

# 副热带高压北跳与月尖 (CUSP) 突变

柳 崇 健    陶 诗 言

(中国科学院大气物理研究所, 北京)

## 摘 要

观测事实表明, 大气在一个广泛的时空尺度中出现各类突变现象. 本文以 René Thom 首创的突变论为工具, 通过月尖突变模型讨论了副热带高压北跳这一大气突变现象, 指出控制参数的渐变如何导致现象的突变, 进而解释了大气环流的“(六月)突变”现象. 文中还指出, 由于行星尺度副热带高压的移行发展, 有时与等压面位势高度场的变化直接相联, 因而副热带高压未必是作为一个系统“实体”而移行发展的.

## 一、引 言

突变现象是自然界最普遍最复杂的现象之一. 气象学中比较常见的突变现象有: 高空西风带的“六月突变”<sup>[1-2]</sup>, 平流层爆发性增温, 副热带高压北跳(以及伴随西太平洋副热带高压北跳而出现的江南大雨带的急进), 大气对流发展过程中的多次突变<sup>[3]</sup>, 湍流爆发<sup>[4-5]</sup>, 相变, 中小尺度系统的突变<sup>[6-7]</sup>以及旋转流体实验中流型的突变<sup>[8-9]</sup>等等. 综观这些现象, 可以发现它们在随时间的演变中有一个共同的基本特点, 即它们都是在相对比较短的时间内, 从一个比较稳定的状态过渡到另一个比较稳定的状态. 鉴于目前气象上对突变现象尚无统一的定义, 这里我们将具有多种可互变稳态的体系中, 由于外参数的连续改变, 而引起该体系从一个稳态突然过渡到另一个稳态的状态跃迁现象定义为突变. 这就使得我们有可能将突变现象与适应过程或多时间尺度<sup>[10]</sup>中的“快变”等概念区别开来.

如上所述, 突变现象是人们比较熟悉并且深入研究过的许多现象之一, 除了五十年代叶笃正、陶诗言与李麦村<sup>[1]</sup>对大气环流的季节变化提出了明确的突变概念外, 近年来 Ramage<sup>[11]</sup>的湍流“突现 (burst)”观更是指出大气在各种运动尺度上都会出现湍流突现现象(这种突现现象的爆发正是突变); 总之, 气象上提出突变问题已有多多年, 但从突变论的观点出发, 对这类广泛存在的大气现象建立相应的突变模型, 用以具体揭示出一个渐进过程在什么条件下会中断从而发生突变, 则是本文努力的目标.

突变论是从微分拓扑这一几何分支推导出来的<sup>[12-14]</sup>. 自然界各种力的平衡大都可以用带有若干奇点和褶曲的光滑曲面来描述, 当事物演变的轨迹在曲面上遇到中断处, 就发生了突变. 这种揭示如何由量变引起质变的突变模型, 具有描述自然界多方面演进过程的潜力, 目前已在激波的传导、相变、非线性振动、焦散物理、流体力学以致胚胎学中 得到广泛的应

用。

突变论的核心是 Thom 的分类定理。Thom 采用复杂的现代数学技巧证明, 在控制因子不超过四个时, 这些普遍的不连续过程只有七个根本不同的类型。本文着重讨论的月尖型突变是其中序号为二的初等突变。

## 二、副热带高压的北跳及其突变模型的建立

副热带高压的成因和发展移行规律目前还不十分清楚。有一个突出的观测事实是, 夏季高空 (100—200 毫巴) 副热带高压中心位置与大陆高原的地理位置相当吻合, 北美落矶山脉与亚洲青藏高原正是北半球波数为二的超长波脊的驻留位置, 它们往往长期 (例如, 20 天左右) 维持在该位置上稳定少动, 反映出北半球这两个准常定暖性反气旋系统与夏季作为大气热源的大陆高原之间必然有某种内在的联系。最近有关夏季青藏高原动力与热力影响的数值试验<sup>[15]</sup>指出, 模式试验的第一天即在 200 毫巴高度上得到完整的反气旋 (位置在高原东南方), 以后 (2—3 天) 该反气旋更接近高原主体, 第四天则反气旋中心已在高原上空了。“热力适应”时间一般为 3—4 天。

副热带高压的另一个突出的观测事实是, 随着从冬到夏的季节推移, 副热带高压北进过程时徐时疾, 其间有一两次或更多次的北跳过程。

现在问题是, 控制环流季节变化的因子是连续变化 (太阳高度角是连续变化的, 下垫面作为一个整体对它的感应亦是连续变化的) 的情况下, 为什么副热带高压的北移会时而渐进时而突进呢?

