

规范场对偶荷的主丛结构

吴 詠 时

郭 汉 英

(中国科学院物理研究所)

(中国科学院高能物理研究所)

摘 要

在电磁场的规范理论中,磁单极 g (电荷的对偶荷)周围的电磁场的性质,可以用以 S^2 为底的非平凡 U_1 主丛 $P_D(S^2, U_1)$ ($D = 2eg$ 为整数)来描写. 本文讨论了非平凡主丛 $P_D(S^2, U_1)$ 的拓扑性质,及其作为 Riemann 流形的几何结构. 证明了 $P_D(S^2, U_1)$ 同构于 Hopf 丛 S^3/Z_D ; 在适当引入度规后,静止的单个磁单极的主丛 $P_D(S^2, U_1)$ 本身成为 S^3/Z_D .

此外,以 SU_2 规范场为例,考察了如何将对偶荷的概念推广到非 Abel 规范场的问题,讨论了相应的主丛的拓扑分类. 基于球上主丛的同伦分类理论,文中指出,第二陈类可用来表征 $S^4 \approx \overline{E^4}$ 上的 SU_2 整体规范场的拓扑分类(规范型),因而定义第二陈类为 SU_2 对偶荷. 文中还证明了,最小 SU_2 对偶荷的主丛 $P_1(S^4, SU_2)$ 同构于 Hopf 丛 S^7 , 适当引入度规则构成七维球 S^7 ; 相应的规范势恰好就是资料[7]的 O_3 不变的 SU_2 磁单极势,或者资料[8]中的 Yang-Mills 类粒子解.

我们采取的对主纤维丛的拓扑分类方法具有普遍性,可以推广到其它非 Abel 规范场的情形.

一、引 言

1. “对立统一规律是宇宙的根本规律.”在电磁现象中,正电和负电是一对矛盾,电与磁也是一对矛盾,那么,是否存在与电荷相对应的磁单极呢? 探讨研究这个古老而新颖的问题,显然具有一定的意义.

如果存在磁单极,不仅电荷的量子化容易得到解释,而且理解磁单极间极强的相互作用,对于我们了解强子构造和超强作用的本质,可能有所帮助.

假定空间一点存在磁单极 g , 用以 g 为中心、半径为 r 的 2-球 S^2 把 g 包围起来,于是,磁单极及其周围电磁场的性质,可由 S^2 为底、 U_1 为结构群的非平凡主丛 $P_g(S^2, U_1)$ 的结构来描写^[3].

我们将在第二节中讨论非平凡主丛 $P_g(S^2, U_1)$ 的拓扑性质,及其作为 Riemann 流形的几何结构. 主要结果是:

(1) 对于满足 Dirac 量子化条件的最小磁单极 $g = 1$ (以 $1/2e$ 为单位), 主丛 $P_1(S^2, U_1)$ 与 S^2 为底、 S^1 为纤维的 Hopf 丛 S^3 同构,适当引进群流形和丛上的度规,静止磁荷的主丛

$P_1(S^2, U_1)$ 构成 3 维球 S^3 .

(2) 对于 $g = D$ (整数) 的一般情形, 主丛 $P_D(S^2, U_1)$ 同构于 S^2 为底, U_1/Z_D 为纤维的丛 S^3/Z_D , 这里, Z_D 是 $|D|$ 阶循环群. 适当引进从上度规, 静止磁荷的主丛 $P_D(S^2, U_1)$ 本身就是 S^3/Z_D .

2. 在电磁场的 U_1 规范理论中, 磁单极不仅作为电荷的对偶荷, 而且给出电磁场的拓扑分类. 对于非 Abel 规范场, 如何引进相应的对偶荷与拓扑分类的概念? 相应的主丛又有什么特点? 我们以 SU_2 规范场为例探讨这些问题.

可以考虑相应于 SU_2 的 U_1 子群规范场的对偶荷^[3-6]. 对于这种情形下 U_1 子丛的结构, 本文第二节分析同样适用. 不过, 此时 U_1 子群的对偶荷并不能刻画 SU_2 规范场整体的拓扑分类.

最近, 资料[7]讨论了一种 O_3 不变的 SU_2 单极, 资料[8-9]给出了 SU_2 类粒子解, 都涉及到了整体拓扑分类问题. 显然, 这是另一种推广的途径. 我们将在第三节中讨论这种情形.

