中国科学: 数学 2017 年 第 47 卷 第 11 期: 1423～1440
SCIENTIA SINICA Mathematica
《中国科学》杂志社
SCIENCE CHINA PRESS
综 述

量子顶点代数理论和量子仿射代数

献给万哲先教授 90 华诞

李海生[1,2]

1. Department of Mathematical Sciences, Rutgers University, Camden 08102, USA;
2. 厦门大学数学科学学院, 厦门 361005
E-mail: hli@camden.rutgers.edu

收稿日期: 2017-01-17; 接受日期: 2017-07-18; 网络出版日期: 2017-10-16
国家自然科学基金 (批准号: 11471268 和 11571391) 资助项目

摘要 在广义的顶点代数领域中, 一个基本的公开问题是, 建立一个适当的量子顶点代数理论使得量子仿射代数和量子顶点代数自然地联系起来. 部分地受 Etingof 和 Kazhdan 的量子顶点算子代数理论的启发, 自 2005 年, 作者系统地发展和研究了一个 (弱) 量子顶点代数及其拟模和 ϕ- 坐标拟模理论, 建立了一些经典代数 (如双杨氏代数) 同量子顶点代数的自然联系, 特别是最终给出了量子仿射代数同该意义下的弱量子顶点代数的一个自然联系. 在此联系中, 相对应的弱量子顶点代数在理论上存在, 但其具体结构仍需要进一步去确定, 并需证明它们是量子顶点代数. 在某种程度上讲, 这给所提的公开问题提供了一个初步答案. 另一方面, 这个理论在其发展的同时已被用来建立一些重要的代数同量子顶点代数的联系, 显示了该理论的实用价值. 本篇综述概括总结作者在这方面的主要结果, 其中包括 Zamolodchikov-Faddeev 代数、无中心双杨氏代数、量子 $\beta\gamma$- 系统和量子仿射代数同 (弱) 量子顶点代数的联系.

关键词 量子顶点代数 量子仿射代数 ϕ- 坐标模 量子 Yang-Baxter 算子

MSC (2010) 主题分类 17B69, 17B68

1 引言

顶点算子代数是 20 世纪 80 年代后期诞生的一个较新的数学分支 (参见文献 [1–3]). 一方面, 它同其他的代数体系有着根本的区别, 而另一方面它同其他数学分支 (如李代数、有限离散单群和模函数) 存在着密切的联系. 现在的一个共识是, 顶点算子代数本质上是物理量子场论中的半边的对称代数, 因此, 它的发展为量子场论的研究提供了一个可靠的数学基础. 对于顶点算子代数理论的形成, 仿射 Kac-Moody 李代数, 尤其是其顶点算子表示 (参见文献 [4–7]), 扮演了一个至关重要的角色, 同时仿射 Kac-Moody 李代数提供了一类重要的顶点算子代数 (参见文献 [8]).

在大约同一时期的 1985 年, 数学家 Drinfeld 和 Jimbo 在数学中引进了量子群. 30 多年来, 量子群一直是数学和数学物理中一个重要的热门研究方向. Frenkel 和 Jing [9] 在 1988 年建立了仿射量子

英文引用格式: Li H S. Quantum vertex algebras and quantum affine algebras (in Chinese). Sci Sin Math, 2017, 47: 1423–1440, doi: 10.1360/N012017-00012

代数的顶点算子实现, 同时提出了一个基本的公开问题, 即发展一套适当的量子顶点算子代数理论, 使得量子仿射代数可以自然地同量子顶点算子代数结合起来 (参见文献 [9,10]).

首先, Frenkel 和 Reshtikhin [11] 在 1996 年介绍和研究了一个形变 chiral 代数理论, 并用某 q- 形变 Virasoro 代数构造了一类具体例子. 随后, Etingof 和 Kazhdan [12] 在 2000 年发展了一套量子顶点算子代数理论. 该理论是在形式形变意义下的量子顶点算子代数是顶点代数的一个形式 $\hbar$- 形变, 其中 $\hbar$ 是一个形式变量. 作为一个具体的例子, 他们构造了某类仿射顶点算子代数的形变量子顶点算子代数. 随后, 在 1992 年 Borcherds [13] 也介绍了一个量子顶点代数体系. 至于这些量子顶点代数理论能否同量子仿射代数联系起来仍然是不得而知.

部分地受 Etingof 和 Kazhdan 的工作启发, 自 2005 年, Li [14–20] 和 Li 等 [21] 系统地发展和研究了一套 (弱) 量子顶点代数及其模的理论. 在此理论中, 量子顶点代数不是顶点代数的形式形变, 而是顶点代数, 顶点超代数的一种自然的推广. 在顶点代数的定义中, 被称作 Jacobi 等式的主要公理等价于一个交换性和结合性, 其显示了顶点代数是带单位元交换结合代数的类比和推广. 类似于 Etingof 和 Kazhdan 的量子顶点算子代数, 量子顶点代数是带单位元 (非交换) 结合代数的类比和自然推广. 较具体地讲, 与 Etingof 和 Kazhdan 的量子顶点算子代数一样, 量子顶点代数保留了顶点代数的结合性, 而其交换性由一个称为 S- 局部的辫子交换性质所替代, 其中 S- 局部的交换性由所给定的一个有理量子 Yang-Baxter 算子来刻画.

从某种意义上讲, 这个 (弱) 量子顶点代数是一个很理想的体系. 一方面, 它在很大的程度上推广了顶点代数, 包含了很多有趣的例子; 另一方面, 它又不是太野, 对于顶点代数理论中的一些重要结果可以得到相应的结果. 例如, 顶点代数理论中一个典范结果是, 一个空间上任意局部顶点算子集合自然地生成一个顶点代数并自然地以所给空间为模 (参见文献 [22]), 而在量子顶点代数理论中, 我们也有相应的结果, 即一个空间上任意 S- 局部顶点算子集合自然地生成一个弱量子顶点代数并自然地以所给空间为模 (参见文献 [14]). 该结果自然推广了以前的结果. 此结果使我们能够建立很多经典 (结合) 代数 (如 Zamolodchikov-Faddeev 代数 [23, 24] 和无中心双重扬氏代数 [25]) 同量子顶点代数自然地联系起来 (参见文献 [19, 20, 26–28]).

在 Borcherds 的量子顶点代数理论的基础上, Anguelova 和 Bergvelt [29] 也研究了一个量子顶点代数理论.

是否能够将量子仿射代数同我们介绍的量子顶点代数联系起来有一段时间一直是一个未知数. 问题的关键是, 在量子顶点代数及其模理论中, 顶点算子的辫子交换关系是由一个有理量子 Yang-Baxter 算子来刻画, 但在 Drinfeld 的量子仿射代数的实现中 (参见文献 [30]), 其生成函数的辫子交换关系是由一个三角量子 Yang-Baxter 算子所给出. 在 2011 年, 我们取得了一个突破性的进展, 我们发展了一个我们称作为 ϕ- 坐标模的理论, 并建立了类似于以前所提的典范结果的构造理论, 最终用此理论给出了一个量子仿射代数同弱量子顶点代数的自然联系. 在此理论中, ϕ 是一个我们称为一维形式加法群的伴随.

复数域 $\mathbb{C}$ 上一个一维形式群 (法则) 按定义是一个满足如下条件的形式幂级数 $F(x,y) \in \mathbb{C}[[x,y]]$:

$$F(x,0)=x, \quad F(0,y)=y, \quad F(x,F(y,z))=F(F(x,y),z).$$

一个特别的例子是人们所称的形式加法群 $F(x,y)=x+y$. 在顶点代数理论的发展初期, 人们就已经意识到顶点代数及其模理论在本质上基于形式加法群 (参见文献 [31]). 这一点清晰地反映在其关键的结合性公理, 它讲的是, 对于顶点代数的任意三个向量 u、v 和 w, 存在一个非负整数 k 使得下面等式成立: $(x_0+x_2)^k Y(Y(u,x_0)v,x_2)w=(x_0+x_2)^k Y(u,x_0+x_2)Y(v,x_2)w$. 在文献 [19] 中, 作为一个关键

元素, Li 引进了一个伴随的概念. 对于一个一维形式群 $F(x,y)$, 它的一个伴随定义为一个满足如下条件的形式级数 $\phi(x,z)\in\mathbb{C}((x))[[z]]$:

$$\phi(x,0)=x,\quad \phi(x,\phi(y,z))=\phi(x,F(y,z)).$$

我们不难看出, 形式群 $F(x,y)$ 同其伴随的关系正好类比于一个群同其群集合的关系. 一个初等事实是, 用一个群作基底, 我们得到一个结合代数 (群代数), 而用它的一个群集合作基底, 我们得到群代数的一个模. 文献 [19] 的精髓是, 对于形式加法群的任意伴随 ϕ, 我们赋予给每一个量子顶点代数一个 ϕ- 坐标拟模理论. 对于一个 (弱) 量子顶点代数 V, ϕ- 坐标拟模关键的结合性公理讲的是, 对于任意向量 $u,v\in V$, 存在一个非零多项式 $p(x_1,x_2)$ 使得下面等式成立:

$$p(\phi(x_2,x_0),x_2)Y_W(Y(u,x_0)v,x_2)=(p(x_1,x_2)Y_W(u,x_1)Y_W(v,x_2))\,|_{x_1=\phi(x_2,x_0)}$$

(作用在 ϕ- 坐标拟模空间上). 当 $\phi(x,z)=x+z$ (形式加法群本身) 时, ϕ- 坐标拟模恰好是我们以前在文献 [32] 中介绍的拟模概念.

