



内角流动及其在卫星贮箱设计中的应用

魏月兴*, 陈小前, 黄奕勇

国防科技大学航天与材料工程学院, 长沙 410073

* E-mail: weiyuexing@nudt.edu.cn

收稿日期: 2010-12-07; 接受日期: 2011-03-07

国家自然科学基金(批准号: 50975280)和新世纪优秀人才计划(批准号: NCET-08-0149)资助项目

摘要 内角流动理论是研究空间液体管理的重要理论. 为了使内角流动的理论应用于不同夹角和接触角的情形, 从而具有广泛的应用价值, 文章根据几何关系, 对曲率半径和形状参数的关系进行了修正, 推广了该理论; 依据文献提供的数据, 利用毛细管实验和落塔实验对内角流动的运动前缘理论进行了验证, 分析了理论和实验值之间的误差, 指出流阻沿流动方向的变化是误差产生的主要原因, 特别是液体黏度较小以及运动距离较长的情形, 将引起较大误差. 最后, 将内角流动理论应用于卫星贮箱的推进剂管理装置的初步设计中, 得到了导流板个数与流速之间的关系.

关键词
表面张力
内角流动
卫星贮箱
落塔实验

内角流动(Interior Corner Flow)是研究表面张力主导下, 液体沿固壁二面角的流动理论, 广泛应用于微重力环境下的流体传输和贮存、热控制系统以及生命科学等领域有诸多应用.

内角流动的研究可以追溯到 20 世纪 60 年代, Concus 和 Finn 提出了无重力条件下, 液柱完全润湿壁面的临界接触角条件, 即 Concus-Finn 条件^[1], 将内角流动分为稳态与非稳态解. MASON 等对内角流动的曲率半径进行了计算^[2], Weislogel 等人对内角流动的 N-S 方程进行了简化^[3], 将三维问题简化为一维问题, 并利用润滑近似理论进行求解, 并将这种理论推广到复杂几何形状的计算^[4, 5], Chen 等人^[6]对底部是圆角的影响进行了分析. 这种方法均以液面的高度为变量, 计算非常复杂, 而且只能给出线性解; Dong 等人^[7]以流动液面的截面为变量, 对方形毛细管的内角流动进行了研究, 通过有限元方法求解热传导方程, 得到了内角流动的二次解, 但由于曲率半

径计算的限制, 不能应用于复杂几何形状.

本文推广了 Dong 的方法, 通过修正曲率半径的计算, 寻找截面与曲率半径的关系, 使其可以应用于不同接触角、不同二面角的情形, 并修正了最小二乘有限元方法的问题, 获得了内角流动的二次解. 利用文献提供的数据, 对本文的理论进行了毛细管和落塔实验验证.

本文的理论应用与板式贮箱推进剂管理装置(Propellant Management Device, PMD)的设计, 通过优化, 得到了导流板个数为 12 时, PMD 单位质量对应的流速最大, 这个结论和空间实验的结论是一致的.

本文结构安排如下: 第 1 节阐述了内角流动的物理模型, 建立了控制方程, 对文献的方法进行扩展和修正, 得到了流动的液面前缘和流速的解; 第 2 节和第 3 节根据文献的数据, 分别利用地面的毛细管实验和落塔实验对内角流动的前缘运动理论进行了验证; 第 4 节对实验和理论值的误差进行了分析和讨论; 第 5

节将内角流动的流速理论应用于板式贮箱的推进剂管理装置的初步设计中, 得到了优化的设计方案; 第6节对全文进行了总结, 对内角流动的应用进行了分析.

1 内角流动的物理模型

在液体处于微重力环境, 或者在小尺度毛细流动过程中, 液体与固体间的表面张力, 与重力、黏性力相比占主导作用, 是流体运动的主要驱动力. 在内角流动中, 由于两侧的表面张力作用, 这种情况更为明显.

Dong 等人^[7]对方形毛细管的内角流动进行了研究, 由于曲率半径计算的限制, 不能扩展到不同二面角的情形, 可以对曲率半径及其与液柱截面的关系进行修正.