将包括 4 维欧氏空间 E^4 及其无穷远点在内的空间记为 $\bar{E}^4$, 考虑 $\bar{E}^4$ 上的 SU_2 规范场. 由于 $\bar{E}^4$ 同胚于 4 维球 S^4 , 因此, 我们所讨论的 SU_2 规范场的性质由以 S^4 为底、 SU_2 为结构群的主丛 $P(S^4, SU_2)$ 的结构描述.

我们的主要结果是: 4-球上 SU_2 规范场的拓扑分类由相应于第二陈类的对偶荷给出; 最小对偶荷的主丛 $P_1(S^4, SU_2)$ 同构于 Hopf 丛 $S^7 \rightarrow S^4$, 适当引进度规规则构成 7 维球 S^7 .

此外, 我们附带指出, 资料[7]的 O_3 不变的 SU_2 磁单极势就是资料[8]的类粒子解.

二、 U_1 磁单极与 Hopf 丛 S^3

1. 首先, 考虑主丛 $P_g(S^2, U_1)$ 的拓扑分类, 并引进度规结构.

取各自包含上、下半球的坐标邻域 V_1 与 V_2 覆盖 S^2 .

$$\begin{aligned} V_1: & 0 \leq \theta < \pi, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi; \\ V_2: & 0 < \theta \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi. \end{aligned} \quad (1)$$

在包含赤道 S^1 的重叠区 $V_1 \cap V_2$ 中的联接函数记为 S_{21} . 以 $\pi: P_g \rightarrow S^2$ 表示投影映射; 在子丛 $\pi^{-1}(V_i) \approx V_i \times U_1 (i = 1, 2)$ 上取局部坐标 $(\theta, \varphi; e^{i\alpha_i})$, 有

$$e^{i\alpha_2} = S_{21} e^{i\alpha_1}. \quad (2)$$

联接函数限制在赤道 S^1 上, 就给出映 S^1 及 S^1 上参照点 x_0 入 U_1 及其单位元素 e 的特征映射,

$$T = S_{21}|_{S^1}: (S^1, x_0) \rightarrow (U_1, e). \quad (3)$$

根据纤维丛理论^[1], 有分类定理: 主丛 P_g 的等价类(即规范型), 由 T 的映射度 D ^[2] 确定 (D 为整数), 且

$$\begin{aligned} D &= \frac{1}{2\pi} \int_{S^1} T^* d\alpha = \frac{1}{2\pi i} \int_{S^1} \partial_\mu \ln S_{21} dx^\mu \quad (x^\mu = \theta, \varphi) \\ &= \frac{e}{2\pi} \int_{S^1} (A_\mu^{(1)} - A_\mu^{(2)}) dx^\mu = \frac{e}{4\pi} \int_{S^2} F_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu \\ &= 2eg, \end{aligned} \quad (4)$$

即此映射度等于第一陈类. 显然, (4) 式即 Dirac 量子化条件.

由分类定理及(4)式,主丛 $P_D(S^2, U_1)$ 的拓扑性质只取决于 S^2 所包围的磁荷数,不依赖于其中磁荷的分布及其运动状态.

按如下方式在主丛 P_g 上引进度规:将 P_g 上任一点 u 的切空间 T_u 分解为水平子空间 H_u 与垂直子空间 V_u 的直和;在 T_u 上定义内积,假定在此内积的意义上 H_u 与 V_u 正交,则 P_g 有度量

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + G_{11} \omega \bar{\omega}, \quad \omega = i(da + eA_\mu dx^\mu) \quad (5)$$

这里, $g_{\mu\nu}$ 是底 S^2 的度量, G_{11} 是 U_1 群流形的度量, ω 为主丛上的联络1-形式,取值在 U_1 的李代数上,且满足 $\omega(X) = 0, \forall X \in H_u^{[10]}$.

显然,度量(5)刻划了主丛 P_g 的 Riemann 几何^[11].

2. 最小磁荷的情形. 此时 $D = 1$,满足(4)式的联接函数可取为^[3]:

$$S_{21} = S_{12}^{-1} = e^{i\varphi}. \quad (6)$$

我们将指出,主丛 $P_1(S^2, U_1)$ 的拓扑是3-球 S^3 ,并与 Hopf 丛 S^3 同构;而且,若按上面方式引进度规, P_1 本身构成 S^3 . 因此,整个主丛的结构具有 S^3 的不变性.