在文献 [19] 中, 形式加法群所有的伴随都被完全分类且具体地构造出来. 任给一个形式 Laurent 级数 $p(x)\in\mathbb{C}((x))$, 定义

$$\phi_{p(x)}(x,z)=\mathrm{e}^{zp(x)\frac{d}{dx}}(x)=\sum_{n\geqslant 0}z^n\frac{1}{n!}\left(p(x)\frac{d}{dx}\right)^n x.$$

我们证明了 $\phi_{p(x)}(x,z)$ 是形式加法群的一个伴随, 任一个伴随都可以这样得到而且其中 $p(x)$ 是被唯一确定的. 特别地, 取 $p(x)=1$ 和 $p(x)=x$, 我们分别得到伴随 $\phi(x,z)=x+z$ (加法群自己) 和 $\phi(x,z)=x\mathrm{e}^z$. 相对应于伴随 $\phi(x,z)=x\mathrm{e}^z$ 的 ϕ- 坐标拟模理论正是我们建立量子仿射代数同 (弱) 量子顶点代数联系所需要的关键工具.

令 $\phi(x,z)=x\mathrm{e}^z$. 对于任意线性空间 W, 我们介绍了一个 W 上三角拟 S- 局部顶点算子集合的概念. 类似于上面所提的典范结果, 我们证明了 W 上的任意三角拟 S- 局部顶点算子集合自然地生成一个弱量子顶点代数, 并以 W 为一个自然的 ϕ- 坐标拟模. 如果取 W 为一个量子仿射代数的最高权模, 我们不难发现, 在 Drinfeld 实现中的标准生成函数作为最高权模上的顶点算子构成了一个拟三角 S-局部集合. 因而, 这些生成函数生成了一个弱量子顶点代数, 其中 W 自然地是一个忠实 ϕ- 坐标拟模. 这样, 在理论上, 量子仿射代数通过其最高权模就和弱量子顶点代数及其 ϕ- 坐标拟模有机地结合起来. 这个工作为我们解决所提公开问题奠定了一个理论基础, 同时公正地讲, 这已经初步地解决了该公开问题.

如前所述, 我们发展量子顶点代数理论的主要动力是解决所提公开问题. 要实现此目标, 我们需要将此理论性的联系进一步具体化, 其中包括具体构造相应的弱量子顶点代数, 并进一步地证明它们是量子顶点代数. 对此前景, 我们非常乐观. 类似于所提公开问题, 建立其他一些重要的代数同量子顶点代数的联系也是非常有意义的问题.

2 量子顶点代数及其模

本节概括介绍弱量子顶点代数、量子顶点代数以及模的基本概念和结果, 其中特别包括一个一般性构造理论. 为了方便读者 (提高本文的可读性), 我们也列入形式微积分的一些基本常识.

首先介绍一些常用的记号和约定. 除通常用 $\mathbb{Z}$ 和 $\mathbb{C}$ 分别代表整数集合和复数集合外, 我们用 $\mathbb{N}$ 代表非负整数集合. 在本文中, 所有向量空间包括代数的基域是复数域, 所出现的变量 x、y、z、x_0、x_1 和 x_2 都是相互交换、独立的不定元. 对任意向量空间 W, $W[[x]]$ 代表所有系数在 W 里的形式非负幂级数构成的空间:

$$W[[x]] = \left\{ \sum_{n\in\mathbb{N}} w(n)x^n \;\middle|\; w(n) \in W \right\}; \tag{2.1}$$

$W((x))$ 代表所有系数在 W 里的形式下截断的 Laurent 幂级数构成的空间:

$$W((x)) = \left\{ \sum_{n\geqslant k} w(n)x^n \;\middle|\; k \in \mathbb{Z}, w(n) \in W \right\}; \tag{2.2}$$

$W[[x, x^{-1}]]$ 代表所有系数在 W 里的形式幂级数构成的空间:

$$W[[x, x^{-1}]] = \left\{ \sum_{n\in\mathbb{Z}} w(n)x^n \;\middle|\; w(n) \in W \right\}. \tag{2.3}$$

在顶点代数理论中, 下面的形式 Dirac δ- 函数扮演一个非常重要的角色:

$$\delta(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} x^n \in \mathbb{C}[[x, x^{-1}]]. \tag{2.4}$$

我们知道 $\mathbb{C}((x))$ 是一个域, 进一步, $\mathbb{C}((x))((y))$ 和 $\mathbb{C}((y))((x))$ 都是域. 显然,

$$\mathbb{C}((x))((y)) \cap \mathbb{C}((y))((x)) = \mathbb{C}((x, y)). \tag{2.5}$$

我们用 $\mathbb{C}(x)$ 和 $\mathbb{C}(x, y)$ 分别代表 (形式) 有理函数域. 换句话讲, $\mathbb{C}(x, y)$ 是多项式环 $\mathbb{C}[x, y]$ 的分式域. 鉴于 $\mathbb{C}[x, y]$ 也是域 $\mathbb{C}((x))((y))$ 和 $\mathbb{C}((y))((x))$ 的子环, 自然地, 我们有两个被称作 iota- 映射的域嵌入映射:

$$\iota_{x,y} : \mathbb{C}(x, y) \to \mathbb{C}((x))((y)), \tag{2.6}$$

$$\iota_{y,x} : \mathbb{C}(x, y) \to \mathbb{C}((y))((x)). \tag{2.7}$$

特别地, 对任意整数 n, 我们不难验证

$$\iota_{x,y}(x \pm y)^n = \sum_{j\geqslant 0} \binom{n}{j} (\pm 1)^j x^{n-j} y^j. \tag{2.8}$$

为方便起见, 在顶点代数理论中, 我们传统地作如下形式约定 (参见文献 [2,3]):

$$(x \pm y)^n = \iota_{x,y}(x \pm y)^n \in \mathbb{C}[x, x^{-1}][[y]], \tag{2.9}$$

那么有

$$x^{-1}\delta\left(\frac{y}{x}\right) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} x^{-n-1}y^n = (x - y)^{-1} - (-y + x)^{-1}. \tag{2.10}$$

进一步, 我们有

$$x_0^{-1}\delta\left(\frac{x_1 - x_2}{x_0}\right) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} x_0^{-n-1}(x_1 - x_2)^n = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \sum_{j\geqslant 0} \binom{n}{j} (-1)^j x_0^{-n-1} x_1^{n-j} x_2^j. \tag{2.11}$$

三个变量的 δ- 函数满足下面的基本性质:

$$x_2^{-1}\delta\left(\frac{x_1-x_0}{x_2}\right)=x_1^{-1}\delta\left(\frac{x_2+x_0}{x_1}\right), \tag{2.12}$$

$$x_0^{-1}\delta\left(\frac{x_1-x_2}{x_0}\right)-x_0^{-1}\delta\left(\frac{x_2-x_1}{-x_0}\right)=x_2^{-1}\delta\left(\frac{x_1-x_0}{x_2}\right). \tag{2.13}$$

我们首先从顶点超代数的概念出发 (参见文献 [33]).

定义 2.1 一个顶点超代数是一个 $\mathbb{Z}_2$- 分次向量空间 $V=V^0\oplus V^1$, 其赋予着一个线性映射

$$\begin{aligned}&Y(\cdot,x):V\to(\mathrm{End}V)[[x,x^{-1}]],\\ &\qquad v\mapsto Y(v,x)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}v_nx^{-n-1}\quad(\text{其中 } v_n\in\mathrm{End}V)\end{aligned} \tag{2.14}$$

和一个被称作真空向量的特别向量 $\mathbf{1}\in V^0$, 满足下面所有的条件:

$$Y(u,v)v\in V((x)), \tag{2.15}$$

$$Y(\mathbf{1},x)v=v,\quad Y(v,x)\mathbf{1}\in V[[x]],\quad \lim_{x\to0}Y(v,x)\mathbf{1}=v, \tag{2.16}$$

$$\begin{aligned}&x_0^{-1}\delta\left(\frac{x_1-x_2}{x_0}\right)Y(u,x_1)Y(v,x_2)w-(-1)^{|u||v|}x_0^{-1}\delta\left(\frac{x_2-x_1}{-x_0}\right)Y(v,x_2)Y(u,x_1)w\\ &\quad=x_2^{-1}\delta\left(\frac{x_1-x_0}{x_2}\right)Y(Y(u,x_0)v,x_2)w,\end{aligned} \tag{2.17}$$

其中 u 和 v 是任意齐次向量, 对于 $u\in V^{\varepsilon}$, 有 $|u|=\varepsilon$. 最后的条件通常称为 Jacobi 等式.

正如李代数与李超代数之间的关系, 一个顶点代数定义为一个奇部分为零的顶点超代数. 我们有下面的一个基本事实 (参见文献 [22,34,35]).

命题 2.1 在顶点超代数的定义中, Jacobi 等式 (2.17) 可以等价地被下面的两个条件所替代:

(1) 对于任意的向量 $u,v,w\in V$, 存在一个非负整数 l 使得

$$(x_0+x_2)^lY(u,x_0+x_2)Y(v,x_2)w=(x_0+x_2)^lY(Y(u,x_0)v,x_2)w\quad(\text{弱结合性}). \tag{2.18}$$

(2) 对于任意的齐次向量 $u,v\in V$, 存在一个非负整数 k 使得

$$(x_1-x_2)^kY(u,x_1)Y(v,x_2)=(-1)^{|u||v|}(x_1-x_2)^kY(v,x_2)Y(u,x_1)\quad(\text{弱交换性}). \tag{2.19}$$

任给一个顶点超代数 V, 记 D 为如下定义的 V 上的线性算子:

$$Dv=v_{-2}\mathbf{1}=\left(\frac{d}{dx}Y(v,x)\mathbf{1}\right)\bigg|_{x=0},\quad\text{对于 } v\in V, \tag{2.20}$$

那么下面的关系式成立:

$$[D,Y(v,x)]=Y(Dv,x)=\frac{d}{dx}Y(v,x). \tag{2.21}$$

进一步地, 我们有下面的斜对称性质: 对于任意的齐次向量 $u,v\in V$, 有

$$Y(u,x)v=(-1)^{|u||v|}\mathrm{e}^{xD}Y(v,-x)u. \tag{2.22}$$

注 2.1 在顶点代数的定义中, 把其 Jacobi 等式公理换为 (较弱的) 弱结合条件, 我们得到一个非局部顶点代数的概念 (参见文献 [36,37]). 假设 V 是任一个非局部顶点代数, 如以前一样定义 V 上的线性算子 D, 那么关系式 (2.21) 仍然成立.