平衡状态时, 在气液交界面处 Laplace 方程表示的压力:

$$P_c = \frac{\sigma}{R}, \tag{1}$$

其中, σ 为表面张力, R 是液面的主曲率半径, 根据文献[4], 多边形的内角流动, 平衡状态下液面的曲率半径可以表示为

$$R = \frac{P_w \cos \theta}{2 \Sigma} \left[1 - \left(1 - \frac{4A \Sigma}{P_w^2 \cos^2 \theta} \right)^{1/2} \right], \tag{2}$$

这里 A 是容器截面积, P_w 是容器横截面的周长, $\Sigma = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n k_j F_{Anj}$, k_j 表示每个夹角包含的被液体润湿的壁面的个数, 在方形以及三角形毛细管中 $k_j=2$, $\delta_j = \frac{\pi}{2} - \theta - \alpha_j$.

$$F_{Anj} = \frac{\cos \theta \sin \delta_j}{\sin \alpha_j} - \delta_j. \tag{3}$$

液体从一端进入固壁形成的二面角时, 在表面张力的作用下沿 x 方向流动, 如图 1 所示. 沿 x 方向曲率半径逐渐减小, 导致压力减小, 形成压力梯度. 可以做如下假设.

- 1) 流体为黏性不可压流;
- 2) 满足 Concus-Finn 非稳态条件, 即 $\theta + \alpha \leq \pi/2$, 保证液体沿流道无限流动;
- 3) 流动距离远大于液面高度, x - y 平面内的曲率半径认为无限大, 对压力的影响只考虑 y - z 平面的曲

率半径.

此时, y - z 平面的曲率半径以及压力可以看成是位置 x 和时间 t 的函数:

$$P_c(x, t) = \frac{\sigma}{r(x, t)}. \tag{4}$$

根据几何关系, 寻找给定位置上的截面面积 S 与曲率半径的关系, 如图 2 所示.

假设液体润湿内角的长度为 D , 由几何关系可得

$$r \cos \theta = (r \sin \theta + D) \tan \alpha. \tag{5}$$

截面

$$S = D \times r \cos \theta - r^2 \delta. \tag{6}$$

联立可得

$$S = \left(\frac{\cos^2 \theta}{\tan \alpha} - \sin \theta \cos \theta - \delta \right) \times r^2 = Cr^2, \tag{7}$$

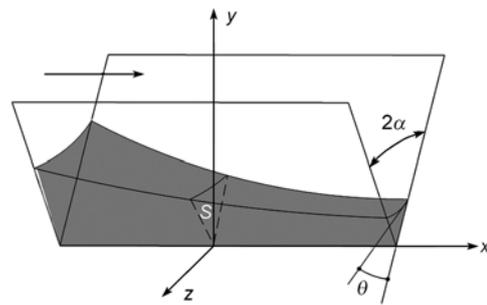


图 1 内角流动模型

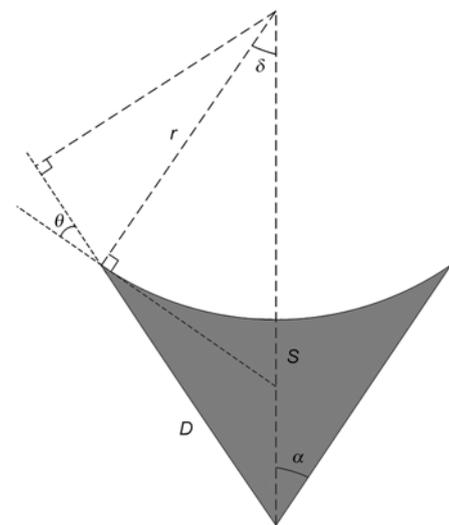


图 2 截面与曲率半径的关系

所以形状参数 $C = \frac{\cos^2 \theta}{\tan \alpha} - \sin \theta \cos \theta - \delta$.

得到了以上的关系后, 可以应用 Dong 的理论, 得到以液柱截面为变量的内角流动的控制方程. 在流动过程中, 单位长度上流量的变化, 等于润湿面积的变化率:

$$\frac{\partial q}{\partial x} = -\frac{\partial S}{\partial t}, \quad (8)$$

其中, q 是体积流速.