将 S^3 表示为满足:

$$z_1 \bar{z}_1 + z_2 \bar{z}_2 = R^2 \quad (7)$$

的复数对 (z_1, z_2) 的空间,定义映射 $f: P_1 \rightarrow S^3$,

$$f(\theta, \varphi; e^{ia_i}) = \begin{cases} \left(R \sin \frac{\theta}{2} e^{i(\varphi+a_1)}, & R \cos \frac{\theta}{2} e^{ia_1} \right), & \text{在 } \pi^{-1}(V_1) \text{ 中,} \\ \left(R \sin \frac{\theta}{2} e^{ia_2}, & R \cos \frac{\theta}{2} e^{-i(\varphi-a_2)} \right), & \text{在 } \pi^{-1}(V_2) \text{ 中,} \end{cases} \quad (8)$$

不难验证 f 是同胚映射,因此 P_1 同胚于 S^3 .

Hopf 丛^[1] S^3 是以 S^2 为底, U_1 为结构群的主丛,具有投影 $h: S^3 \rightarrow S^2, h((z_1, z_2)) = [z_1, z_2]$,这里 $[z_1, z_2]$ 是 S^2 作为复射影直线的齐次坐标;以及坐标(同胚)映射 $\phi_i: V_i \times U_1 \rightarrow h^{-1}(V_i)$ ($i = 1, 2$),

$$\phi_i(z, e^{ia_i}) = \begin{cases} \left(\frac{R}{r} \sigma^{-\frac{1}{2}} e^{ia_1} z, & R \sigma^{-\frac{1}{2}} e^{ia_1} \right), & \text{在 } h^{-1}(V_1) \text{ 中,} \\ \left(R \tilde{\sigma}^{-\frac{1}{2}} e^{ia_2}, & \frac{R}{r} \tilde{\sigma}^{-\frac{1}{2}} e^{ia_2} \tilde{z} \right), & \text{在 } h^{-1}(V_2) \text{ 中.} \end{cases} \quad (9)$$

其中 $z/r = z_1/z_2, \tilde{z}/r = (z/r)^{-1}, \sigma = 1 + z\bar{z}/r^2, \tilde{\sigma} = 1 + \tilde{z}\bar{\tilde{z}}/r^2$,且 r 是 S^2 的半径. 显然, h 将 S^3 上所有 $(z_1 e^{ia}, z_2 e^{ia})$ ($0 \leq \alpha < 2\pi$)的点映为 S^2 上同一点 $[z_1, z_2]$,因此,投影 h 定义的纤维 $h^{-1}([z_1, z_2])$ 是 S^3 上的大圆 S^1 .

取 S^2 上 V_1, V_2 中的坐标分别为以南极或北极为中心的测地投影坐标 $(x_1, x_2), (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$:

$$\begin{aligned} z_1 &= x_1 + ix_2, & \tilde{z} &= \tilde{x}_1 - i\tilde{x}_2; \\ x_1 &= r \sin \theta \cos \varphi (1 + \cos \theta)^{-1}, & x_2 &= r \sin \theta \sin \varphi (1 + \cos \theta)^{-1}; \\ \tilde{x}_1 &= r \sin \theta \cos \varphi (1 - \cos \theta)^{-1}, & \tilde{x}_2 &= r \sin \theta \sin \varphi (1 - \cos \theta)^{-1}. \end{aligned} \quad (10)$$

易证映射 $f: P_1 \rightarrow S^3$ 就是 Hopf 坐标映射 ϕ_i . 因此,主丛 $P_1(S^2, U_1)$ 与 Hopf 丛 S^3 同构.

将底空间 S^2 与群流形 S^1 的度规分别取为:

$$g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2), \quad (11)$$

$$G_{11} = 4r^2. \quad (11')$$

由于单个静止最小磁单极的电磁势为^[3]:

$$\begin{aligned} V_1: \quad A_\varphi^{(1)} &= \frac{1}{2} (1 - \cos \theta), \quad \text{其余为 } 0, \\ V_2: \quad A_\varphi^{(2)} &= -\frac{1}{2} (1 + \cos \theta), \quad \text{其余为 } 0, \end{aligned} \quad (12)$$