为了解释这个有趣的观测现象, 我们运用突变论建立了一个月尖突变模型, 借以显示外参数的渐变如何导致状态变量的突变。

### 1. 副热带高压突变模型的建立

副热带高压的北跳问题最后可化为月尖突变问题加以处理, 这是因为我们从强迫耗散气流的一个谱表示出发, 最后可求得一个与月尖突变标准曲面等价<sup>1)</sup>的三维曲面。

强迫耗散的非线性准地转气流可用下列简化的方程式来描述:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\nabla^2 \psi) + J(\psi, \nabla^2 \psi) + \beta \frac{\partial \psi}{\partial x} = -Q + \nu \nabla^4 \psi, \quad (1)$$

式中  $Q$  代表影响涡度变化的各种涡度源, 包括大气强迫加热;  $\nu \nabla^4 \psi$  代表直接的耗散作用,  $\nu$  取为常数;  $\psi$  是流函数。

在南北为刚壁, 而东西呈周期的条件下, 以  $\nabla^2 \psi_n = -\lambda_n \psi_n$  的解  $\psi_n$  为基 ( $\lambda_n$  是相应的特征值) 作谱展开, 即按经典谱分解方法, 将

$$\psi = \sum_{n=1}^N a_n(t) \psi_n \quad (2)$$

代入方程 (1), 再跟  $\psi_n$  作内积后对谱区间  $D$  求积分, 便得到了该地转模式的谱表示 (方程):

$$\lambda_n \frac{\partial}{\partial t} a_n + \sum_{k=1}^N \sum_{m=1}^N \lambda_m D_{kmn} a_k a_m - \sum_{j=1}^N \beta C_{jn} a_j = Q_n - \nu \lambda_n^2 a_n; \quad (3)$$

1) 等价保持了两 (月尖型) 曲面的所有定性特性完全相同。

这里

$$\begin{aligned}
 D_{kmn} &= \iint_D \phi_n J(\phi_k, \phi_m) dx dy, \\
 C_{jn} &= \iint_D \phi_n \frac{\partial b_1}{\partial x} dx dy, \\
 Q_n &= \iint_D \phi_n Q(x, y) dx dy; \\
 D &= \left\{ x: 0 \leq x \leq 2\pi, y: -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2} \right\}.
 \end{aligned}$$

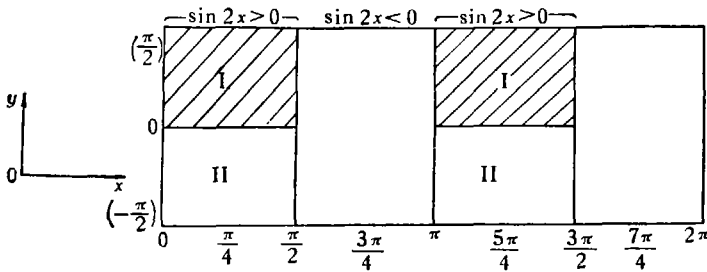


图 1 谱区间坐标的选定

为了简洁地说明该模式中非线性项对分枝与突变的本质影响,这里采用高截谱方法,在所考虑区间  $D$  内,取三个基函数作展开,即取

$$\phi_1 = \frac{\sin y}{\pi}, \quad \phi_2 = \frac{\sqrt{2} \cos y \sin 2x}{\pi} \text{ 及 } \phi_3 = \frac{\sqrt{2} \cos 3y \cos 2x}{\pi},$$

于是

$$\phi = \sum_{i=1}^3 a_i(t) \phi_i = a_1(t) \phi_1 + a_2(t) \phi_2 + a_3(t) \phi_3, \quad (4)$$

$$Q = Q_1(t) \phi_1 + Q_2(t) \phi_2 + Q_3(t) \phi_3. \quad (5)$$

这样选定的基函数比较适合我们所讨论的问题的性质,特别是当我们将  $Q$  亦按此基展开时,即能体现随季节的推移区间北部(指 I 区,见图 1)变为热源( $Q$  的主要部分)这一要求。这是因为  $Q$  的几个分量中,  $\phi_2$  在  $-\frac{\pi}{2}$  至  $\frac{\pi}{2}$  之间均为正值(事先取定  $\sin 2x$  在大陆上为正,海洋上为负),而  $\phi_1$  仅在  $0$  至  $\frac{\pi}{2}$  之间取正值,  $-\frac{\pi}{2}$  至  $0$  之间取负值,迭加的总效果便使得区间北部大陆高原区(I 区)为比较强的热源,而区间南部(II 区)因两项符号相反则部分相消。此外,  $x$  方向取波数为二,这对于描述北半球二陆二洋的纬向地理分布特征以及相应的高层副热带纬向波数来说亦是一种比较合适的选择。