为了计算平均流速 $\bar{u}_{x,t}$, 可以利用文献[8]无量纲的流阻 β_v , 表示成

$$\bar{u}_{x,t} = \frac{r_{x,t}^2}{\beta_v \mu} \frac{\partial P_c}{\partial x}. \quad (9)$$

体积流速 $q = S\bar{u}_{x,t}$,

$$q(x,t) = C \frac{r^4}{\mu \beta_v} \frac{\partial P_c}{\partial x}. \quad (10)$$

把(10)式带入(8)式, 可以得到偏微分方程:

$$\frac{\partial S}{\partial t} = B \frac{\partial}{\partial x} \left(S^{1/2} \frac{\partial S}{\partial x} \right), \quad (11)$$

其中, $B = \frac{1}{2} C^{-1/2} \frac{\sigma}{\mu \beta_v}$.

边界条件和初始条件的物理意义是这样的, 在初始 $x=0$ 处存在一个常高度条件, 在此处, 液面的高度始终保持不变. 这个条件已经在 Weislogel 的实验中得到了证实^[3], 并对这个高度进行了计算. 经过 t_0 时刻, 液面运动到 x_{f0} 处, 将此时此刻认为是 0 时刻, 得到初始条件. 这时毛细流动的前缘到达 x_{f0} . 在 x_{f0} 处, 以及以外的地方, 作为边界 $S=0$. 经过 t 时刻, 前缘运动到 x_f .

借鉴文献[9]的求解热传导方程的方法, 可以求解方程(11), 得到解:

$$S = S_0 \left(1 - \frac{ax}{x_{f0} \sqrt{1+2vt}} + \frac{(a-1)x^2}{x_{f0}^2 (1+2vt)} \right)^2, \quad (12)$$

其中, 液面初始状态 $S_0 = Cr_0^2 = CR^2$. 时间常数 $\nu = K \frac{\sigma}{\mu \beta_v} \frac{R}{x_{f0}^2}$, 常数 a 是试函数的参数, 常数 K 求解过程中的参数.

文献[9]对 K 进行求导, 并令其为零, 求得 K 的表达式, 本文认为, K 是常数, 不能作为变量出现, 对 K

求导没有物理意义. 最小二乘有限元方法中, 应该对试函数的系数求导, 就是对 a 求导等于零, 得到了第一个 $K-a$ 关系.

液体前缘的位置可以表示为

$$x_f(t) = (2K)^{1/2} \left(\frac{BS_0^{1/2}}{\nu} \right)^{1/2} (1+2vt)^{1/2}. \quad (13)$$

由于时间项 $2vt \gg 1$, 故可以化简上式, 得到

$$x_f(t) = \sqrt{2K \frac{\sigma}{\mu \beta_v} R t}. \quad (14)$$

$x=0$ 处液体润湿面积的梯度可以通过对方程(12)进行微分得到

$$\left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)_{x=0} = -2aS_0 \frac{1}{x_f}. \quad (15)$$

将 $S=CR^2$ 和(15)式带入流量的表达式(10), 可以得到

$$q_0 = aC(2K)^{-1/2} \left(\frac{\sigma}{\mu \beta_v} \right)^{1/2} R^{5/2} t^{-1/2}. \quad (16)$$

为了确定试函数引入的参数 a , 对(14)式在 $(0, x_f)$ 上进行积分, 得到体积与方程(16)相等^[7], 可以得到 $K-a$ 的第二个关系, 与之前最小二乘法得到的 $K-a$ 关系联立, 可以解出 $a=0.5901, K=1.4468$.

2 毛细管验证实验

在常重力条件下, 要获得表面张力占主导作用的情形, 一般需要通过减小特征长度, 所以, 地面的实验往往在毛细管中进行. 一般用 Bond 数来表征重力与表面张力的相对大小:

$$Bo = \frac{\rho g H^2}{\sigma}.$$

$Bond \ll 1$ 时, 可以忽略重力的影响. 其中 H 是特征长度, 假设表面张力为 10^{-2} 的量级, 密度为 10^3 量级, 那么特征长度需要满足 $H \sim 10^{-3}$, 也就是在毫米量级, 才能达到忽略重力的目的, 而在实验中, 为了更有效的描述表面张力的效应, 通常 H 需要在 10^{-4} .