则由 (5) 式, 可构造主丛 P_1 上的度规:

$$ds^2 = \begin{cases} r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) + 4r^2 \left(d\alpha_1 + \frac{1}{2} (1 - \cos \theta) d\varphi \right)^2, & \text{在 } \pi^{-1}(V_1) \text{ 中;} \\ r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) + 4r^2 \left(d\alpha_2 - \frac{1}{2} (1 + \cos \theta) d\varphi \right)^2, & \text{在 } \pi^{-1}(V_2) \text{ 中.} \end{cases} \quad (13)$$

参照 (8) 式, 取坐标变换:

$$(z_1, z_2) = \begin{cases} \left(R \sin \frac{\theta}{2} e^{i(\varphi + \alpha_1)}, R \cos \frac{\theta}{2} e^{i\alpha_1} \right), & \text{在 } \pi^{-1}(V_1) \text{ 中,} \\ \left(R \sin \frac{\theta}{2} e^{i\alpha_2}, R \cos \frac{\theta}{2} e^{-i(\varphi - \alpha_2)} \right), & \text{在 } \pi^{-1}(V_2) \text{ 中,} \end{cases} \quad (14)$$

则 (13) 式在整个主丛上化为:

$$ds^2 = \left(\frac{2r}{R} \right)^2 (dz_1 d\bar{z}_1 + dz_2 d\bar{z}_2). \quad (15)$$

显然, 若取 $R = 2r$, 此式就是 3-球 S^3 [(7) 式] 的度规. 因此, 按上节方式引入度规, 主丛 P_1 本身构成 S^3 .

3. 再讨论 $g = D$ 的一般情形.

满足 (4) 式的联接函数可取为^[3]:

$$S_{21} = S_{12}^{-1} = e^{iD\varphi}. \quad (16)$$

定义主丛 $P_D(S^2, U_1)$ 到 S^3 中的映射 $f_D: P_D \rightarrow S^3$ 为

$$f_D(\theta, \varphi; e^{i\alpha_i}) = \begin{cases} \left(R \sin \frac{\theta}{2} e^{i(\varphi + \frac{\alpha_1}{D})}, R \cos \frac{\theta}{2} e^{i\frac{\alpha_1}{D}} \right), & \text{在 } \pi^{-1}(V_1) \text{ 中,} \\ \left(R \sin \frac{\theta}{2} e^{i\frac{\alpha_2}{D}}, R \cos \frac{\theta}{2} e^{-i(\varphi - \frac{\alpha_2}{D})} \right), & \text{在 } \pi^{-1}(V_2) \text{ 中.} \end{cases} \quad (17)$$

由 (2) 与 (16) 式知, 对于主丛 P_D 上在 $\pi^{-1}(V_1)$ 和 $\pi^{-1}(V_2)$ 相重叠的区域中的点, (17) 式右边两行是 S^3 上同一点的坐标; 即映射是一一的.

对于 U_1 群, α_1 或 α_2 的取值范围是 $0 \leq \alpha_1, \alpha_2 < 2\pi$. 当 $|D| \neq 1$ 时, (17) 式所定义的映射 f_D 在 α_1 或 $\alpha_2 = 0$ 处是不连续的. 为解决这个问题, 我们注意到在映射 f_D 下, 主丛 P_D 的象 $f_D(P_D)$ 实际上不是 S^3 上所有的点, 只是 S^3 上的一个子集; 该子集可作为商空间 S^3/Z_D 的代表点. 这里 Z_D 是由复数 $\{e^{i2m\pi/D}\}$ ($m = 0, 1, \dots, |D| - 1$) 组成的 $|D|$ 阶循环群, 它对 S^3 的作用是把点 (z_1, z_2) 变为点 $(\lambda z_1, \lambda z_2)$, $\lambda \in Z_D$. 在 Hopf 投影 h 下, $S^3/Z_D \rightarrow S^2$ 可表为以 S^2 为底、 U_1/Z_D 为纤维的主丛. 但 U_1/Z_D 实际上同构于 U_1 , 因此, 若把 (17) 式右边看作 S^3/Z_D 的代表点, 则它定义了一个由主丛 $P_D(S^2, U_1)$ 到主丛 S^3/Z_D 上的处处光滑的映射,

$$f_D: P_D(S^2, U_1) \rightarrow S^3/Z_D. \quad (18)$$

不难验证, 实际上它是这两个主丛间的同构映射. 换言之, 主丛 P_D 同构于 S^3/Z_D .

