明相似曲线假设和实验结果的一致性。对于大多数材料, 在 σ_m 和 S_2 不同的情况下极限应力 τ_{PS} 的差别更加明显(例如图 4 中铸铁这种微塑性材料)。我们只能用相似曲线假设描述, 而不能用单一曲线假设。

三、等加载面和等塑性变形面

在塑性变形过程中, 加载时产生弹性变形和塑性变形; 卸载时弹性变形恢复, 塑性变形则保持不变。在

知道了 G' , 我们就可以求出对应于 τ_P 的总应变及塑性应变, 它们分别为

$$\gamma_P = \gamma_P^e + \gamma_P^p = \frac{1}{G'} \tau_P, \quad (16)$$

$$\gamma_P^e = \frac{1}{G} \tau_P, \quad (17)$$

$$\gamma_P^p = \left(\frac{1}{G'} - \frac{1}{G} \right) \tau_P. \quad (18)$$

为了确定等塑性变形面, 我们假定已知 σ_m , τ_P , S_2 空间的两个应力点 τ_P^* (σ_m^* , S_2^*) 和 $\tau_P(\sigma_m, S_2)$, 前者为初始应力状态, 后者为终了应力状态. 若二者位于等塑性变形面上则应有

$$\gamma_P^p(\tau_P) = \gamma_P^p(\tau_P^*). \quad (19)$$

将(18)式代入(19)式, 经整理得到

$$\tau_P = \frac{(G'^*)^{-1} - G^{-1}}{(G')^{-1} - G^{-1}} \tau_P^*, \quad (20)$$

式中 G'^* 和 G' 可由(14)式(或(15)式)求出. (20)式就是等塑性变形面方程.

从塑性变形的角度看, 当

$$\tau_P > \frac{(G'^*)^{-1} - G^{-1}}{(G')^{-1} - G^{-1}} \tau_P^*, \quad (21)$$

我们称它为相对加载; 当

$$\tau_P < \frac{(G'^*)^{-1} - G^{-1}}{(G')^{-1} - G^{-1}} \tau_P^*, \quad (22)$$

称为相对卸载; 满足(20)式称为中性变载.

这样, 在计算塑性变形时, 我们不必考虑加载路径问题. 对于单调相对加载问题, 按加载终了时的应力状态对弹性和塑性变形进行计算即可; 对于单调相对卸载问题, 可按初始应力计算塑性变形, 按终了应力计算弹性变形; 对于复杂的非单调加载问题, 可选择适当的应力计算弹性和塑性变形.

为了说明这种计算方法, 我们参照 Lode 的轴向拉伸和内压力联合作用的钢管实验及 Taylor 和 Quinney 的钢管拉扭实验(为了有确定材料常数的足够数据, 我们采用了不同条的两组实验)的实验结果^[6], 粗略地算出 $A = -0.001528$, $B = 0.006746$, $S_1^0 = -0.02907$, $\sigma_m^0 = 20\sigma_T$ (σ_T 为轴向拉伸时的屈服极限). 这样, 如果我们取初始应力状态为 $\sigma_1^* = 0.6\sigma_T$, $\sigma_2^* = 0$, $\sigma_3^* = -0.6\sigma_T$ (平面纯剪切应力状态); 终了应力状态为 $\sigma_1 = \frac{1.8}{\sqrt{2}}\sigma_T$, $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$

(轴向拉伸应力状态). 由此可以求出^[1,3], $\tau_P^* = 0.6\sigma_T$, $\sigma_m^* = S_2^* = 0$; $\tau_P = 0.6\sigma_T$,

$$\sigma_m = -S_2 = \frac{0.6}{\sqrt{2}}\sigma_T.$$

由(5)式或(6)式可以求出 $\tau_{PS}^* = 0.5814\sigma_T$, $\tau_{PS} = 0.4029\sigma_T$. 在两种应力状态下, 尽管 τ_P^* 和 τ_P 的加载值相等, 但由于 $\tau_{PS}^* > \tau_{PS}$, 所以应有 $G' < G'^*$, 因而有