文献[7]中毛细实验在 50 cm 长, 截面为方形毛细管中进行, 边长 0.5 mm. 为了减小杂质和水蒸气的影响, 实验前对毛细管进行了反复清洗和干燥. 毛细管固定在有 0.5 mm 的分度刻度尺上, 水平放置. 为了防止气体蒸发, 管道的两端用环氧树脂密封, 使

用录像机和 TV 监视器记录气体-液体的交界面. 用显微镜观察吸入液体前缘的速度.

实验数据从文献[7]的实验数据中获得, 润湿液体采用 Soltrol-100 和 Soltrol-170, 液体涂上染色剂, 为防止液体中有燃料的颗粒, 流体都先经过滤纸进行过滤. 实验所用的流体以及其物体特性见表 1.

考虑无滑移条件, 实验中接触角为 23° , 参考文献[8]提供的流阻值, 选择 $\beta=374.9$, 结果如图 3 所示. 从图 3 可以看出, 在初始阶段, 理论值与实验值吻合的比较, 经过 150 s 以后, 误差逐渐增大, 在 300 s 时达到了厘米级的差距.

3 落塔实验验证

落塔实验能够在短时间内获得失重条件, 具有成本低, 可重复进行实验的优点, 是直接观测微重力下流动的有效手段, 也是进行微重力科学研究最为常用的方法. 为了验证理论研究, 本文选取了 NASA Lewis 研究中心进行了落塔实验得到的数据^[3], 对液面前缘位置进行比较. NASA Lewis 研究中心的落塔约 27 m 高, 能够提供 2.2 s 的失重时间, 微重力水平可以达到 $10^{-5} g$. 实验选用的流体为硅树脂油(Silicone Oil Fluid, PDMS), 其物理特性见表 2.

实验中流道采用丙烯酸(acrylic)进行黏合, 截面为等边三角形和正方形(近似), 如图 4 所示. 表 3 给出了截面的几何尺寸.

表 1 流体特性($T=23^\circ\text{C}$)

Fluid	Density (g/cm^3)	Surface tension (N/m)	Viscous (cP)
Soltrol-100	0.739	0.022	0.98
Soltrol-170	0.792	0.024	2.98

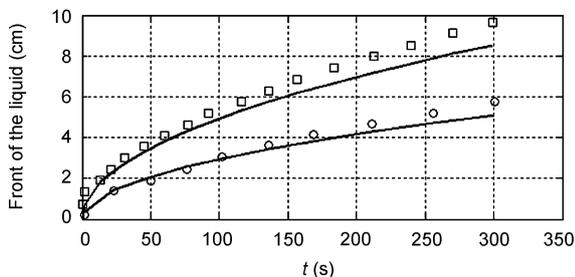


图 3 毛细流动实验与理论值比较

“—”, 理论值; “□”, soltrol_170; “○”, soltrol_100; $\eta=10^8$, $\beta=248.8$

文献[3]提供了实验数据, 本文提取相应的数据, 并对理论值和实验值进行比较, 结果如图 5 和 6. 从图 5 和 6 中可以看出, 方形管和三角形管的理论值和实验值在初始阶段符合的比较, 随着时间的增长, 误差有增大的趋势, 图 6 同时表明, 在黏性较小的管内, 理论值小于实验值, 黏性越小, 误差越大.

表 2 PDMS 流体特性(接触角 $\theta=0$)

Fluid	ν (cSt)	ρ (g/cm^3)	σ (N/m)
PDMS	1	0.816	0.0174
PDMS	2	0.872	0.0187
PDMS	5	0.913	0.0197
PDMS	10	0.935	0.0201

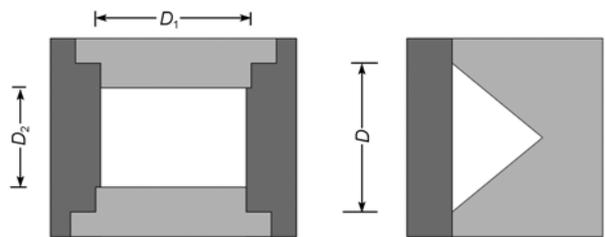


图 4 实验流动管道截面

表 3 实验尺寸

Cross section	Material	$D_1 \times D_2$ (mm)	α ($^\circ$)
Equilateral triangle	acrylic	12	30
Near square	acrylic	6.1×6.7	45
Near square	acrylic	12.9×13.2	45