我们有如下的事实 (参见文献 [3]):

命题 2.2 假设 V 是一个非局部顶点代数, 那么弱交换性等价于斜对称性.

一个顶点代数 V 称为交换的, 如果对于任意的向量 $u, v \in V$, 有

$$Y(u,x_1)Y(v,x_2) = Y(v,x_2)Y(u,x_1), \tag{2.23}$$

即作为 V 上的算子, $u_m v_n = v_n u_m$ 对所有的整数 m 和 n 成立. 不难证明, 一个顶点代数 V 是交换的当且仅当对所有的向量 $u, v \in V$, 有

$$Y(u,x)v \in V[[x]], \tag{2.24}$$

即 $u_n v = 0$ 对所有的非负整数 n 成立.

注 2.2 Borcherds [1] 给出了一个交换顶点代数的构造. 假设 A 是一个带单位元 1 的交换结合代数, d 是 A 的一个导子. 对于 $a, b \in A$, 定义

$$Y(a,x)b = (\mathrm{e}^{xD}a)b = \sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{n!}(D^n a)bx^{-n-1}, \tag{2.25}$$

那么, 线性映射 $Y(\cdot,x)$ 赋予给 A 一个交换顶点代数的结构. 进一步, 每一个交换顶点代数都可以这样得到. 特别地, 取 $d=0$, 任一个带单位元的交换结合代数自然就是一个 (交换) 顶点代数. 从这个角度来讲, 顶点代数是交换结合代数的自然推广. 另一方面, 命题 2.1 说明顶点代数是交换结合代数的类比.

下面是在文献 [14] 中引进的一个基本概念:

定义 2.2 对顶点代数的定义稍作修改来定义一个弱量子顶点代数, 把其中的 Jacobi 等式公理换成下面的条件: 对任意向量 $u, v \in V$, 存在 $u^{(i)}, v^{(i)} \in V$, $f_i(x) \in \mathbb{C}((x))$ $(i = 1, \dots, r)$ 使得下面的 S-Jacobi 等式成立:

$$\begin{aligned} & x_0^{-1}\delta\left(\frac{x_1-x_2}{x_0}\right)Y(u,x_1)Y(v,x_2) - x_0^{-1}\delta\left(\frac{x_2-x_1}{-x_0}\right)\sum_{i=1}^{r} f_i(x_2-x_1)Y(v^{(i)},x_2)Y(u^{(i)},x_1) \\ &\quad = x_2^{-1}\delta\left(\frac{x_1-x_0}{x_2}\right)Y(Y(u,x_0)v,x_2). \end{aligned} \tag{2.26}$$

我们不难看出弱量子顶点代数自然推广了顶点超代数的概念. 我们有下面的结果:

命题 2.3 在弱量子顶点代数的定义中, 其 S-Jacobi 等式 (2.26) 等价于弱结合性和下面的弱 S-交换性: 对于任意的向量 $u, v \in V$, 存在 $u^{(i)}, v^{(i)} \in V$, $f_i(x) \in \mathbb{C}((x))$ $(i = 1, \dots, r)$ 和一个非负整数 k 使得

$$(x_1-x_2)^k Y(u,x_1)Y(v,x_2) = (x_1-x_2)^k \sum_{i=1}^{r} f_i(x_2-x_1)Y(v^{(i)},x_2)Y(u^{(i)},x_1). \tag{2.27}$$

定义 2.3 假设 V 是一个非局部顶点代数. 一个 V- 模是一个向量空间 W, 其赋予着一个线性映射

$$Y_W(\cdot,x): V \to (\mathrm{End}W)[[x,x^{-1}]],$$

$$v \mapsto Y_W(v,x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} v_n x^{-n-1} \quad (\text{其中 } v_n \in \mathrm{End}W), \tag{2.28}$$

满足下面的条件:

$$\begin{aligned} &Y_W(\mathbf{1},x) = 1_W \quad (\text{其中 } 1_W \text{ 代表 } W \text{ 上的恒等算子}) \\ &Y_W(v,x)w \in W((x)), \quad \text{对所有的 } v\in V, \quad w\in W \end{aligned}$$

和对于任意向量 $u,v\in V$, $w\in W$, 存在一个非负整数 l 使得

$$(x_0+x_2)^l Y_W(u,x_0+x_2)Y_W(v,x_2)w = (x_0+x_2)^l Y_W(Y(u,x_0)v,x_2)w. \tag{2.29}$$

进一步我们有下面的结果:

命题 2.4 假设 V 是一个弱量子顶点代数, (W,Y_W) 是一个 V- 模, 那么, 对于任意向量 $u,v\in V$, 下面的等式成立:

$$\begin{aligned} &x_0^{-1}\delta\left(\frac{x_1-x_2}{x_0}\right)Y_W(u,x_1)Y_W(v,x_2) - x_0^{-1}\delta\left(\frac{x_2-x_1}{-x_0}\right)\sum_{i=1}^{r} f_i(x_2-x_1)Y_W(v^{(i)},x_2)Y_W(u^{(i)},x_1) \\ &= x_2^{-1}\delta\left(\frac{x_1-x_0}{x_2}\right)Y_W(Y(u,x_0)v,x_2), \end{aligned}$$

其中 $u^{(i)},v^{(i)}\in V$, $f_i(x)\in\mathbb{C}((x))$ 同在定义 1.2 和命题 1.3 中的一样.

假设 W 是任意给定的向量空间. 记

$$\mathcal{E}(W) = \mathrm{Hom}(W, W((x))), \tag{2.30}$$

这里自然地把 $\mathrm{Hom}(W,W((x)))$ 看作 $(\mathrm{End}W)[[x,x^{-1}]]$ 的一个子空间.

定义 2.4 空间 $\mathcal{E}(W)$ 的一个子集 U 称为是 S- 局部的, 如果对任意的元素 $u(x),v(x)\in U$, 存在 $u^{(i)}(x),v^{(i)}(x)\in U$, $f_i(x)\in\mathbb{C}((x))$ $(i=1,\dots,r)$ 和一个非负整数 k 使得下面关系成立:

$$(x-z)^k u(x)v(z) = (x-z)^k \sum_{i=1}^{r} f_i(z-x)v^{(i)}(z)u^{(i)}(x). \tag{2.31}$$

假若 U 是 $\mathcal{E}(W)$ 的一个 S- 局部子集. 对于 $u(x),v(x)\in U$, $n\in\mathbb{Z}$, 定义

$$u(x)_n v(x) = \mathrm{Res}_{x_1}\left((x_1-x)^n u(x_1)v(x) - (-x+x_1)^n \sum_{i=1}^{r} f_i(x-x_1)v^{(i)}(x)u^{(i)}(x_1)\right). \tag{2.32}$$

下面是文献 [14] 中的一个基本结果:

定理 2.1 假设 W 是任意向量空间, 则 $\mathcal{E}(W)$ 的任一个 S- 局部子集 U 生成一个弱量子顶点代数 $\langle U\rangle$, 并且 W 是它的一个忠实模, 其中 $Y_W(a(x),z)=a(z)$ 对于任意的 $a(x)\in\langle U\rangle$ 成立.

我们注意 S- 局部的概念推广了局部的概念, 其中一个子集 U 称为是局部的, 如果对任意的元素 $u(x),v(x)\in U$, 存在一个非负整数 k 使得下面关系成立:

$$(x-z)^k u(x)v(z) = (x-z)^k v(z)u(x). \tag{2.33}$$

定理 2.1 自然地推广了文献 [22] 中相应的结果.

下面拟模的概念自然地产生于文献 [14,32] 中:

定义 2.5 假设 V 是任一个非局部顶点代数. 对 V- 模的定义做下面的稍微改动得到拟 V- 模的概念, 将其中的弱结合性公理换为下面的条件: 对于任意的向量 $u, v \in V$, 存在一个非零多项式 $p(x_1, x_2)$ 使得

$$p(x_1, x_2)Y_W(u, x_1)Y_W(v, x_2) \in \mathrm{Hom}(W, W((x_1, x_2))) \tag{2.34}$$

和

$$(p(x_1, x_2)Y_W(u, x_1)Y_W(v, x_2))\,|_{x_1=x_2+x_0} = p(x_2 + x_0, x_2)Y_W(Y(u, x_0)v, x_2). \tag{2.35}$$

注 2.3 如果 V 是一个弱量子顶点代数, 上面条件等价于下面的拟 Jacobi 等式: 对于任意的向量 $u, v \in V$, 存在一个非零多项式 $p(x_1, x_2)$ 使得

$$\begin{aligned}
&x_0^{-1}\delta\left(\frac{x_1 - x_2}{x_0}\right)p(x_1, x_2)Y_W(u, x_1)Y_W(v, x_2)\\
&-x_0^{-1}\delta\left(\frac{x_2 - x_1}{-x_0}\right)p(x_1, x_2)\sum_{i=1}^{r} f_i(x_2 - x_1)Y_W(v^{(i)}, x_2)Y_W(u^{(i)}, x_1)\\
&= x_2^{-1}\delta\left(\frac{x_1 - x_0}{x_2}\right)p(x_1, x_2)Y_W(Y(u, x_0)v, x_2),
\end{aligned} \tag{2.36}$$

其中 $u^{(i)}, v^{(i)} \in V$, $f_i(x) \in \mathbb{C}((x))$ 与以前在弱量子顶点代数的定义中一样 (定义 1.3).