按我们这里选定的三个基函数,可将谱方程写成分量形式:

$$\left. \begin{aligned}
 a_1 + R[(\lambda_3 - \lambda_2)/\lambda_1] a_2 a_3 + \nu \lambda_1 a_1 &= Q_1/\lambda_1, \\
 a_2 + R[(\lambda_1 - \lambda_3)/\lambda_2] a_1 a_3 + \nu \lambda_2 a_2 &= Q_2/\lambda_2, \\
 a_3 + R[(\lambda_2 - \lambda_1)/\lambda_3] a_1 a_2 + \nu \lambda_3 a_3 &= Q_3/\lambda_3.
 \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

这里  $R = -\frac{16}{15\pi^2}$ , 是求方程的谱表示时非线性项的积分系数。

考虑到副热带高压是一个准常定系统,局地变化项一般小一个量级,从而可以略去,我们即可求得相应的准定常谱方程组:

$$\left. \begin{aligned} S_1 \mathcal{A}_2 \mathcal{A}_3 - \nu \lambda_1 \mathcal{A}_1 &= -Q_1/\lambda_1, \\ S_2 \mathcal{A}_1 \mathcal{A}_3 - \nu \lambda_2 \mathcal{A}_2 &= -Q_2/\lambda_2, \\ S_3 \mathcal{A}_1 \mathcal{A}_2 - \nu \lambda_3 \mathcal{A}_3 &= -Q_3/\lambda_3, \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

式中  $\mathcal{A}_i$  是谱系数  $a_i$  的准定常部分,对比(6),(7)两式可确定  $S_i$ .

为了求得关于单变量  $\mathcal{A}_1$  的多项式,我们可先在(7)式的后两式中,令  $\mathcal{A}_1$  为已知,用克莱姆法则解出  $\mathcal{A}_2$  与  $\mathcal{A}_3$ ,然后将  $\mathcal{A}_2$  与  $\mathcal{A}_3$  代入(7)式中的第一式,即可求得一个关于  $\mathcal{A}_1$  的五次代数方程:

$$\mathcal{A}_1^5 + P_4 \mathcal{A}_1^4 + \cdots + P_0 = 0, \quad (8)$$

式中  $P_4, \cdots, P_0$  是由上述  $Q_i, \lambda_i$  与  $\nu$  的已知函数表示的多项式系数.

虽然据伽罗华理论五次以上的一元代数方程,不可能用系数表出通解,但按文献[16]的方法,我们可以在特定情况下,根据(7)式求得方程(8)的所有实根:

- (1)  $Q_2 = Q_3 = 0$  时,  $\mathcal{A}_1 = Q_1/\nu\lambda_1^2$ , 即  $\mathcal{A}_1$  随加热  $Q_1$  线性增长,而与粘性系数  $\nu$  成反比;
- (2)  $Q_1 = Q_2 = 0$  时,  $\mathcal{A}_1 = 0$ , 即  $\mathcal{A}_1$  与  $Q_3$  这一加热分量无关;
- (3)  $Q_1 = Q_3 = 0$  时,  $\mathcal{A}_1$  有多解: 除了平凡解(零解)外,当  $Q_2$  大于某临界值  $Q_{2c}$  时,  $\mathcal{A}_1$  另有两个分支解.

由于在  $Q_1 = Q_2 = 0$  时,不论  $Q_3$  取什么值,总有  $\mathcal{A}_1 = 0$ , 即单由  $Q_3$  分量的加热对流函数  $\psi$  (通过  $\mathcal{A}_1$ ) 的增幅没有贡献,因此我们这里仅讨论  $\mathcal{A}_1$  随  $Q_1$  与  $Q_2$  的变化,而令  $Q_3 = 0$ . 此时应用斯特姆定理,发现  $(Q_1, Q_2)$  平面上某一区域内方程(8)有三个实根,而相邻另一区域内(8)式仅有一个实根. 这说明(8)式可以分解出一个三次方程. 文献[16]用数值方法证明了斯特姆理论的这一结论,并且按基于不动点定理的迭代方案,具体求得了  $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_1(Q_1, Q_2)$  的三维曲面,如图2所示. 这个描写两因一果的曲面,跟月尖突变的标准曲面等价,于是可望应用突变理论.