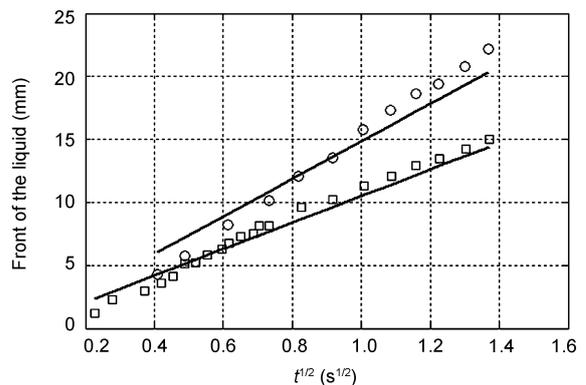


图 5 方形管落塔实验数据与理论值比较

“—”, 理论值; “□”, 边长 6 mm; “○”, 边长 12.9 mm, $\eta \approx 10$, $\beta=180$

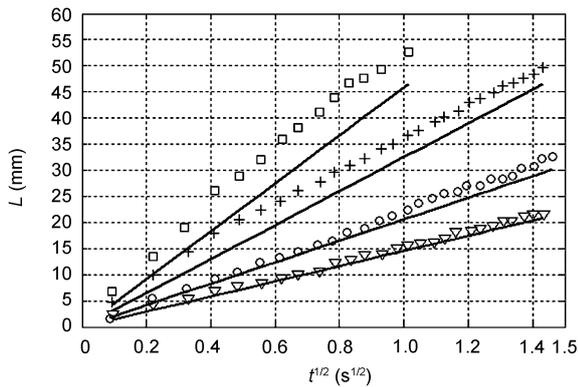


图6 三角形管落塔实验与理论值比较
边长 12 mm, “-”, 理论值; “□”, 黏度 1 cSt; “+”, 黏度 2 cSt; “○”, 黏度 5 cSt; “▽”, 黏度 10 cSt; $\eta=10, \beta=57.23$

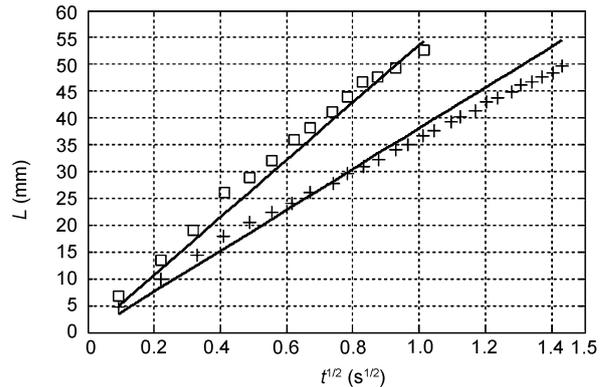


图7 修正流阻后实验值与理论值比较
“-”, 理论值; “□”, 黏度 1 cSt; “+”, 黏度 2 cSt; $\eta=1, \beta=41.79$

4 误差分析

在毛细实验和微重力实验中, 理论值和实验值的误差有两种趋势: 1) 随着流动距离的增长, 理论值偏离实验值, 距离越长, 误差越明显; 2) 随着实验流体的黏度减小, 理论值与实验值的偏差增大, 黏度越小, 误差越大。

根据无量纲表面黏性 η , 文献[8]中流阻的计算有不同的值, η 表示为

$$\eta = \frac{\mu_s}{r\mu}, \quad (17)$$

其中, μ_s 是表面剪切黏性. 在内角流动中, 流体与壁面的接触使得 η 有两个极限, $\eta \rightarrow 0$ 时称为无压力条件, $\eta \rightarrow \infty$ 时称为无滑移条件. 无压力条件的流阻要远小于无滑移条件. 由表面剪切黏性的定义可知, $\mu_s \sim du/dy$, u 是文献定义的平均流速, y 是从壁面指向管内垂直于壁面的方向。

本文认为, 误差的产生在于, 随着距离的增长, 流速降低, 使得沿壁面的流体流速与远离壁面流体的流速差异减小, 即速度梯度 du/dy 减小, 导致表面剪切黏性逐渐减小, 无滑移条件向无压力条件转化, 使得流阻随距离的增长而减小. 在理论预测时使用不变的流阻, 必然导致在流动前缘预测不准确, 并且随着黏度的减小, 误差增大。