为在主丛 P_D 上引入度量,取底空间 S^2 的度量 (11) 式,而将群 U_1/Z_D 的度量取为:

$$G_{11} = 4r^2/D^2. \quad (19)$$

$g = D$ 的静止磁单极的电磁势表达式是 (12) 式右边乘一因子 D . 把这些公式带入 (5) 式,并在主丛 P_D 上作如下坐标变换: (14) 式右边的 α_1 与 α_2 换成 α_1/D 与 α_2/D , 则同样可得 (15) 式. 因此,以上述方式引入主丛上的度量, $P_D(S^2, U_1)$ 本身成为 S^3/Z_D (S^3 的半径为 $2r$).

我们知道, U_1/Z_D 可看作把 U_1 的群流形 S^1 剪开绕 $|D|$ 圈后再粘上; 亦即 U_1 是 U_1/Z_D 的覆盖空间, 其覆盖次数为 $|D|$ (这样就容易理解 U_1/Z_D 的度量 (19) 式为什么比 U_1 的度量 (11') 式小 D^2 倍, 这是由于 U_1/Z_D 的半径要比 U_1 的半径小 $|D|$ 倍). 同样, 主丛 S^3/Z_D 与 Hopf 丛 S^3 有同样的底空间 S^2 , 不过前者的纤维相当于把后者的纤维拿来绕了 $|D|$ 圈. 因此, 主丛 $P_D(S^2, U_1)$ 以 Hopf 丛 S^3 为普适覆盖空间, 覆盖次数为 $|D|$. 这个结论在引入 Riemann 度量后也是对的.

关于这里得到的磁单极 U_1 主丛的结构, 物理上有什么推论, 我们将另文论述.

三、 SU_2 对偶荷与 Hopf 丛 S^3

1. 首先讨论主丛 $P(S^4, SU_2)$ 的拓扑分类, 从而引入 SU_2 规范场的对偶荷.

将 S^4 用各自包含上、下半球的坐标邻域 V_+ 与 V_- 覆盖. 在赤道重叠区 $V_+ \cap V_-$ 中定义联接函数

$$S_{-+} = S_{+-}^{-1}: V_- \cap V_+ \rightarrow SU_2. \quad (20)$$

限制在赤道 S^3 上的联接函数, 给出将 S^3 及其上参照点 x_0 映入 SU_2 及其单位元素的特征映射,

$$T = S_{-+}|_{S^3}: (S^3, x_0) \rightarrow (SU_2, e). \quad (21)$$

根据球上纤维丛的分类理论^[1], 有定理: 主丛 $P(S^4, SU_2)$ 的等价类唯一地决定于映射 T 的映射度^[2],

$$\begin{aligned} D &= \frac{1}{16\pi^2} \int_{S^3} T^* \sigma' \\ &= - \frac{1}{24\pi^2} \int_{S^3} Sp(T^{-1} \partial_\mu T \cdot T^{-1} \partial_\nu T \cdot T^{-1} \partial_\rho T) dx_\mu^\alpha dx_\nu^\beta dx_\rho^\gamma \end{aligned} \quad (22)$$

(σ' 是 SU_2 的体积元). 而映射度与 SU_2 规范场强 $F_{\mu\nu}$ 的第二陈类 C_2 (或第一 Pontrjagin 类 P_1)^[12],

$$C_2 = \frac{1}{32\pi^2} \int_{S^4} Sp(F_{\mu\nu} F_{\rho\sigma}) dx_\mu^\alpha dx_\nu^\beta dx_\rho^\gamma dx_\sigma^\delta \quad (23)$$

之间的关系是:

$$C_2 = -P_1 = D. \quad (24)$$

因此, S^4 上 SU_2 主丛的等价类 (SU_2 规范场的规范型) 由特征映射度或第二陈类给出. $D = C_2$ 可定义为 SU_2 对偶荷数.