根据突变理论<sup>[17]</sup>,控制空间维数为二,行为空间维数为一的标准突变方程是  $x^3 - ux - v = 0$  (式中  $u$  和  $v$  是两个参数,  $x$  是反应变量),它所描述的曲面带有一个奇点,褶皱从这个奇点向一侧展开,从而将曲面分为上下两页,两页的褶线在参数空间(即控制空间,系参数  $u$  与  $v$  所组成的二维平面)上的投影是一个半立方抛物线  $(v^2 = \frac{4}{27} u^3)$ , 状如新月之尖角,这就是此类突变名称的由来.

月尖突变有五个基本特性: 双态、滞变、发散、不可达与突变. 下面我们就用这些特性来具体考察副热带高压的突变过程.

## 2. 加热场的渐变如何导致副热带高压的突变

前已提到,副热带高压加热场的特点: 主要是由自冬至夏随着太阳高度角的增加,大陆高原逐渐变成大气热源所决定的,这是一个缓慢的渐变过程;我们在图2上看到,最初从A处出发的点,其对应的加热强度为数值较低的  $(Q_{1A}, Q_{2A})$ , 它原来是处于下页的. 随着季节的推移,太阳高度角逐渐增高,  $Q_1$  与  $Q_2$  逐渐增大,曲面上相应的点(称为反应点,这里代表流函数

$\phi$  的准常定振幅) 亦逐渐升高, 它们在到达  $C$  点以前, 一直是随  $Q_1$  与  $Q_2$  连续演变的. 尽管在

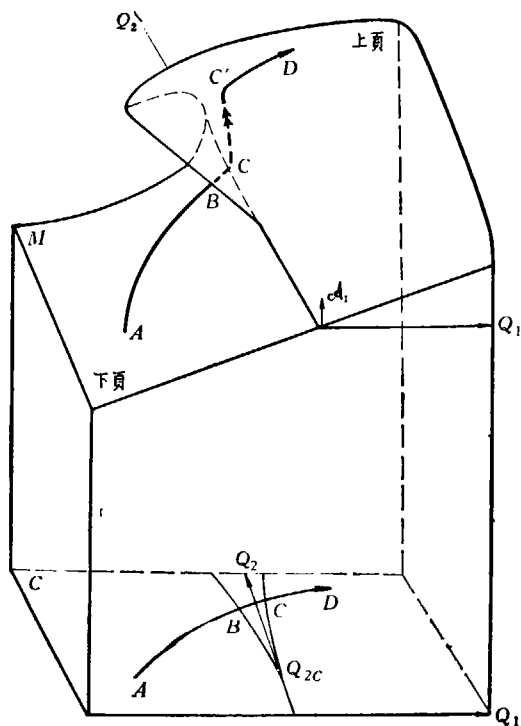


图 2  $A_1 = A_1(Q_1, Q_2)$ . 当控制平面  $C$  上的  $Q_1$  与  $Q_2$  连续变化通过  $C$  点时, 对应反应曲面  $M$  上的点  $A_1(Q_1, Q_2)$  出现不连续跳跃

通过  $B$  点以后行为即已进入双态, 但按月尖突变的迟滞规则<sup>[14]</sup>, 行为将出现滞变. 即它将继续在原来那一页上连续演变, 直到另一个临界点  $C$  出现使演迹中断时, 才发生突跳, 从而使流函数的振幅分量  $A_1$  大幅度增加.

同样, 我们可以照上述步骤讨论在  $Q_3 = 0$  的情况下, 随  $Q_1$  与  $Q_2$  的逐渐加大  $A_2$  出现突然增值的过程. 因为从上面(7)式可以看出, 由这个方程组所约束的函数关系, 对于  $A_1$  与  $A_2$  来说是完全对称的, 即在  $Q_3 = 0$  的情况下, 我们按照类似的计算过程可以求出  $A_2$  关于  $Q_1$  与  $Q_2$  的依赖关系, 它们的几何表示(图形)与图 2 类似, 只是要将  $A_1$  换成  $A_2$ , 同时将  $Q_1$  与  $Q_2$  的取向互易. 因此我们看到, 在  $Q_1$  与  $Q_2$  逐渐增大时,  $A_2$  的值亦将发生突增, 虽然对应于发生突增时的参数临界值跟  $A_1$  时有所不同, 但  $A_2$  值变化的总趋势同样是随  $Q_1, Q_2$  的增大而增大的.