为了提高理论计算的精度, 可以根据上述分析修改 β 的值, 在液体黏度较小时无量纲表面黏性 η 应较小, 选用相应的流阻 β . 图 7 显示, 在 $\eta=1, \beta=41.79$ 时, 黏度为 1 和 2 cs 的理论值与实验值吻合的很好。

5 在 PDM 初步设计中的应用

板式表面张力贮箱在空间推进剂的管理上具有很大的优势, 是卫星贮箱, 特别是可加注贮箱的主要发展方向. 美国从 90 年代开始, 进行了一系列的贮箱空间实验^[10-12], 在理论和实验上都取得了突破性的进展, 贮箱的设计已经基本达到了实用的水平。

板式贮箱主要部件是板式推进剂管理装置 (Propellant Management Device, PMD), 其特点是, 利用微重力条件下固液的表面张力“吸附”贮箱内的推进剂, 从而实现气液分离, 为发动机提供不夹气的推进剂. PMD 内导流板的构造如图 8 所示。

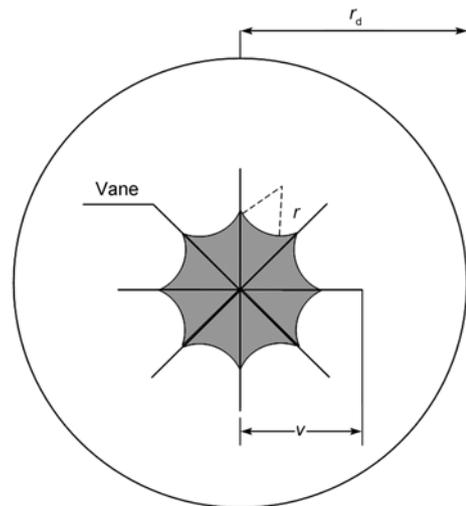


图8 板式 PMD 贮箱

PMD 中的导流板之间形成内角, 在表面张力作用下, 推进剂沿内角流动, 本文根据内角流动理论, 分析导流板的个数以及内角角度对推进剂定位过程的影响, 得到 PMD 内导流板的初始优化设计, 为进一步分析和研究提供参考.

根据文献[4], 对叶片长度和推进剂液面的曲率半径无量纲化, 即 $\tau = V/r$, $\mathfrak{R} = R/r$, 代入曲率半径的表达式, 可以得到

$$\mathfrak{R} = \frac{(\tau + \alpha)}{F_{An}} \left[1 - \left(1 - \frac{\alpha F_{An}}{(\tau + \alpha)^2} \right)^{\frac{1}{2}} \right]. \quad (18)$$

上式需要满足 3 个约束条件:

- 1) 叶片长度不能超过贮箱半径, 即 $\tau \leq 1$;
- 2) 保证开方不出现复数, $1 - \frac{\alpha F_{An}}{(\tau + \alpha)^2} \geq 0$;

3) 液面的位置需要满足接触角条件. 在算例中, 设定接触角 $\theta=0$, 根据图 2 可以计算的曲率半径 $\mathfrak{R} \leq \tau \sin \alpha / \sin \delta$, 当不满足这个条件时, 液面会上升, 使得壁面处的接触角发生变化, 相应的计算条件也会改变.

为了更有效的利用空间质量, PMD 的设计必须考虑单位质量的导流板上流量最大化. 在初始设计中, 可以假设图 8 的板式贮箱, 包含 n 个导流板, 将曲率半径代入体积流速, 并除以导流板的总长度,

$$\frac{nq}{n\tau} = aC(2K)^{-1/2} \left(\frac{\sigma}{\mu\beta} \right)^{1/2} \mathfrak{R}^{5/2} t^{-1/2}. \quad (19)$$

只保留与内角 α 与 θ 有关的量, 单位长度板上的流量:

$$Q = C\beta^{-1/2} \mathfrak{R}^{5/2}. \quad (20)$$

图 9 显示了不同导流板个数时, 单位长度上的体积流速. 图 9 对不同的导流板个数时, 单位叶片长度对应的流量进行了计算, 表明, $n=12$ 时, 对单位质量的利用效率最高, 此时 $\tau \approx 0.68$, $\alpha = 15^\circ$, 这与文献[4]的计算是相符的. 美国进行的 VTRE 实验也正是