$$\tau_P > \frac{(G'^*)^{-1} - G^{-1}}{(G')^{-1} - G^{-1}} \tau_P^*,$$

为相对加载。应按终了应力计算塑性变形。反之,则应按初始应力计算塑性变形。我们的结论和在偏离简单加载问题的研究中得到的结论是一致的^[2]。

四、第一塑性变形阶段的本构关系

在第一塑性变形阶段中, σ_m 和 S_2 只引起弹性变形,只有 τ_P 引起塑性变形。值得注意的是,由于晶粒或颗粒间存在着凹凸不平和孔隙,在塑性滑移过程中,滑移面是不平滑的。因而在滑移过程中,材料间的孔隙会加大或减小,这样就会出现体积变化和其它更复杂的变形。所以 τ_P 引起的塑性变形不仅有对应于 τ_P 的应变分量,还会有对应于 σ_m 和 S_2 的应变分量。例如在低碳钢圆杆的塑性扭转过程中,应力分量只有 τ_P , 但我们可以测出轴向塑性伸长和径向塑性减小。这种由 τ_P 引起的对应于 σ_m 和 S_2 的应变分量,我们称它为牵连应变或牵连变形。

根据 Drucker 假设,塑性应变增量和加载面之间应满足

$$d\epsilon_i = dC \frac{\partial f}{\partial \sigma_i}. \quad (23)$$

注意到在第一塑性变形阶段只有 τ_P 引起塑性变形,而 γ_P^e , ϵ_m^e 是牵连变形,所以 dC 只和 τ_P 的增量有关。当而且仅当 $d\tau_P > 0$ 时, $dC > 0$ 。因此,我们很自然地将 dC 与 $d\tau_P$ 联系起来,即令

$$dC = h d\tau_P. \quad (24)$$

我们把 h 叫做强化函数,它和 τ_P , τ_{PS} 有关,即

$$h = h(\tau_P, \tau_{PS}) = h(\sigma_m, \tau_P, S_2). \quad (25)$$

由(9),(23),(24)式我们得到

$$\begin{aligned} d\gamma_P^e &= \frac{\partial f}{\partial \tau_P} h d\tau_P \\ &= \frac{[\tau_{PS} - B(\sigma_m - \sigma_m^0)]}{\sqrt{A^2 + (S_r^0 - B)^2(\sigma_m - \sigma_m^0)}} h d\tau_P, \end{aligned} \quad (26)$$

$$\begin{aligned} d\gamma_2^e &= \frac{\partial f}{\partial S_2} h d\tau_P \\ &= \frac{[S_{20} - A(\sigma_m - \sigma_m^0)]}{\sqrt{A^2 + (S_r^0 - B)^2(\sigma_m - \sigma_m^0)}} h d\tau_P, \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} d\epsilon_m^e &= \frac{\partial f}{\partial \sigma_m} h d\tau_P \\ &= - \frac{B\tau_{PS} + AS_{20} + [(S_r^0)^2 - 2S_r^0 B](\sigma_m - \sigma_m^0)}{\sqrt{A^2 + (S_r^0 - B)^2(\sigma_m - \sigma_m^0)}} h d\tau_P. \end{aligned} \quad (28)$$

由(26)–(28)式得到

$$\mu_{2r}^e = \frac{d\gamma_2^e}{d\gamma_P^e} = \frac{\mu_s - \frac{A(\sigma_m - \sigma_m^0)}{\tau_{PS}}}{1 - \frac{B(\sigma_m - \sigma_m^0)}{\tau_{PS}}} \quad \left(|\mu_s| \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \right), \quad (29)$$

$$\mu_{de_m}^p = \frac{d\varepsilon_m^p}{d\gamma_p^p} = \frac{B\tau_{PS} + AS_{20} + [(S_T^0)^2 - 2S_T^0 B](\sigma_m - \sigma_m^0)}{-\tau_{PS} + B(\sigma_m - \sigma_m^0)} k, \quad (30)$$

$$\left(|S_{20}| \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \tau_{PS}\right),$$