为了给出量子顶点代数的概念, 我们需要有理量子 Yang-Baxter 算子的概念. 假定 V 是向量空间. 空间 V 上的一个有理量子 Yang-Baxter 算子是线性映射

$$S(x) : V \otimes V \to V \otimes V \otimes \mathbb{C}((x)),$$

它满足下面的量子 Yang-Baxter 方程:

$$S_{12}(x)S_{13}(x + z)S_{23}(z) = S_{23}(z)S_{13}(x + z)S_{12}(x), \tag{2.37}$$

其中对于 $1 \leqslant i < j \leqslant 3$, $S_{ij}(x)$ 是由 $S(x)$ 显而易见的方式定义的 $V \otimes V \otimes V$ 到 $V \otimes V \otimes V \otimes \mathbb{C}((x))$ 的一个线性映射. 例如, $S_{23}(x) = 1 \otimes S(x)$. 再进一步, 一个有理量子 Yang-Baxter 算子 $S(x)$ 称作是优化的, 如果它满足条件

$$S(x)S_{21}(-x) = 1, \tag{2.38}$$

其中 $S_{21}(x) = (\sigma \otimes 1)S(x)\sigma$, σ 代表 $V \otimes V$ 上的标准置换, 即 $\sigma(u \otimes v) = \sigma(v \otimes u)$.

对于任一个弱量子顶点代数 V, 我们采用 Etingof 和 Kazhdan 的记号, 记 $Y(x)$ 为线性映射

$$Y(x) : V \otimes V \to V((x)), \tag{2.39}$$

其中对于 $u, v \in V$, $Y(x)(u \otimes v) = Y(u, x)v$.

定义 2.6 一个量子顶点代数是一个弱量子顶点代数 V, 其赋予着一个优化有理量子 Yang-Baxter 算子 $S(x)$ 满足如下条件:

(i) 对于任意的 $u, v \in V$, 命题 2.3 中的弱 S- 交换成立, 其中 $u^{(i)}$、$v^{(i)}$ 和 $f_i(x)$ 如下给出:

$$S(x)(v \otimes u) = \sum_{i=1}^{r} v^{(i)} \otimes u^{(i)} \otimes f_i(x) \in V \otimes V \otimes \mathbb{C}((x)).$$

(ii)

$$S(x)(\mathbf{1}\otimes v)=\mathbf{1}\otimes v,\quad S(x)(u\otimes\mathbf{1})=u\otimes\mathbf{1},\qquad (2.40)$$
$$[D\otimes 1,S(x)]=-\frac{d}{dx}S(x).$$

(iii)

$$S(z)(Y(x)\otimes 1)=(Y(x)\otimes 1)S_{23}(z)S_{13}(z+x).\qquad (2.41)$$

假设 V 是任意弱量子顶点代数. 对于每一个正整数 n, 定义一个线性映射

$$Z_n: V^{\otimes n}\otimes\mathbb{C}((x_1))\cdots((x_n))\to V((x_1))\cdots((x_n)),$$
$$Z_n(v^{(1)}\otimes\cdots\otimes v^{(n)}\otimes f)=fY(v^{(1)},x_1)\cdots Y(v^{(n)},x_n)\mathbf{1},$$

其中 $v^{(1)},\dots,v^{(n)}\in V$, $f\in\mathbb{C}((x_1))\cdots((x_n))$. 一个弱量子顶点代数 V 称为是非退化的 (参见文献 [12]), 如果对于每一个正整数 n, 线性映射 Z_n 是一个单射. 我们有如下结果 (参见文献 [14]):

定理 2.2　假设一个弱量子顶点代数 V 是非退化的, 那么在 V 上存在一个优化有理量子 Yang-Baxter 算子 $S(x)$ 使得 V 成为一个量子顶点代数, 并且这样的 $S(x)$ 是被唯一确定的.

由此定理可见非退化性的重要性 (关于其他的重要性参见文献 [12]). 在文献 [15] 中, 作者得到了一些关于非退化性的基本结果.

引理 2.1　一个非退化的非局部顶点代数的任意子代数自然是非退化的.

命题 2.5　假设 V 是一个复数域 $\mathbb{C}$ 上的非局部顶点代数. 如果 V 是可数维的, 且其伴随模 V 是不可约的, 那么 V 是非退化的.

此命题推广了文献 [38] 中的一个结果 (从顶点代数到非局部顶点代数).

注 2.4　鉴于定理 2.2 和命题 2.5, 术语 "非退化量子顶点代数" 和 "不可约量子顶点代数" (不提及其有理量子 Yang-Baxter 算子) 是没有任何歧义的.

另一个非退化性的充分条件涉及滤过顶点代数. 一个非局部顶点代数 V 的一个升链滤过

$$\cdots\subset E_n\subset E_{n+1}\subset\cdots$$

称为好的, 如果它满足条件 $\mathbf{1}\in E_0$, 对于所有足够小的整数 n, $E_n=0$;

$$u_kv\in E_{m+n},\quad \text{对任意的 } u\in E_m,\quad v\in E_n,\quad k\in\mathbb{Z}.\qquad (2.42)$$

对于一个非局部顶点代数 V 和任给一个好的升链滤过 $\{E_n\}$, 我们有一个分次非局部顶点代数 $\mathrm{Gr}(V)$, 其中作为向量空间 $\mathrm{Gr}(V)=\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}}(E_n/E_{n-1})$, 其顶点算子通过分量如下给出:

$$(u+E_{m-1})_k(v+E_{n-1})=u_kv+E_{m+n-1},\quad \text{对于 } u\in E_m,\quad v\in E_n,\quad m,n,k\in\mathbb{Z}.\qquad (2.43)$$

命题 2.6　假设 V 是复数域 $\mathbb{C}$ 上一个可数维的非局部顶点代数. 如果存在 V 的一个好的升链滤过 $\{E_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$, 使得分次非局部顶点代数 $\mathrm{Gr}(V)$ 是非退化的, 那么 V 是非退化的.

假设 r 是一个正整数, $x_1^{(n)},\dots,x_r^{(n)}$ (其中 $n\geqslant 1$) 是互相交换的独立变量. 令

$$A=\mathbb{C}[x_i^{(n)}\mid 1\leqslant i\leqslant r,n\geqslant 1]$$

(交换多项式代数). 记 d 为代数 A 上由如下条件唯一确定的导子:

$$d(x_i^{(n)}) = nx_i^{(n+1)}, \quad 对于所有\ 1 \leqslant i \leqslant r, \quad n \geqslant 1. \tag{2.44}$$

为方便起见, 我们称 A 为秩为 r 的自由微分多项式代数. 进一步, 利用导子 d, 我们把 A 变成一个交换顶点代数. 我们有如下结果:

命题 2.7 假设 V 是一个复数域 $\mathbb{C}$ 上可数维的非局部顶点代数. 如果存在 V 的一个好的升链滤过 $\{E_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ 使得其分次非局部顶点代数 $\mathrm{Gr}(V)$ 同构于一个有限秩微分多项式代数, 那么 V 是非退化的.

下面讨论三个具体的例子. 假设 $\mathfrak{g}$ 是任意 (有限或无限维) 李代数. 鉴于 $t^{-1}\mathbb{C}[t^{-1}]$ 是一个交换结合代数, 张量积 $\mathfrak{g}\otimes t^{-1}\mathbb{C}[t^{-1}]$ 也记为 $t^{-1}\mathfrak{g}[t^{-1}]$, 自然地是一个李代数, 并且 $-\frac{d}{dt}$ 是其一个李代数导子. 那么, $-\frac{d}{dt}$ 自然地提升为泛包络代数 $U(t^{-1}\mathfrak{g}[t^{-1}])$ 的一个导子, 记作 d. 这样, 利用导子 d, 我们可以赋予 $U(t^{-1}\mathfrak{g}[t^{-1}])$ 一个非局部顶点代数的结构. 对于 $a \in \mathfrak{g}$, 有

$$Y(a\otimes t^{-1}, x) = \mathrm{e}^{-x(d/dt)}(a\otimes t^{-1}) = a\otimes (t-x)^{-1} = \sum_{n\geqslant 0}(a\otimes t^{-n-1})x^n. \tag{2.45}$$

令

$$a(x)^- = \sum_{n\geqslant 0}(a\otimes t^{-n-1})x^n, \tag{2.46}$$

那么, 对于 $a, b \in \mathfrak{g}$, 有

$$[a(x_1)^-, b(x_2)^-] = (x_2 - x_1)^{-1}([a,b](x_1)^- - [a,b](x_2)^-). \tag{2.47}$$

我们有如下的结果 (参见文献 [15]):

命题 2.8 非局部顶点代数 $U(t^{-1}\mathfrak{g}[t^{-1}])$ 是一个弱量子顶点代数. 进一步, 如果 $\mathfrak{g}$ 是一个有限维李代数, 那么 $U(t^{-1}\mathfrak{g}[t^{-1}])$ 是一个非退化量子顶点代数.