仿照上一节, 在主丛 $P_D(S^4, SU_2)$ 上可引进度规

$$dS^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + G_{ab} \omega^a \omega^b \quad (\mu, \nu = 0-3; a, b = 1-3), \quad (25)$$

其中 $g_{\mu\nu}$ 与 G_{ab} 分别是底空间 S^4 与群流形 SU_2 上的度规, ω 是 $P_D(S^4, SU_2)$ 上的联络 1-形式, 与通常 SU_2 规范势

$$B_\mu = B_\mu^a \frac{\sigma_a}{2i} \quad (26)$$

之间的关系为:

$$\omega = \omega^a \frac{\sigma_a}{2i} = M^{-1} dM + M^{-1} B_\mu dx^\mu M, \quad M \in SU_2 \quad (27)$$

($\frac{\sigma_a}{2i}$ 是 SU_2 李代数的生成元, σ_a 是 Pauli 矩阵).

2. 最小对偶荷 $|D| = 1$ 的情形.

首先, 构造主丛 $P_1(S^4, SU_2)$. 我们将半径为 r 的 4-球 S^4 上的点用 4 元数 $q = x^a e_a$ (见附录) 来表示, 其中 x^a 是以南极为中心的测地投影坐标

$$\begin{aligned} x^a &= r\eta^a(r + \eta^4)^{-1} \quad (\alpha = 0-3), \\ (\eta^0)^2 + (\eta^1)^2 + (\eta^2)^2 + (\eta^3)^2 + (\eta^4)^2 &= r^2. \end{aligned} \quad (28)$$

同时, 群 SU_2 的元素可表为么模 4 元数 λ (见附录). $D = 1$ 的联接函数取为:

$$S_{-+} = q/|q|: V_+ \cap V_- \rightarrow SU_2. \quad (29)$$

以 $\pi: P_1 \rightarrow S^4$ 表投影. 在子丛 $\pi^{-1}(V_\pm) \approx V_\pm \times SU_2$ 上取局部坐标 $(q; \lambda_\pm)$, 则 (29) 式表明在 $V_+ \cap V_-$ 中, 当且仅当

$$\lambda_- = S_{-+} \lambda_+ = \frac{q}{|q|} \cdot \lambda_+ \quad (30)$$

时, $(q; \lambda_-)$ 与 $(q; \lambda_+)$ 表 P_1 上的同一点.

我们来证明, 这样构造的主丛同胚于 7 维球 S^7 . 将 S^7 表为满足

$$q_1 \bar{q}_1 + q_2 \bar{q}_2 = R^2 \quad (31)$$

的 4 元数对 (q_1, q_2) 的空间. 定义映射 $f: P_1 \rightarrow S^7$:

$$f(q; \lambda_\pm) = \begin{cases} \left(\frac{R}{r} \sigma^{-\frac{1}{2}} q \lambda_+, R \sigma^{-\frac{1}{2}} \lambda_+ \right), & \text{在 } \pi^{-1}(V_+) \text{ 中,} \\ \left(\frac{R}{r} \sigma^{-\frac{1}{2}} |q| \lambda_-, R \sigma^{-\frac{1}{2}} |q| q^{-1} \lambda_- \right), & \text{在 } \pi^{-1}(V_-) \text{ 中,} \end{cases} \quad (32)$$

其中 $\sigma = 1 + q\bar{q}/r^2$. 考虑到联接函数的性质 (30) 式, f 是一一映射. 此外, f 及其逆显然连续, 因而 f 是 P_1 到 S^7 上的同胚映射.

另一方面, S^7 可纤维化为 S^4 为底, $S^3 \approx SU_2$ 为纤维的主丛, 即 Hopf 丛 $S^7 \rightarrow S^4^{(1)}$. 它具有投射 $h: S^7 \rightarrow S^4$

$$h((q_1, q_2)) = q_1 q_2^{-1} = q/r, \quad (33)$$

以及坐标映射 $\phi_\pm: V_\pm \times SU_2 \rightarrow h^{-1}(V_\pm)$. 通常, 坐标映射取为 (32) 式右边的形式. 显然, 映射 f 实际上给出了主丛 $P_1(S^4, SU_2)$ 与 Hopf 丛 $S^7 \rightarrow S^4$ 之间的丛同构关系.