我们把 μ_{dr}^p 和 $\mu_{de_m}^p$ 分别称为塑性应变增量偏量的形式参数和塑性应变增量的体积变形参数。

为了将 (29) 式与实验结果进行比较, 前面已求出 $A = -0.001528$, $B = 0.06746$, $S_T^0 = -0.02907$, $\sigma_m^0 = 20\sigma_T$. 因为 τ_{PS} 与 σ_m 成线性关系, 所以 σ_m 的取值对 μ_{dr}^p 的值没有影响. 假定 $\sigma_m = 0$, 任意假定一个合适的 S_{20} 值, 由 (6) 式和 (29) 式可以求出 τ_{PS} , $\mu_S \left(= \frac{S_{20}}{\tau_{PS}}\right)$ 及 μ_{dr}^p . 这样, 根据 (6), (29) 式即可绘出 $\mu_S - \mu_{dr}^p$ 的理论曲线. 由图 5 可以看出, (29) 式和 Lode 的实验结果^[6]及其它一些结果是一致的. 在图 5 中, 坐标采用的是应力和应变的 Lode 参数. 它们和 μ_S , μ_{dr}^p 的关系是

$$\mu = \frac{3\mu_S}{\sqrt{4 + \mu_S^2}}, \quad \mu_{dr}^p = \frac{3\mu_{dr}^p}{\sqrt{4 + \mu_{dr}^p{}^2}}.$$

塑性变形过程就是 τ_P 从 τ_{PS} 到 τ_P 的变化过程, 将 (26)–(28) 式从 τ_{PS} 到 τ_P 积分即可求得

$$\mu_r^p = \frac{\gamma_1^p}{\gamma_p^p} = \frac{\mu_S - \frac{A(\sigma_m - \sigma_m^0)}{\tau_{PS}}}{1 - \frac{B(\sigma_m - \sigma_m^0)}{\tau_{PS}}}, \quad \left(|\mu_S| \leq \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \quad (31)$$

$$\mu_{e_m}^p = \frac{\varepsilon_m^p}{\gamma_p^p} = \frac{B\tau_{PS} + AS_{20} + [(S_T^0)^2 - 2S_T^0 B](\sigma_m - \sigma_m^0)}{-\tau_{PS} + B(\sigma_m - \sigma_m^0)} k, \quad (32)$$

$$\left(|S_{20}| \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \tau_{PS}\right),$$

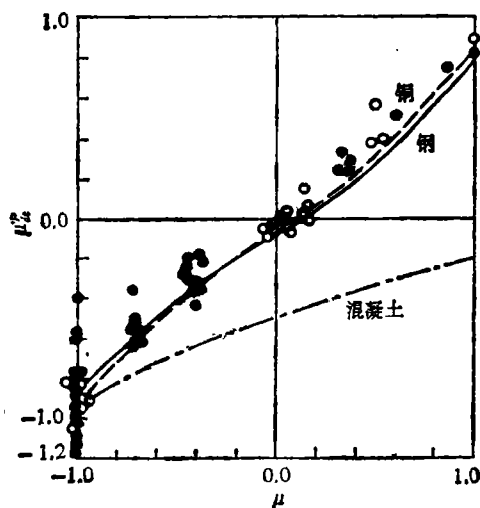


图 5 (29)式与实验结果的比较^[3,6]

(● 表示钢, ○ 表示铜)

式中 $k = \frac{\tau_P}{\tau_{PS}}$, 我们把 μ_r^p 称为塑性应变偏量的形式参数, 把 $\mu_{e_m}^p$ 称为塑性体积变形参数。

我们假设应力主方向和塑性应变主方向重合, 由 (18), (31), (32) 式即可求出塑性变形时的应力应变关系为

$$\begin{cases} \gamma_p^p = \left(\frac{1}{G'} - \frac{1}{G}\right) \tau_P, \\ \gamma_1^p = \mu_r^p \gamma_p^p, \\ \varepsilon_m^p = \mu_{e_m}^p \gamma_p^p. \end{cases} \quad (33)$$