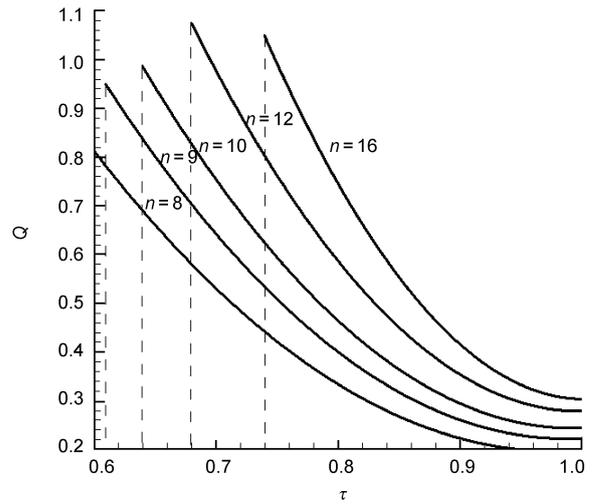


图 9 不同导流板个数下的体积流速

采用了 $n=12$ 的导流板设计.

6 结论

1) 文章对文献提出的内角流动的理论进行了推广, 修正了曲率半径、有限元计算方法和形状参数的表达, 使之可以应用于不同接触角和夹角的情形, 毛细管实验和落塔实验均表明, 在考虑流阻变化时, 理论计算与实验值得到了比较一致的结果, 说明了理论的正确性.

2) 内角流动理论可以应用于微重力环境下, 表面张力主导的流动情况的分析, 为模拟空间流动情况提供了理论支持.

3) 内角流动在空间中对应于微重力的流动, 在地面上对应于毛细管流动, 本文的工作使两种情形获得了统一的求解, 为常重力环境下模拟空间中的流动情况提供了理论依据.

4) 内角流动理论可以作为计算空间环境中流动的模型, 可以应用于板式贮箱的优化设计, 从而减小贮箱质量, 节约成本.

参考文献

- 1 Concus P, Finn R. On the behavior of a capillary surface in a wedge. *Appl Math Sci*, 1969, 63(2): 292-299
- 2 Geoffrey M, Norman R M. Capillary behavior of a perfectly wetting liquid in irregular triangular tubes. *J Colloid Interf Sci*, 1991, 141: 262-274
- 3 Weislogel M M, Seth L. Capillary flow in an interior corner. *J Fluid Mech*, 1998, 373: 349-378

- 4 Weislogel M M, Collicott S H. Analysis of tank PMD rewetting following thrust resettling. 40th AIAA Aerospace Sciences Meeting & Exhibit, 14-17 January, Reno, NV, 2002
- 5 Enrique R, Weislogel M M. Gravity effects on capillary flows in sharp corners. *Phys Fluids*, 2009, 21: 1–12
- 6 Chen Y K, Weislogel M M, Cory L N. Capillary-driven flows along rounded interior corners. *J Fluid Mech*, 2006, 566: 235–271
- 7 Dong M, Chatzis I. The imbibition and flow of a wetting liquid along the corners of a square capillary tube. *J Colloid Interf Sci*, 1995, 172: 278–288
- 8 Ransohoff T C, Radke C J. Laminar flow of a wetting liquid along the corners of a predominantly gas-occupied noncircular pore. *J Colloid Interf Sci*, 1998, 121: 392–401
- 9 Mayer F J, McGrath J F, Steele J W. A Class of similarity solutions for the nonlinear thermal conduction problem. *J Phys*, 1983, 16: 3393–3400
- 10 Dominick S, Driscoll S. Fluid acquisition and resupply experiment (FARE I) flight results. 29th AIAA/ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion Conference and Exhibit, Monterey, CA, AIAA, 1993
- 11 Dominick S, Tegart J. Orbital test results of a vaned liquid acquisition device. 30th AIAA/ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion Conference, Indianapolis, IN, AIAA, 1994
- 12 David J, Timothy A. Vented tank resupply experiment-flight test results. NASA Technical Memorandum, 1997