我们要讨论的第二个例子与 Zamolodchikov-Faddeev 代数相关. 假设 $\boldsymbol{Q} = (q_{ij}(x))$ 是一个满足下面条件的 $\mathbb{C}((x))$ 上 $r\times r$ 矩阵: 对于 $1 \leqslant i, j \leqslant r$, 有 $q_{ij}(x)q_{ji}(-x) = 1$. 定义一个带单位元结合代数 $A_{\boldsymbol{Q}}$, 它具有生成元 $u_n^{(i)}$ 和 $v_n^{(i)}$ $(1 \leqslant i \leqslant r,\ n \in \mathbb{Z})$, 定义关系为

$$\begin{aligned}
&u^{(i)}(x_1)u^{(j)}(x_2) = q_{ij}(x_2 - x_1)u^{(j)}(x_2)u^{(i)}(x_1),\\
&v^{(i)}(x_1)v^{(j)}(x_2) = q_{ij}(x_2 - x_1)v^{(j)}(x_2)v^{(i)}(x_1),\\
&u^{(i)}(x_1)v^{(j)}(x_2) - q_{ji}(x_2 - x_1)v^{(j)}(x_2)u^{(i)}(x_1) = \delta_{i,j}x_1^{-1}\delta\left(\frac{x_2}{x_1}\right)
\end{aligned}$$

对所有的 $1 \leqslant i, j \leqslant r$, 其中

$$u^{(i)}(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} u_n^{(i)}x^{-n-1}, \quad v^{(i)}(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} v_n^{(i)}x^{-n-1}.$$

进一步, 定义一个 $A_{\boldsymbol{Q}}$- 模 $V_{\boldsymbol{Q}}$, 它由一个元素 $\mathbf{1}$ 生成, 具有下面的定义关系:

$$u_n^{(i)}\mathbf{1} = v_n^{(i)}\mathbf{1} = 0$$

对所有的 $1 \leqslant i \leqslant r$, $n \geqslant 0$. 对于 $1 \leqslant i \leqslant r$, 记

$$u^{(i)} = u_{-1}^{(i)}\mathbf{1}, \quad v^{(i)} = v_{-1}^{(i)}\mathbf{1} \in V_{\boldsymbol{Q}}.$$

定理 2.3 [26] 在代数 $A_{\boldsymbol{Q}}$ 的模 $V_{\boldsymbol{Q}}$ 上存在一个由如下条件唯一确定的弱量子顶点代数结构:

$$Y(\mathbf{1},x)=1,\quad Y(u^{(i)},x)=u^{(i)}(x),\quad Y(v^{(i)},x)=v^{(i)}(x),$$

其中 $i=1,\dots,r$. 进一步, $V_{\boldsymbol{Q}}$ 是一个不可约量子顶点代数.

我们要讨论的第三个例子与李代数 $sl(2,C)$ 的杨氏代数有关. 假设 q 是任意非零复数. 令 $DY_q(sl_2)$ 是如下定义的带单位元的结合代数, 其生成元是 e_n、f_n 和 h_n $(n\in\mathbb{Z})$, 定义关系是

$$\begin{aligned}
&e(x_1)e(x_2)=\frac{q+x_1-x_2}{-q+x_1-x_2}e(x_2)e(x_1),\\
&f(x_1)f(x_2)=\frac{-q+x_1-x_2}{q+x_1-x_2}f(x_2)f(x_1),\\
&h(x_1)h(x_2)=h(x_2)h(x_1),\\
&h(x_1)e(x_2)=\frac{q+x_1-x_2}{-q+x_1-x_2}e(x_2)h(x_1),\\
&h(x_1)f(x_2)=\frac{-q+x_1-x_2}{q+x_1-x_2}h(x_2)f(x_1),\\
&[e(x_1),f(x_2)]=x_1^{-1}\delta\left(\frac{x_2}{x_1}\right)h(x_2),
\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}
&e(x)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}e_nx^{-n-1},\quad f(x)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}h_nx^{-n-1},\quad h(x)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}h_nx^{-n-1},\\
&(\pm q+x_1-x_2)^{-1}=\sum_{i\geqslant 0}(\pm q)^{-i-1}(x_2-x_1)^i\in\mathbb{C}[[x_1,x_2]].
\end{aligned}$$

令 V_q 是一个 $DY_q(sl_2)$- 模, 由 $\mathbf{1}$ 作为生成元 (向量), 具有定义关系

$$e_n\mathbf{1}=f_n\mathbf{1}=h_n\mathbf{1}=0,\quad \text{对所有的非负整数 } n.$$

记 $e=e_{-1}\mathbf{1}$, $f=f_{-1}\mathbf{1}$, $h=h_{-1}\mathbf{1}\in V_q$.

定理 2.4 [16] 代数 $DY_q(sl_2)$ 的模 V_q 上存在一个由如下条件唯一确定的弱量子顶点代数结构:

$$Y(\mathbf{1},x)=1,\quad Y(e,x)=e(x),\quad Y(f,x)=f(x),\quad Y(h,x)=h(x).$$

进一步, V_q 是一个非退化量子顶点代数.

3 量子顶点代数的 ϕ- 坐标模和 ϕ- 坐标拟模理论

本节概括介绍 (弱) 量子顶点代数的 ϕ- 坐标模理论, 特别是一个一般性构造理论.

我们首先从一维形式群的概念开始. 复数域 $\mathbb{C}$ 上的一个一维形式群 (或法则) (参见文献 [39]) 按定义是一个满足如下条件的形式幂级数 $F(x,y)\in\mathbb{C}[[x,y]]$:

$$F(x,0)=x,\quad F(0,y)=y,\quad F(x,F(y,z))=F(F(x,y),z). \tag{3.1}$$

一个特别的例子是 $F(x,y)=x+y$, 其通常被称作 (一维) 形式加法群.

假设 $F(x,y)$ 是一个一维形式群. 在文献 [19] 中, 作者引进了伴随的概念. 形式群 $F(x,y)$ 的一个伴随是一个满足如下条件的形式级数 $\phi(x,z)\in\mathbb{C}((x))[[z]]$:

$$\phi(x,0)=x,\quad \phi(x,\phi(y,z))=\phi(x,F(y,z)). \tag{3.2}$$

不难看出形式群的伴随类似于群的群集合.

我们知道, 顶点代数、量子顶点代数及其模 (和扭模) 理论都基于形式加法群. 文献 [19] 的精髓是, 对于形式加法群的任意伴随 $\phi(x,z)$, 我们赋予给顶点代数, 或更广的弱量子顶点代数, 一个 ϕ- 坐标模的理论, 其中通常的模理论对应于形式加法群本身.

我们得到了如下结果:

命题 3.1 对任意形式 Laurent 级数 $p(x)\in\mathbb{C}((x))$, 定义

$$\phi_{p(x)}(x,z)=\mathrm{e}^{zp(x)\frac{d}{dx}}(x)=\sum_{n\geqslant 0}z^n\frac{1}{n!}\left(p(x)\frac{d}{dx}\right)^n x\in\mathbb{C}((x))[[z]],$$

那么, $\phi_{p(x)}(x,z)$ 是形式加法群的一个伴随. 进一步, 形式加法群的每一个伴随都可以这样得到而且其中的 $p(x)$ 是被唯一确定的.

如果取 $p(x)=x^n$, 其中 n 是任意整数, 那么可得到一系列形式加法群的伴随. 一个值得指出的事实是, 所有微分算子 $x^{n+1}\frac{d}{dx}$ $(n\in\mathbb{Z})$ 线性张成 Witt 李代数, 即无中心的 Virasoro 代数. 特别地, 取 $p(x)=1$, 我们得到形式加法群自己:

$$\phi(x,z)=\mathrm{e}^{z\frac{d}{dx}}\cdot x=x+z; \tag{3.3}$$

如果取 $p(x)=x$, 我们得到形式加法群的一个特别伴随

$$\phi(x,z)=\mathrm{e}^{zx\frac{d}{dx}}\cdot x=x\mathrm{e}^z. \tag{3.4}$$

形式加法群的这个特别伴随正是我们建立量子仿射代数同量子顶点代数联系所需的一个重要元素.

下面是在文献 [19] 中所介绍的 ϕ- 坐标 (拟) 模的定义:

定义 3.1 假设 $\phi(x,z)$ 是一个形式加法群的伴随. 一个非局部顶点代数 V 的一个 ϕ- 坐标拟模是一个向量空间 W, 其上赋予着一个线性映射

$$\begin{aligned} Y_W(\cdot,x):V&\to(\operatorname{End}W)[[x,x^{-1}]],\\ v&\mapsto Y_W(v,x), \end{aligned} \tag{3.5}$$

它满足如下条件:

(i) $Y_W(\mathbf{1},x)=1_W$ (W 上的恒等算子);

(ii) 对于任意向量 $v\in V$, $w\in W$, 有

$$Y_W(v,x)w\in W((x)); \tag{3.6}$$

(iii) 对于任意向量 $u,v\in V$, 存在一个非零多项式 $p(x_1,x_2)$ 使得

$$p(x_1,x_2)Y_W(u,x_1)Y_W(v,x_2)\in\operatorname{Hom}(W,W((x_1,x_2))), \tag{3.7}$$

$$(p(x_1,x_2)Y_W(u,x_1)Y_W(v,x_2))\mid_{x_1=\phi(x_2,x_0)}=p(\phi(x_2,x_0),x_2)Y_W(Y(u,x_0)v,x_2). \tag{3.8}$$

在这个 ϕ- 坐标拟模的定义中, 在条件 (iii) 中, 把 “存在一个非零多项式 $p(x_1,x_2)$” 加强为 “存在一个形式为 $(x_1-x_2)^k$ 的多项式 $p(x_1,x_2)$” 即得到 ϕ- 坐标模的概念.