总应变值为

$$\begin{cases} \gamma_P = \gamma_P^e + \gamma_P^p = \frac{1}{G} \tau_P + \left(\frac{1}{G'} - \frac{1}{G} \right) \tau_P = \frac{1}{G'} \tau_P, \\ \gamma_2 = \gamma_2^e + \gamma_2^p = \frac{1}{G} S_2 + \mu_r^p \left(\frac{1}{G'} - \frac{1}{G} \right) \tau_P, \\ \varepsilon_m = \varepsilon_m^e + \varepsilon_m^p = \frac{1-2\nu}{E} \sigma_m + \mu_{\varepsilon_m}^p \left(\frac{1}{G'} - \frac{1}{G} \right) \tau_P. \end{cases} \quad (34)$$

根据 ε_m , γ_P , γ_2 的定义

$$\begin{cases} \varepsilon_m = \frac{1}{3} (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3), \\ \gamma_P = 2\sqrt{-(\varepsilon_1 - \varepsilon_m)(\varepsilon_3 - \varepsilon_m)}, \\ \gamma_2 = 2(\varepsilon_2 - \varepsilon_m), \end{cases} \quad (35)$$

解出主应变并将(34)式代入主应变中得到

$$\begin{cases} \varepsilon_1 = \varepsilon_m - \frac{1}{4} \gamma_2 + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{4} \gamma_2^2 + \gamma_P^2} \\ \quad = \frac{1-2\nu}{E} \sigma_m - \frac{1}{4G} S_2 + \left(\mu_{\varepsilon_m}^p - \frac{1}{4} \mu_r^p \right) \left(\frac{1}{G'} - \frac{1}{G} \right) \tau_P \\ \quad \quad + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{4} \left[\frac{1}{G} S_2 + \mu_r^p \left(\frac{1}{G'} - \frac{1}{G} \right) \tau_P \right]^2 + \left(\frac{1}{G'} \tau_P \right)^2}, \\ \varepsilon_2 = \varepsilon_m + \frac{1}{2} \gamma_2 \\ \quad = \frac{1-2\nu}{E} \sigma_m + \frac{1}{2G} S_2 + \left(\mu_{\varepsilon_m}^p + \frac{1}{2} \mu_r^p \right) \left(\frac{1}{G'} - \frac{1}{G} \right) \tau_P, \\ \varepsilon_3 = \varepsilon_m - \frac{1}{4} \gamma_2 - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{4} \gamma_2^2 + \gamma_P^2} \\ \quad = \frac{1-2\nu}{E} \sigma_m - \frac{1}{4G} S_2 + \left(\mu_{\varepsilon_m}^p - \frac{1}{4} \mu_r^p \right) \left(\frac{1}{G'} - \frac{1}{G} \right) \tau_P \\ \quad \quad - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{4} \left[\frac{1}{G} S_2 + \mu_r^p \left(\frac{1}{G'} - \frac{1}{G} \right) \tau_P \right]^2 + \left(\frac{1}{G'} \tau_P \right)^2}. \end{cases} \quad (36)$$

如果要求 6 个应力应变分量的对应值,可通过主应力和主应变进一步求得。

在(36)式中,若令 $\mu_r^p = \mu_s$, $\mu_{\varepsilon_m}^p = 0$, 则(36)式被简化为 Ильюшин 理论的形式,但它只能近似的用于塑性性能很好的材料,而(36)式则可用于在各种应力状态作用下的所有工程材料,计算结果也较精确。

五、第二塑性变形阶段——拉伸失稳

随着第一塑性变形阶段塑性变形的发展,材料不断强化,因而 S_2 的值不断增大。当 S_2 也达到材料的屈服极限时,就进入了第二塑性变形阶段。因为在第一塑性变形阶段材料已经得到强化,我们取 S_2 的屈服极限值为

$$S_{2s} = k_0 \tau_{PS}, \quad (37)$$

其中 k_0 为 S_2 进入塑性变形状态时,材料的强化系数。这时 τ_P 的加载值应为

$$\tau_p = S_{2S}/\mu_s = k_0 \tau_{PS}/\mu_s. \quad (38)$$

将(6)式代入(38)式经整理得到

$$\tau_p - \frac{k_0}{\mu_s} [\sqrt{[A^2 + (S_1^0 - B)^2](\sigma_m - \sigma_m^0) - [S_{20} - A(\sigma_m - \sigma_m^0)]^2} + B(\sigma_m - \sigma_m^0)] = 0, \quad \left(|S_{20}| \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \tau_{PS}\right). \quad (39)$$