按前面的讨论, 我们知道谱展开的头两

个基函数  $\phi_1$  与  $\phi_2$  在区间的北部 ( $0 < y < \frac{\pi}{2}$ ) [即图 1 的 I 区] 一致取正值, 而在南部 ( $-\frac{\pi}{2} < y < 0$ ) [图 1 II 区] 则一正一负. 因此结合这里得到的结果, 我们可以看出, 在  $Q_1$  与  $Q_2$  的共同作用下, 区间北部 (I 区) 的流函数  $\phi$  值, 将突然增大, 而南部则由于两项部分抵消将没有明显的增值. 注意到经尺度分析简化而得的散度方程<sup>[13]</sup>

$$\nabla^2 \phi = f_0 \nabla^2 \psi,$$

即作为一级近似, 可以在我们所讨论的区间内取  $f_0$  为某一常数, 而近似地以位势函数代替流函数. 换言之, 等压面图上的位势场近似地与流函数成比例. 这一点, 对我们特别有用. 因为副热带高压正是在等压面图上用等位势高度线揭示出来的一个相对比较高的位势高度区. 因此, 如果原来的副热带高压中心附近有一个区域, 其位势高度由于某种原因 (例如, 由于上面提到的因加热场渐增而导致流函数值从而位势高度突增) 突然增到与原中心值相近 (或更高), 则原副热带高压中心位置, 必然趋近于这个区域 (甚或为该区域所取代), 这在天气图上即表现为副热带高压的“移动”; 因为这种增高现象是突然出现于北部加热中心附近的, 所以副热带高压亦必然是大幅度趋近于该区域的, 这就是所谓副热带高压的北跳.

顺便指出, 由图 2 可见, 突变仅仅在  $Q_2 > Q_{2c}$  时才发生,  $Q_2 < Q_{2c}$  时, 无论  $Q_1$  有多大, 亦只有渐变, 没有突变; 并且  $Q_2$  愈大, 突变的幅度愈大. 可见  $Q_2$  是比  $Q_1$  更关键的一个因子 (按

突变论的提法,  $Q_2$  正是所谓分裂因子 [splitting factor], 而  $Q_1$  叫正常因子 [normal factor], 这个因子(通过基函数  $\cos y \sin 2x$ )反映了海陆差异对加热场的重要影响。

类似地, 我们可以用上面讨论的方法来讨论西太平洋副热带高压的西伸北跳问题, 只要我们用以作谱展开的基函数及坐标选择得当, 我们就可以确保副热带高压的西北方(第二象限)存在象征大陆高原的热源, 从而在该热源强度超过一临界值以后, 即使得热源所在地的位势高度值突增(例如在 500 毫巴面上使位势高度值突增至 5880 或以上), 则特征等高线(例如 588 线)即包围这一区域, 从而使副热带高压系统表现出向该区域突然接近(西伸北跳)。诚然, 对流层中层的现象较高层及平流层复杂, 它们的控制因子远不止单纯的强迫加热, 副热带高压行为的更精确的描述有赖于更复杂的模式及更高级的突变模型。

需要特别指出的是, 我们在借助突变模型讨论副热带高压移行(甚至包括加强)的时候, 主要是通过位势高度的突增来进行的。即只要某一区域由于热强迫(或别的什么动因)而造成该区域位势高度增加, 则在其到达某规定等值线数值时, 该等值线势必通过它; 如果它的数值增至较附近的副热带高压中心的位势高度还要高, 那么这区域必将取代原来的副热带高压中心, 而成为新副热带高压中心的所在位置: 按等值线分析原则揭示出来的天气系统本来就是这样的。这说明在研究副热带高压的移行规律和动力学机理时, 将形式上高压中心位置的变易与当作“实体”看待的副热带高压进退区分开来是有益的。

### 3. 副热带高压北跳与大气环流的“(6月)突变”

大气环流的“(6月)突变”是一个非常著名的大气突变现象<sup>[1]</sup>。此时, 随着南支西风急流的迅速北撤, 以及高空东风带的建立, 同时有北半球范围内副热带高压的北移, 夏季风在华南达到极盛, 我国江淮和日本入梅, 印度西南季风爆发, 等等。