我们观测到对任意的 $G(x_1,x_2)\in \mathrm{Hom}(W,W((x_1,x_2)))$, 变量代换 $G(x_1,x_2)\,|_{x_1=\phi(x_2,x_0)}$ 存在且其结果是向量空间 $(\mathrm{Hom}(W,W((x_2))))[[x_0]]$ 的一个元素. 在这里, 性质 (3.7) 是等式 (3.8) 有意义的一个先决条件.

在过去, 我们在实际应用中主要用到 $\phi(x,z)=x+z$ 或 $\phi(x,z)=x\mathrm{e}^z$ 的两种特别情形. 当然, 我们发展此理论的主要动力是建立量子仿射代数与量子顶点代数的联系. 为此目的, 我们只需要考虑 $\phi(x,z)=x\mathrm{e}^z$ 的特别情形. 从现在起, 假设 $\phi(x,z)=x\mathrm{e}^z$.

假设 W 是任意向量空间. 同以前一样, 记 $\mathcal{E}(W)=\mathrm{Hom}(W,W((x)))$.

定义 3.2 称 $\mathcal{E}(W)$ 的一个子集 U 是三角拟 S- 局部的, 如果对于任意的 $u(x),v(x)\in U$, 存在有限个

$$u^{(i)}(x),v^{(i)}(x)\in U,\quad g_i(x)\in\mathbb{C}(x),\quad 1\leqslant i\leqslant r$$

和一个非零多项式 $p(x_1,x_2)$ 使得

$$p(x_1,x_2)u(x_1)v(x_2)=\sum_{i=1}^{r}p(x_1,x_2)g_i\left(\frac{x_2}{x_1}\right)v^{(i)}(x_2)u^{(i)}(x_1),\tag{3.9}$$

其中 $g_i(x_2/x_1)$ 被理解为 $\mathbb{C}((x_2))((x_1))$ 中的元素 $\iota_{x_2,x_1}(g_i(x_2/x_1))$. 在这个定义中, 把 "非零多项式" 换为 "形式为 $(x_1-x_2)^k$ 的多项式", 我们即得到较强的三角 S- 局部的概念.

注意到从等式 (3.9) 可以推出

$$p(x_1,x_2)u(x_1)v(x_2)\in\mathrm{Hom}(W,W((x_1,x_2))),\tag{3.10}$$

因而, 变量代换 $(p(x_1,x)u(x_1)v(x))\,|_{x_1=x\mathrm{e}^z}$ 存在且其结果是 $(\mathrm{Hom}(W,W((x))))[[z]]$ 中的元素.

假设 U 是 $\mathcal{E}(W)$ 的一个三角拟 S- 局部的子集. 对于 $u(x),v(x)\in U$, 定义

$$Y_{\mathcal{E}}^{\phi}(u(x),z)v(x)=\iota_{x,z}\left(\frac{1}{p(x\mathrm{e}^z,x)}\right)(p(x_1,x)u(x_1)v(x))\,\bigg|_{x_1=x\mathrm{e}^z}\tag{3.11}$$

作为 $(\mathrm{Hom}(W,W((x))))[[z]]$ 中的一个元素, 其中 $p(x_1,x_2)$ 是使得 (3.10) 成立的任意非零多项式. 进一步, 通过展式

$$Y_{\mathcal{E}}^{\phi}(u(x),z)v(x)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}(u(x)_n^{\phi}v(x))z^{-n-1},$$

我们来定义 $u(x)_n^{\phi}v(x)\in\mathcal{E}(W)$ 对所有整数 n 成立.

下面是在文献 [19] 中得到的一个基本结果:

定理 3.1 假设 W 是一个向量空间, U 是 $\mathcal{E}(W)$ 的任一个三角拟 S- 局部的子集, 那么 U 在 $\mathcal{E}(W)$ 中生成一个弱量子顶点代数, 记作 $\langle U\rangle_\phi$, 且 W 自然地是其一个 ϕ- 坐标拟模. 更进一步, 如果 U 是一个三角 S- 局部的子集, 那么 W 自然地是 $\langle U\rangle_\phi$ 的一个 ϕ- 坐标模.

对于任意的 $a(x)\in\mathcal{E}(W)$, $\lambda\in\mathbb{C}^\times$, 显而易见 $a(\lambda x)\in\mathcal{E}(W)$. 这样, 我们得到群 $\mathbb{C}^\times$ 在 $\mathcal{E}(W)$ 上的一个自然作用. 我们有如下的结果 (参见文献 [20]):

命题 3.2 假设 W 是任一个向量空间, Γ 是 $\mathbb{C}^\times$ 的一个子群. 如果 U 是 $\mathcal{E}(W)$ 的一个三角拟 S- 局部的子集满足如下条件: 对于任意的 $a(x)\in U$, $\lambda\in\Gamma$, $a(\lambda x)\in U$, 那么 Γ 作用在弱量子顶点代数 $\langle U\rangle_\phi$ 上作为自同构群.

下面是 ϕ- 坐标拟模概念的一个精致化:

定义 3.3 假设 V 是一个弱量子顶点代数, G 是其一个自同构群, $\chi: G \to \mathbb{C}^{\times}$ 是一个线性特征标, 即一个群同态. 称 V 的一个 ϕ- 坐标拟模 (W, Y_W) 是 (G,χ)- 等变的, 如果

(i) 对于任意的 $g \in G$, $v \in V$, 有

$$Y_W(gv, x) = Y_W(v, \chi(g)x); \tag{3.12}$$

(ii) 对于任一个向量 $u, v \in V$, 存在一个多项式 $p(x_1, x_2) = \prod_{i=1}^{r}(x_1 - \lambda_i x_2)$, 其中 $\lambda_i \in \chi(G)$, 使得

$$p(x_1, x_2) Y_W(u, x_1) Y_W(v, x_2) \in \mathrm{Hom}(W, W((x_1, x_2))). \tag{3.13}$$

我们注意到, 当 G 是平凡群时, (G,χ)- 等变的 ϕ- 坐标拟模正好是 ϕ- 坐标模.

作为定理 2.1 的一个精致化, 我们有如下结果 (参见文献 [20]):

定理 3.2 假设 W 是任一个向量空间, Γ 是 $\mathbb{C}^{\times}$ 的一个子群. 假设 U 是 $\mathcal{E}(W)$ 的一个满足下面条件的三角拟 S- 局部的子集:

(i) 在定义 2.2 中的多项式 $p(x_1, x_2)$ 要求具有形式 $\prod_{i=1}^{r}(x_1 - \lambda_i x_2)$, 其中 $\lambda_i \in \Gamma$;

(ii) 对于任意 $a(x) \in U$, $\lambda \in \Gamma$, 有 $a(\lambda x) \in U$,

那么 W 是弱量子顶点代数 $\langle U \rangle_{\phi}$ 的 (Γ,χ)- 等变 ϕ- 坐标拟模, 其中 χ 是恒等映射.

下面讨论一个具体例子, 它与一个被称为量子 $\beta\gamma$ 系统的代数有关. 假设 q 是任一个非零复数. 记 $\tilde{A}_q(\beta\gamma)$ 为由下面的生成元和定义关系来确定的带单位元的结合代数: 生成元为 $\tilde{\beta}_n$ 和 $\tilde{\gamma}_n$ $(n \in \mathbb{Z})$, 生成关系为

$$\begin{aligned}
&\tilde{\beta}(x)\tilde{\beta}(z) = \iota_{z,x}\left(\frac{qz - x}{z - qx}\right)\tilde{\beta}(z)\tilde{\beta}(x),\\
&\tilde{\gamma}(x)\tilde{\gamma}(z) = \iota_{z,x}\left(\frac{qz - x}{z - qx}\right)\tilde{\gamma}(z)\tilde{\gamma}(x),\\
&\tilde{\beta}(x)\tilde{\gamma}(z) - \iota_{z,x}\left(\frac{z - qx}{qz - x}\right)\tilde{\gamma}(z)\tilde{\beta}(x) = \delta\left(\frac{x}{z}\right),
\end{aligned} \tag{3.14}$$

其中

$$\tilde{\beta}(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \tilde{\beta}_n x^{-n}, \quad \tilde{\gamma}(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \tilde{\gamma}_n x^{-n}.$$

称一个 $\tilde{A}_q(\beta\gamma)$- 模 W 是限制的, 如果对每一个向量 $w \in W$, $\tilde{\beta}_n w = \tilde{\gamma}_n w = 0$ 对于所有足够大的整数 n 成立. 不难发现, 对于任一个限制 $\tilde{A}_q(\beta\gamma)$- 模 W, 生成函数 $\tilde{\beta}(x)$ 和 $\tilde{\gamma}(x)$ 构成了 $\mathcal{E}(W)$ 的一个三角 S- 局部的子集. 由定理 3.1 知, 这两个生成函数生成了一个弱量子顶点代数. 为了更好地刻画这个弱量子顶点代数, 我们需要另外一个结合代数.