这就是 S_2 开始进入塑性变形状态时的屈服条件。它在应力空间的形状仍为锥面, 顶点仍位于 σ_m 轴上的 A 点。在 τ_p - S_2 平面上的迹线如图 6 所示。由屈服面的内凸性可知, 进入第二塑性变形阶段是导致一些材料在某些应力状态下出现失稳现象的原因。从物理意义上看, 例如在轴向拉伸 ($\mu_s = -\frac{\sqrt{2}}{2}$) 状态, 在进入第二塑性变形阶段后, 由于由 S_2 引起的对应于 S_2 的塑性应变分量的出现, 受拉杆件横截面积迅速减小。但由于材料的不均匀性, 杆上各点并非同时进入第二塑性变形阶段, 而是从某个薄弱点开始的。这样, 由于局部横截面积迅速减小, 使 σ_m 的代数值迅速增大。由(6)式和(14)式可知, σ_m 增大导致 τ_{PS} 减小, 从而使 G' 减小, G' 的减小又进一步使纵向及横向变形增大。这样反复促进, 就形成了拉伸失稳。由拉伸时在达到强度极限后(如果不断裂)即开始出现失稳的实验现象可知, S_{2S} 就是与拉伸强度极限对应的 S_2 值。所以

$$k_0 = \frac{S_{2S}}{\tau_{PS}} = \frac{S_{2b}}{\tau_{PS}}, \quad (40)$$

其中 S_{2b} 为与拉伸强度极限 σ_b 对应的 S_2 值。

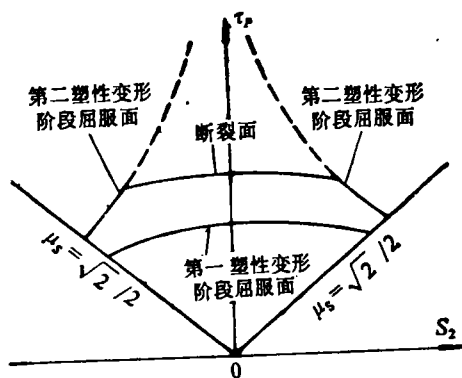


图 6 第二塑性变形阶段的屈服面

由图 5 可以知道, 只有在第一塑性变形阶段不发生断裂的材料, 在 μ_s 接近或等于 $\pm \frac{\sqrt{2}}{2}$ 的情况下, 才可能出现失稳现象。

六、小 结

在作者另文¹⁾中提出的两个平面纯剪切应力和滑移面方向及文献[3]中从宏观上较好地解决了 Galilio 于 1638 年提出的已有 350 年历史的强度问题的基础上, 本文进一步提出了各向同性材料的滑移系、两个塑性变形阶段、比例强化模型、相似曲线假设和相对加载; 建立了新的更加理性化的能够较好地描述包括塑性体积变形在内的各种工程材料的塑性变形规律的本构关系; 从理论上解决了材料失稳的问题。为建立一个与材料变形行为一致的新塑性理论体系奠定了基础。

1) 见 746 页脚注 1)

参 考 文 献

- [1] 高万章, 中国科学 A 辑, 1988, 2: 204—210.
- [2] 王仁、熊祝华、黄文彬, 塑性力学基础, 科学出版社, 1982, 34—43; 178—184.
- [3] 高万章, 中国科学 A 辑, 1989, 5: 554—560.
- [4] Писаренко Г. С. & Лебедев А. А., 复杂应力状态下的材料变形与强度(江明行译), 科学出版社, 1983, 104—106.
- [5] Nadai, A., *Theory of Flow and Fracture of Solids*, Vol. I, McGraw Hill, 1950, 245; 275—352; 512—526.
- [6] Hoffman, O. & Sachs, G., *Introduction to The Theory of Plasticity for Engineers*, McGraw Hill, 1953, 57—60.