我们知道, S^7 上有度量

$$dS^2 = dq_1 d\bar{q}_1 + dq_2 d\bar{q}_2, \quad (34)$$

利用 Hopf 坐标映射 (32) 式, 可将度量为 (例如在 $\pi^{-1}(V_+)$ 中):

$$dS^2 = \frac{R^2}{r^2} \sigma^{-2} dq d\bar{q} + R^2 \omega \bar{\omega}, \quad (35)$$

$$\omega = \omega^{(+)} = \lambda d\lambda + \bar{\lambda} B_\mu^{(+)} dx^\mu \lambda,$$

$$B_{\mu}^{(+)} dx^{\mu} = \frac{1}{2r^2\sigma} (\bar{q}dq - d\bar{q}q). \quad (36)$$

与(25)式比较,(35)式表明从 S^7 上的度量自然分解为表示底流形度量的第一项,以及与群流形度量(R^2 有关)的第二项. 由于底为 S^4 , 故应取

$$R = 2r, \quad (37)$$

则第一项成为半径为 r 的 S^4 的度量. 反之, 如果取最小对偶荷规范势为(36)式所示, 并按照(25)式的方式引进度规, 并取 $G_{ab} = r^2\delta_{ab}$, 则主丛 $P_1(S^4, SU_2)$ 本身构成 S^7 .

$D = -1$ 的情形与上相似, 不过从(29)式起所有的 q 都换为 $\bar{q} = x^a \bar{e}_a$. (36)式的规范势变为:

$$B_{\mu}^{(-)} dx^{\mu} = \frac{1}{2r^2\sigma} (qd\bar{q} - d\bar{q}q). \quad (36')$$

除此之外, 其它结论是一样的.

3. 可以证明, 我们得到的最小对偶荷的势就是资料[8]的类粒子解和资料[7]的 O_2 不变的 SU_2 单极的势.

将(36), (36')式改写为:

$$B_{\mu}^{(\pm)} dx^{\mu} = \frac{1}{r^2\sigma} e_{\mu\nu}^{(\pm)} x^{\nu} dx^{\mu}, \quad (38)$$

其中

$$e_{ii}^{(\pm)} \equiv e_{ijk} e_k, \quad e_{0j}^{(\pm)} \equiv \pm e_j, \quad (i, j, k = 1-3). \quad (39)$$

利用 4 元数基底与 Pauli 矩阵 σ_i 的关系(A4), 立即可以得到:

$$B_{\mu}^{(\pm)} dx^{\mu} = -\frac{2i}{r^2\sigma} \sigma_{\mu\nu}^{(\pm)} x^{\nu} dx^{\mu},$$

$$\sigma_{ij}^{(\pm)} = \frac{1}{4i} [\sigma_i, \sigma_j] = \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \sigma_k, \quad \sigma_{0i}^{(\pm)} = \pm \frac{1}{2} \sigma_i. \quad (40)$$

这就是资料[9]给出资料[8]的类粒子解的另一种形式.

在 S^4 上取坐标 (θ, ξ^i) ($i = 1-3$)^[7], 满足

$$x^0 = \frac{r \sin \theta}{1 + \cos \theta} \frac{1 - \rho^2}{1 + \rho^2},$$

$$x^i = \frac{r \sin \theta}{1 + \cos \theta} \frac{2\xi^i}{1 + \rho^2}, \quad (41)$$

这里 $\rho^2 = (\xi^1)^2 + (\xi^2)^2 + (\xi^3)^2$. 于是, 由(38)式可以得到

$$b_{\theta}^{(\pm)a} = 0, \quad b_k^{(\pm)a} = \frac{1 - \cos \theta}{(1 + \rho^2)^2} (4\epsilon_{aki} \xi^i \pm 4\xi_a \xi_k \pm 2\delta_{ak}(1 - \rho^2)), \quad \text{在 } V_+ \text{ 中},$$

$$b_{\theta}^{(\pm)a} = 0, \quad b_k^{(\pm)a} = \frac{1 + \cos \theta}{(1 + \rho^2)^2} (4\epsilon_{aki} \xi^i \mp 4\xi_a \xi_k \mp 2\delta_{ak}(1 - \rho^2)), \quad \text{在 } V_- \text{ 中}. \quad (42)$$

这就是资料[7]给出的 O_2 不变的 SU_2 单极子的势.

4. 最后, 我们指出:

(1) 对于 SU_2 的子空间所相应的规范场的拓扑性质, 并不仅仅限于在引言中所指出的讨论 U_1 子丛及其分类的问题, 例如, 可以讨论以 S^4 为底, 以 $S^2 = SU_2/U_1$ 为纤维的球丛的拓扑性质, 事实上, 这种丛有无穷多等价类. 它们的物理意义值得研究.