定义 $\hat{A}_q(\beta\gamma)$ 为由下面的生成元和定义关系决定的带单位元的结合代数: 生成元为 $\hat{\beta}_n$ 和 $\hat{\gamma}_n$ $(n \in \mathbb{Z})$, 定义关系为

$$\begin{aligned}
&\hat{\beta}(x)\hat{\beta}(z) = \iota_{z,x}\left(\frac{q - e^{x-z}}{1 - qe^{x-z}}\right)\hat{\beta}(z)\hat{\beta}(x),\\
&\hat{\gamma}(x)\hat{\gamma}(z) = \iota_{x,z}\left(\frac{q - e^{x-z}}{1 - qe^{x-z}}\right)\hat{\gamma}(z)\hat{\gamma}(x),\\
&\hat{\beta}(x)\hat{\gamma}(z) - \iota_{x,z}\left(\frac{1 - qe^{x-z}}{q - e^{x-z}}\right)\hat{\gamma}(z)\hat{\beta}(x) = x^{-1}\delta\left(\frac{z}{x}\right),
\end{aligned} \tag{3.15}$$

其中

$$\hat{\beta}(x)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\hat{\beta}_n x^{-n-1},\quad \hat{\gamma}(x)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\hat{\gamma}_n x^{-n-1}.$$

令 $V_q(\beta\gamma)$ 是由一个被称为真空向量的元素 $\mathbf{1}$ 生成的 $\hat{A}_q(\beta\gamma)$- 模, 具有如下定义关系: 对所有非负整数 n, 有 $\hat{\beta}_n\mathbf{1}=\hat{\gamma}_n\mathbf{1}=0$. 这个模称为 $\hat{A}_q(\beta\gamma)$ 的真空模. 令 $\hat{\beta}=\hat{\beta}_{-1}\mathbf{1}$, $\hat{\gamma}=\hat{\gamma}_{-1}\mathbf{1}\in V_q(\beta\gamma)$.

我们有如下结果 (参见文献 [19]):

命题 3.3 代数 $\hat{A}_q(\beta\gamma)$ 的模 $V_q(\beta\gamma)$ 上存在由下面条件唯一确定的一个弱量子顶点代数结构:

$$Y(\mathbf{1},x)=1,\quad Y(\hat{\beta},x)=\hat{\beta}(x),\quad Y(\hat{\gamma},x)=\hat{\gamma}(x).$$

更进一步, $V_q(\beta\gamma)$ 是一个不可约量子顶点代数.

定理 3.3 假设 W 是任一个限制 $\tilde{A}_q(\beta\gamma)$- 模, 那么 W 上存在量子顶点代数 $V_q(\beta\gamma)$ 的一个由下面条件唯一确定的 ϕ- 坐标模结构:

$$Y_W(\hat{\beta},x)=\tilde{\beta}(x),\quad Y_W(\hat{\gamma},x)=\tilde{\gamma}(x). \tag{3.16}$$

反过来, 量子顶点代数 $V_q(\beta\gamma)$ 的每一个 ϕ- 坐标模 (W,Y_W) 自然地是代数 $\tilde{A}_q(\beta\gamma)$ 的一个限制模, 其中 $\tilde{\beta}(x)=Y_W(\hat{\beta},x)$, $\tilde{\gamma}(x)=Y_W(\hat{\gamma},x)$.

4 量子仿射代数和弱量子顶点代数

本节以最简单的仿射量子代数 $U_q(\widehat{sl_2})$ 为例说明弱量子顶点代数及其 ϕ- 坐标拟模的构造理论使我们可以建立量子仿射代数同弱量子顶点代数的一个自然联系. 关于一般仿射量子代数, 本节的所有结果仍然成立.

我们先从 Drinfeld 所给出的量子仿射代数 $U_q(\widehat{sl_2})$ 的定义出发 (参见文献 [9, 30]). 假设 q 是一个非零复数. 令 $f(x)=(q^2x-1)/(x-q^2)\in\mathbb{C}(x)$. 进一步, 令 $g(x)^{\pm1}=\iota_{x,0}(f(x)^{\pm1})\in\mathbb{C}[[x]]$, 其中 $\iota_{x,0}(f(x)^{\pm1})$ 代表有理函数 $f(x)^{\pm1}$ 在零点的 Taylor 级数展开式. 量子仿射代数 $U_q(\widehat{sl_2})$ 是 (或同构于) 带单位元的结合代数, 其具有生成元 $X_k^{\pm}$、ϕ_m、ψ_n、$\gamma^{1/2}$ 和 $\gamma^{-1/2}$, 其中 $k\in\mathbb{Z}$, $m\in-\mathbb{Z}_+$, $n\in\mathbb{Z}_+$, $\gamma^{\pm1/2}$ 是中心元素, 且具有下面的定义关系:

$$\begin{aligned}
&\gamma^{1/2}\gamma^{-1/2}=\gamma^{-1/2}\gamma^{1/2}=1,\\
&\phi_0\psi_0=\psi_0\phi_0=1,\\
&[\phi(z),\phi(w)]=0,\quad [\psi(z),\psi(w)]=0,\\
&\phi(z)\psi(w)\phi(z)^{-1}\psi(w)^{-1}=\frac{g(zw^{-1}\gamma^{-1})}{g(zw^{-1}\gamma)},\\
&(z-q^{\pm8}w)X_i^{\pm}(z)X^{\pm}(w)=(q^{\pm8}z-w)X^{\pm}(w)X^{\pm}(z),\\
&[X^+(z),X^-(w)]=\frac{1}{q-q^{-1}}(\delta(zw^{-1}\gamma^{-1})\psi(w\gamma^{1/2})-\delta(zw^{-1}\gamma)\phi(z\gamma^{1/2})),
\end{aligned}$$

其中

$$X^{\pm}(z)=\sum_{k\in\mathbb{Z}}X_k^{\pm}z^k,\quad \phi(z)=\sum_{m\in-\mathbb{Z}_+}\phi_m z^{-m},\quad \psi(z)=\sum_{n\in\mathbb{Z}_+}\psi_n z^{-n}.$$

假设 q 如上是一个非零复数. 我们 (任意) 选定一个对数值 $\log q$. 进一步, 对于任意复数 α, 定义

$$q^{\alpha} = \mathrm{e}^{\alpha \log q} \in \mathbb{C}. \tag{4.1}$$

代数 $U_q(\widehat{sl_2})$ 的一个模 W 称为限制模, 如果对于任意向量 $w \in W$, 当整数 k 足够大时, $X_k^{\pm} w = 0$, $\psi_k w = 0$. 另一方面, 一个模 W 称为是水平为负数 $\ell \in \mathbb{C}$ 的, 如果中心元 $\gamma^{\pm 1/2}$ 作用在 W 上为常量 $q^{\pm \ell/4}$.

对于非零复数 q (如上) 和任一个复数 ℓ, 定义非零复数乘法群 $\mathbb{C}^{\times}$ 的一个子群

$$\Gamma(q,\ell) = \{q^{m+n\ell/4} \mid m, n \in \mathbb{Z}\}. \tag{4.2}$$

假设 W 是仿射量子代数 $U_q(\widehat{sl_2})$ 的任一个水平为 ℓ 的限制模. 令

$$U_W = \{\phi(\alpha x), \psi(\alpha x), X^{\pm}(\alpha x) \mid \alpha \in \Gamma(q,\ell)\}, \tag{4.3}$$

则 U_W 是 $\mathcal{E}(W)$ 的一个子集. 另外, 从以上的定义关系可以得到如下交换关系:

$$\begin{aligned}
&\phi(z)\phi(w) = \phi(w)\phi(z), \quad \psi(z)\psi(w) = \psi(w)\psi(z),\\
&\psi(w)\phi(z) = \frac{g(zw^{-1}q^{\ell/2})}{g(zw^{-1}q^{-\ell/2})}\phi(z)\psi(w),\\
&\psi(z)X^{\pm}(w) = g(z^{-1}wq^{\mp\ell/4})^{\mp 1}X^{\pm}(w)\psi(z),\\
&X^{\pm}(w)\psi(z) = g(z^{-1}wq^{\mp 1/4})^{\pm 1}\psi(z)X^{\pm}(w),\\
&\psi(z)X^{\pm}(w) = g(z^{-1}wq^{\mp\ell/4})^{\mp 1}X^{\pm}(w)\psi(z),\\
&X^{\pm}(w)\psi(z) = g(z^{-1}wq^{\mp\ell/4})^{\pm 1}\psi(z)X^{\pm}(w),\\
&(z - q^{\pm 8}w)X_i^{\pm}(z)X^{\pm}(w) = (q^{\pm 8}z - w)X^{\pm}(w)X^{\pm}(z),\\
&(z - q^{\ell/2}w)(q^{\ell/2}z - w)[X^{+}(z), X^{-}(w)] = 0.
\end{aligned}$$

这样, 我们有下面的结果:

引理 4.1 假设 W 是仿射量子代数 $U_q(\widehat{sl_2})$ 的一个水平为 ℓ 的限制模, 则 U_W 是 $\mathcal{E}(W)$ 的一个三角的拟 S- 局部子集.

鉴于引理 4.1 和定理 2.1, U_W 在 $\mathcal{E}(W)$ 中自然地生成一个弱量子顶点代数 $\langle U_W\rangle_{\phi}$, 并且向量空间 W 是其一个 ϕ- 坐标拟模. 另外, 以前我们已经赋予乘法群 $\mathbb{C}^{\times}$ 在向量空间 $\mathcal{E}(W)$ 上的一个自然作用.

命题 4.1 [20] 假设 W 是仿射量子代数 $U_q(\widehat{sl_2})$ 的一个水平为 ℓ 的限制模, 则 $\Gamma(q,\ell)$ 自然地作用在弱量子顶点代数 $\langle U_W\rangle_{\phi}$ 上作为自同构群. 进一步, W 是 $\langle U_W\rangle_{\phi}$ 的一个 $\Gamma(q,\ell)$- 等变的 ϕ- 坐标拟模.

当然, 我们期望 $\langle U_W\rangle_{\phi}$ 是一个非退化量子顶点代数. 下面是我们的一个猜想:

猜想 4.1 假设 W 是仿射量子代数 $U_q(\widehat{sl_2})$ 的一个水平为 ℓ 的 Verma 模, 则弱量子顶点代数 $\langle U_W\rangle_{\phi}$ 是一个非退化量子顶点代数.