我们认为, 尽管“(6月)突变”表现在大气环流的几乎所有方面, 但这一系列大变化都是跟北半球范围的副热带高压北跳密切相联的。这是因为, 如所周知, 副热带高压的脊线是东西风的分界线, 北半球范围内副热带高压的北移, 必然导致副热带高压脊线以北的西风带(南支急流)北撤, 同时, 脊线以南的东风带随之北进, 以及伴随出现季风现象等等。因而副热带高压北跳是大气环流突变的集中体现。

上一节, 我们已经通过月尖突变模型详细讨论了如何随着加热场的季节渐变而导致副热带高压的北跳。我们看出, 作为大气环流“(6月)突变”有机组成部分的西风带突然北撤现象, 实际上是副热带高压北跳的必然结果。我们认为, 只要这种行星尺度的大气环流的主要成员发生了突变(北跳), 它们势必将促使大气总环流作出相应的大幅度调整, 表现在大气环流出现了突变, 因而未必有一种总体的“失稳”机制存在<sup>[1]</sup>。

## 三、结 语

本文用突变论考察了大气中存在的突变现象, 特别是用月尖突变模型讨论了副热带高压的北跳问题。可以看出, 大气运动多稳态的存在是突变发生的基础, 而多稳态本身又是控制方程非线性的结果。

突变论是目前比较活跃的数学分支之一, 苏联已有人将分类问题扩大到了 25 维<sup>[12]</sup>。但现在应用得比较多的还是参数维不超过四的几个初等突变。根据突变理论<sup>[13]</sup>, 每一种突变类型都对应于一个特征多项式(例如, 月尖突变即对应于一个一元三次多项式)。由于许多物理定

律都可表为多项式,同时据经典 Weierstrass 定理<sup>[14]</sup>,所有(单变量)多项式的集合在所有定义在某区间上的连续函数的集合内是稠的;即我们总可以用一个多项式去逼近任何一个连续函数,这就使大量利用连续函数描述的物理定律都有应用突变理论的可能。

突变论的重要问题之一是各稳态之间的跳动规律;现象突变的机理必隐含于其间。现在广泛采用的迟滞规则正确反映了自然界大量的突变现象。迟滞效应的本质是一种惯性(毋宁说是惰性),不到“忍无可忍”时决不改变现状。突变论认为这个约束着曲面上变化轨迹的规则应是一条定律,这是突变论本身尚待解决的问题之一。

致谢: 杨大升、仇永炎、周晓平、李麦村以及张学洪同志对本文提出了有益的意见,特致深切谢意。

### 参 考 文 献

- [1] 叶笃正、陶诗言、李麦村,气象学报,29(1958),249.
- [2] 陶诗言、陈隆勋,同上,28(1957),234.
- [3] Shirer, H. N., Dutton, J. A., *J. A. S.*, 36(1979), 1705.
- [4] Joseph, D. D., *Stability of Fluid Motion I*, Springer-Verlag, 1976.
- [5] Emmanel, C. B., *Boundary-Layer Meteorology*, 5(1973), April, 19.
- [6] 陶诗言等,中国之暴雨,科学出版社,1980.
- [7] 北京大学地球物理系,天气分析和预报,科学出版社,1980.
- [8] Benjamin, T. B., *Proc. Soc. Lond.*, A 359(1978), 1—43.
- [9] 大气物理研究所模拟实验组,大气科学,2(1978),1.
- [10] 叶笃正、李麦村,第二次全国数值天气预报文集,科学出版社,1980.
- [11] Ramage, C. S., *Bull. Amer. Meteor. Soc.*, 57(1976), 4.
- [12] Zeeman, E. C., *Catastrophe Theory*, 1972—77 Selected Papers, 1977.
- [13] Thom, R., *Structural Stability and Morphogenesis*, 1975.
- [14] Lu, Yung-Chen, *Singularity Theory and an Introduction to Catastrophe Theory*, Springer-Verlag, 1976.
- [15] 沈如金、纪立人、陈于湘,青藏高原气象科学实验文集,第二辑,气象出版社,1983.
- [16] Vickroy, T. G., Dutton, J. A., *J. A. S.*, 36(1979), 42.
- [17] Poson, T., Stewart, I., *Catastrophe Theory and Its Application*, 1978.
- [18] Holton, J. R., 动力气象学引论(中译本),科学出版社,1980.