(2) 对于主从 $P_D(S^4, SU_2)$ 的结构, 我们只讨论了 $|D| = 1$ 的情形, 对 $|D| \neq 1$ 的一般情形, 涉及的问题较多, 但所用的方法是一致的。

(3) 无论是子空间所对应的规范场的整体性质, 还是 SU_2 自身规范场的整体性质, 都只取决于丛的特征映射度所确定的示性类(对偶荷), 而与规范场的运动状态无关。

(4) 我们采取的纤维丛拓扑分类的方法具有一般性, 可以推广到任意非 Abel 规范场的情形, 例如弱-电磁统一的规范场理论, 重力规范理论等等。

附 录

群 SU_2 及其李代数与 4 元数的关系

考虑如下形式的 2×2 方阵

$$M = \begin{pmatrix} a_0 - ia_3 & -a_2 - ia_1 \\ a_2 - ia_1 & a_0 + ia_3 \end{pmatrix}, \quad (A1)$$

其中 $a_\alpha (\alpha = 0 - 3)$ 为任意实数。与每个 M 相应, 可定义一 4 元数

$$M \mapsto q(M) = a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k = a^\alpha e_\alpha. \quad (A2)$$

其中 $e_0 = 1, e_1, e_2, e_3$ 是 4 元数的三个纯虚单位。容易验证, 映射 (A2) 式具有如下性质:

$$\begin{aligned} q(M_1 + M_2) &= q(M_1) + q(M_2), & q(aM) &= aq(M), \\ q(M_1 \cdot M_2) &= q(M_1) \cdot q(M_2), & \overline{q(M)} &= q(M^+). \end{aligned} \quad (A3)$$

其中 a 为实数, $\bar{q}$ 表示 q 的共轭 4 元数, M^+ 表示 M 的厄米共轭。

当 $a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 1$ 时, 矩阵 (A1) 是 SU_2 矩阵, 而相应的 4 元数 (A2) 式的模为 1。由 (A3) 式, 映射 (A2) 给出 SU_2 群与么模 4 元数群之间的同构。

当 $a_0 = 0$ 时, 矩阵 (A1) 是 SU_2 的李代数的元素, 而相应的 4 元数 (A2) 式是纯虚 4 元数。由 (A3) 式, 映射 (A2) 给出 SU_2 李代数与纯虚 4 元数李代数之间的同构。特别是 SU_2 的生成元 $\sigma_k/2i$ 对应于纯虚单位 $e_k/2$:

$$\sigma_k/2i \mapsto e_k/2 \quad (k = 1, 2, 3). \quad (A4)$$

这样, 由上述同构关系, SU_2 群及其李代数都可以用 4 元数来表示。

参 考 资 料

- [1] Steenrod, N., *The Topology of Fibre Bundles*, Princeton Univ., Princeton, New Jersey, 1951.
- [2] Greub, W., Halperin, S. & Vanstone, R., *Connections, Curvature & Cohomology*, Vol. 1, Academic Press, New York & London, 1972.
- [3] Wu, T. T. & Yang, C. N., *Phys. Rev.*, **D12** (1975), 3845.
- [4] 'tHooft, G., *Nucl. Phys.*, **B79** (1974), 276.
- [5] 李华钟、洗鼎昌、郭硕鸿, 中山大学学报, 自然科学版, 1975, 3, 1.
- [6] 侯伯宇、段一士、葛墨林, 兰州大学学报, 自然科学版, 1975, 2, 26.
- [7] 杨振宁, O_3 不变的 SU_2 磁单极, 1976 年 4 月在北京科学会堂的报告.
- [8] Belavin, A. A., Polyakov, A. M., Schwartz, A. S. & Tyupkin, Ya. S., *Phys. Lett.*, **59B** (1975), 85.
- [9] Jackiw, R. & Rebbi, C., *Phys. Rev.*, **D14** (1976), 517.
- [10] Kobayashi, S. & Nomizu, K., *Foundations of Differential Geometry*, Vol. I, Wiley (Interscience), New York, 1963.
- [11] Cho, Y. M., *J. Math. Phys.*, **16** (1975), 2029; Chang, L. N., et al., *Phys. Rev.*, **D13** (1976), 235.
- [12] Kobayashi, S. & Nomizu, K., *Foundations of Differential Geometry*, Vol. II, Wiley (Interscience), New York, 1969.