这里指出一个重要的事实. 在非量子情形下, 如果 W 是 (无扭) 仿射李代数 $\hat{\mathfrak{g}}$ 的一个水平为 ℓ 的限制模, 那么 $\hat{\mathfrak{g}}$ 的标准生成函数 $a(x)$ ($a \in \mathfrak{g}$) 形成了向量空间 $\mathcal{E}(W)$ 的一个局部子集 U_W, 它们自然地生成了一个顶点代数, 记作 $\langle U_W\rangle$, 向量空间 W 自然地是其一个模. 更进一步, $\langle U_W\rangle$ 在一个自然作用下仍然是仿射李代数 $\hat{\mathfrak{g}}$ 的一个水平为 ℓ 的模, 且是一个 (相对于 $\mathfrak{g}$ 的) 最高权为零的最高权模 (参见文献 [22, 35]). 反过来, 任一个水平为 ℓ、最高权为零的最高权模上存在一个自然的顶点代数结构. 相比

之下, 在量子的情形下, 这里有很大的差别. 第一, 量子仿射代数 $U_q(\widehat{sl_2})$ 的生成函数形成一个三角的拟 S- 局部子集, 但已不再是一个局部子集. 鉴于此, 文献 [22] 中的一般构造理论已不奏效. 第二, 我们可以用新发展的 ϕ- 坐标拟模理论得到一个弱量子顶点代数 $\langle U_W\rangle_\phi$, 但在自然的作用下它不是 $U_q(\widehat{sl_2})$ 的一个模. 因此, 确定弱量子顶点代数 $\langle U_W\rangle_\phi$ 的具体结构变为一个主要问题. 这些已经明显地体现在第 2 节的具体例子中.

从另一角度讲, 这一个现象也不太惊人, 类似的现象已经出现在扭仿射李代数同顶点代数的联系中. 事实是 (参见文献 [40]), 扭仿射李代数的 (含形式变量分数幂) 标准生成函数自然地生成一个顶点代数, 它是无扭仿射代数的最高权为零的最高权模, 但不是扭仿射李代数的模. 这个事实为我们一些有关研究工作提供了一个正确方向.

致谢 借万哲先先生 90 华诞之际, 谨以此文表达对万先生崇高的敬意和谢意.

参考文献

1 Borcherds R. Vertex algebras, Kac-Moody algebras, and the Monster. Proc Natl Acad Sci USA, 1986, 83: 3068–3071

2 Frenkel I, Lepowsky J, Meurman A. Vertex Operator Algebras and the Monster. Pure and Applied Mathematics, vol. 134. Boston: Academic Press, 1988

3 Frenkel I, Huang Y Z, Lepowsky J. On Axiomatic Approaches to Vertex Operator Algebras and Modules. Memoirs of the American Mathematical Society, vol. 104. Providence: Amer Math Soc, 1993

4 Lepowsky J, Wilson R L. Construction of the affine Lie algebra $A_1^{(1)}$. Comm Math Phys, 1978, 62: 43–53

5 Kac V, Kazhdan D, Lepowsky J, et al. Realization of the basic representations of the Euclidean Lie algebras. Adv Math, 1981, 42: 83–112

6 Frenkel I B, Kac V G. Basic representations of affine Lie algebras and dual resonance models. Invent Math, 1980, 62: 23–66

7 Segal G. Unitary representations of some infinite-dimensional groups. Comm Math Phys, 1981, 80: 301–342

8 Frenkel I B, Zhu Y C. Vertex operator algebras associated to representations of affine and Virasoro algebra. Duke Math J, 1992, 66: 123–168

9 Frenkel I B, Jing N H. Vertex representations of quantum affine algebras. Proc Natl Acad Sci USA, 1988, 85: 9373–9377

10 Etingof P, Frenkel I B, Kirillov Jr A. Lectures on Representation Theory and Knizhnik-Zamolodchikov Equations. Mathematical Surveys and Monographs, vol. 58. Providence: Amer Math Soc, 1998

11 Frenkel E, Reshetikhin N. Towards deformed chiral algebras. In: Quantum Group Symposium. Sofia: Heron Press, 1997, 27–42

12 Etingof P, Kazhdan D. Quantization of Lie bialgebras, V: Quantum vertex operator algebras. Selecta Math (NS), 2000, 6: 105–130

13 Borcherds R. Quantum vertex algebras. In: Taniguchi Conference on Mathematics Nara' 98. Tokyo: Math Soc Japan, 2001, 51–74

14 Li H S. Nonlocal vertex algebras generated by formal vertex operators. Selecta Math (NS), 2005, 11: 349–397

15 Li H S. Constructing quantum vertex algebras. Internat J Math, 2006, 17: 441–476

16 Li H S. Modules-at-infinity for quantum vertex algebras. Comm Math Phys, 2009, 282: 819–864

17 Li H S. Quantum vertex $F((t))$-algebras and their modules. J Algebra, 2010, 324: 2262–2304

18 Li H S. $\hbar$-Adic quantum vertex algebras and their modules. Comm Math Phys, 2010, 296: 475–523

19 Li H S. ϕ-Coordinated quasi-modules for quantum vertex algebras. Comm Math Phys, 2011, 308: 703–741

20 Li H S. G-Equivariant ϕ-Coordinated quasi-modules for quantum vertex algebras. J Math Phys, 2013, 54: 1–26

21 Li H S, Tan S B, Wang Q. Twisted modules for quantum vertex algebras. J Pure Appl Algebra, 2010, 214: 201–220

22 Li H S. Local systems of vertex operators, vertex superalgebras and modules. J Pure Appl Algebra, 1996, 109: 143–195

23 Zamolodchikov A B, Zamolodchikov Al B. Factorized S-matrices in two dimensionals as the exact solutions of a certain relativistic quantum field theory models. Ann Physics, 1979, 120: 253–291

24 Faddeev L. Quantum completely integrable models in field theory. In: Soviet Science Review Series C: Mathematical Physics Review, vol. 1. Amsterdam: Hawood Academic Publisher, 1990, 107–155

25 Khoroshkin S, Tolstoy V. Yangian double. Lett Math Phys, 1996, 36: 373–402

26 Karel M, Li H S. Some quantum vertex algebras of Zamolodchikov-Faddeev type. Commun Contemp Math, 2009, 11: 829–863

27 Jiang C P, Li H S. Associating quantum vertex algebras to Lie algebra $\mathfrak{gl}_\infty$. J Algebra, 2014, 399: 1086–1106

28 Li H S, Tan S B, Wang Q. A certain Clifford-like algebra and quantum vertex algebras. Israel J Math, 2016, 216: 441–470

29 Anguelova I, Bergvelt M. H_D-Quantum vertex algebras and bicharacters. Commun Contemp Math, 2009, 11: 937–991

30 Drinfel'd V G. A new realization of Yangians and quantized affine algebras. Soviet Math Dokl, 1988, 36: 212–216

31 Borcherds R. Vertex algebras. In: Topological Field Theory, Primitive Forms and Related Topics (Kyoto, 1996). Progress in Mathematics, vol. 160. Boston: Birkhäuser, 1998, 35–77

32 Li H S. A new construction of vertex algebras and quasi modules for vertex algebras. Adv Math, 2006, 202: 232–286

33 Feingold A, Frenkel I B, Ries J F. Spinor Construction of Vertex Operator Algebras, Triality, and $E_8^{(1)}$. Providence: Amer Math Soc, 1991

34 Dong C, Lepowsky J. Generalized Vertex Algebras and Relative Vertex Operators. Progress in Mathematics, vol. 112. Boston: Birkhäuser, 1993

35 Lepowsky J, Li H S. Introduction to Vertex Operator Algebras and Their Representations. Progress in Mathematics, vol. 227. Boston: Birkhäuser, 2004

36 Bakalov B, Kac V. Field algebras. Int Math Res Not IMRN, 2003, 2003: 123–159

37 Li H S. Axiomatic G_1-vertex algebras. Commun Contemp Math, 2003, 5: 1–47

38 Li H S. Simple vertex operator algebras are nondegenerate. J Algebras, 2003, 267: 199–211

39 Hazewinkel M. Formal Groups and Applications. Pure and Applied Mathematics, vol. 78. London: Academic Press, 1978

40 Li H S. Local systems of twisted vertex operators, vertex superalgebras and twisted modules. In: Moonshine, the Monster, and Related Topics (South Hadley, MA, 1994). Providence: Amer Math Soc, 1996, 203–239

Quantum vertex algebras and quantum affine algebras

LI HaiSheng

Abstract In the general theory of vertex algebras, a basic open problem has been to develop a suitable theory of quantum vertex algebras so that quantum vertex algebras can be naturally associated to quantum affine algebras. Partially motivated by Etingof and Kazhdan's theory of quantum vertex operator algebras, since 2005 we have systematically developed and studied a theory of (weak) quantum vertex algebras and their ϕ-coordinated modules, and we have established natural connections of some celebrated algebras such as double Yangians with quantum vertex algebras. Especially, we have established a natural connection of quantum affine algebras with weak quantum vertex algebras. In this connection, weak quantum vertex algebras were associated theoretically, while the explicit structures are yet to be determined and we still need to prove that these are indeed quantum vertex algebras. To a certain extent, this provides a primary solution to the very open problem. On the other hand, with this theory being developed, it has been used to build natural connections of some important algebras with quantum vertex algebras, showing its high practical value. In this survey paper, we review the theory of (weak) quantum vertex algebras and their ϕ-coordinated modules, and summarize the main results in this development, including the association of quantum vertex algebras to Zamolodchikov-Faddeev algebras, centerless double Yangians, and quantum $\beta\gamma$-system.

Keywords quantum vertex algebra, quantum affine algebra, ϕ-coordinated module, quantum Yang-Baxter operator

MSC(2010) 17B69, 17B68

doi: 10.1360/N012017-00012