



论 文

脉冲噪声滤波的无监督鲁棒递归最小二乘方法

陈杰^{①②}, 马韬^{①②③*}, 陈文颀^{①②}, 彭志红^{①②}

① 北京理工大学自动化学院, 北京 100081

② 复杂系统智能控制与决策教育部重点实验室, 北京 100081

③ 中国科学院电工研究所应用超导重点实验室, 北京 100190

* 通信作者. E-mail: matao@bit.edu.cn

收稿日期: 2010-09-14; 接受日期: 2011-05-27

国家杰出青年科学基金 (批准号: 60925011) 资助项目

摘要 在未知期望信号的条件下, 提出一种能够抑制脉冲噪声的鲁棒递归最小二乘自适应滤波方法. 与传统最小二乘法的代价函数不同, 通过引入饱和非线性约束, 降低可能出现的脉冲噪声对滤波器权值更新的影响. 此外, 提出一种多步预测器来重构滤波器的输入信号, 通过比较判断滤波器输入信号可能受到脉冲噪声干扰时, 采用预测值来替代原始观测信号. 实验结果表明, 提出的无监督鲁棒递归最小二乘自适应滤波方法在未受到脉冲噪声干扰时与传统的递归最小二乘法具有相近的收敛性能; 在脉冲噪声条件下, 传统递归最小二乘法和其他的无监督自适应滤波方法性能都变得很差, 但本文提出的方法几乎未受到脉冲噪声的影响.

关键词 无监督自适应滤波 脉冲噪声抑制 递归最小二乘 FIR 滤波器 预测

1 引言

从时间序列中提取有用信息是通信、控制与信号处理领域非常重要的研究方向. 观测信号通常包含噪声, 其可分为系统内部的随机噪声和外部干扰引入的脉冲噪声. 传统的自适应滤波要求已知期望信号, 且对脉冲噪声较为敏感^[1]; 而设计鲁棒滤波器需已知系统模型^[2,3], 这在很多情况下都无法实现.

脉冲噪声的产生较为随机, 表现出非平稳特性, 难以通过统计的方式来预测其行为^[4], 目前尚没有能够准确描述脉冲噪声特性的模型^[5]. 严重的情况下, 脉冲噪声可能持续较长时间, 使得设计的线性预测器性能急剧变差^[6]. 非线性方法, 如限幅器, 可以在一定程度上降低脉冲噪声的影响, 但若信号非平稳且变化较快, 则静态的限幅器反而会导致滤波器性能变差^[7].

中值滤波被应用在最小均方算法与递归最小二乘算法 (recursive least-squares, RLS) 中, 以降低脉冲噪声对滤波器权值更新的影响, 但该方法会干扰原始信号^[8]. Chan 等针对脉冲噪声的抑制, 提出递归最小 M 估计器方法, 但该方法仅适用于已知期望信号的系统辨识^[4,9,10]. Vega 等通过限制权值更新过程, 提出鲁棒自适应滤波器的设计方法, 但该方法要求已知期望信号, 且仅能处理时不变系统辨识^[11~13].

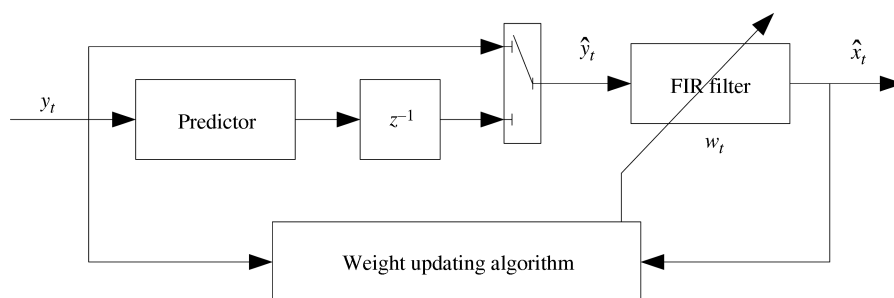


图 1 UR-RLS 滤波器结构

Figure 1 Scheme of the UR-RLS filter

无监督自适应滤波是针对期望信号未知时系统辨识而提出,但其需利用期望信号的概率分布^[14,15]. 基于线性最小二乘预测的通用滤波器^[16],在线梯度下降法^[17]和最小均方误差法(minimum mean-square error, MMSE)^[18,19]等均不要求已知期望信号的统计特性,其仅假设噪声为加性零均值有界信号.但这些无监督形式的自适应滤波方法对脉冲噪声均非常敏感.

根据文献[18]提出的无监督自适应滤波框架,本文提出对脉冲噪声不敏感的无监督鲁棒递归最小二乘算法(unsupervised robust recursive least-squares, UR-RLS).一方面,UR-RLS将RLS方法拓展至未知期望信号条件下的应用,通过引入饱和非线性函数,降低了脉冲噪声对采用RLS算法的有限脉冲响应(finite impulse response, FIR)滤波器权值更新过程的影响.另一方面,UR-RLS将无监督自适应滤波方法拓展至输入信号包含脉冲噪声的情形,其通过构造多步自适应预测器(multi-step adaptive predictor, MAP)剔除可能包含脉冲噪声的样本.

2 滤波器描述

考虑如下形式的加性信号:

$$y_t = x_t + v_t, \quad t = 1, 2, \dots, \quad (1)$$

其中, $\{y_t\}_{t \geq 1}$ 为观测信号, $\{x_t\}_{t \geq 1}$ 为待估计的实值真实信号. 加性噪声 v_t 可以分为两部分: 背景噪声 b_t 和脉冲噪声 n_t . 背景噪声 $\{b_t\}_{t \geq 1}$ 假设为独立同分布的高斯信号, 满足 $b_t \sim N(0, \sigma_b^2)$. 若 $B_B = 3\sigma_b^2$, 则 $|b_t| \leq B_B$ 以不小于 99.74% 的概率存在. 此外, 假设 x_t 有界, 即对给定的某正实数 $B_X < \infty$, 满足 $|x_t| \leq B_X$. 由上可得, $v_t = b_t + n_t$.

如图 1 所示, 提出的 UR-RLS 滤波器结构包括以下 3 个部分:

- 1) FIR 滤波器: 阶数为 d 的线性横向滤波器.
- 2) 权值更新算法: 用于 FIR 滤波器权值更新的无监督算法.
- 3) 预测器: 由信号 $\{y_i\}_{i=1}^t$ 和预测值 $\{\hat{y}_{t+i|t}\}_{i=1}^{k-1}$, 估计 $\hat{y}_{t+k|t} (k \geq 1)$.

注 1 将预测器输出 $\hat{y}_{t|t-1}$ 与观测信号 y_t 进行比较, 则有如下算法:

$$\hat{y}_t = \begin{cases} y_t, & |y_t - \hat{y}_{t|t-1}| \leq \xi, \\ \hat{y}_{t|t-1}, & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (2)$$

如果 $|\hat{y}_{t|t-1} - y_t|$ 大于某一设定阈值 ξ , 则用 $\hat{y}_{t|t-1}$ 代替 FIR 滤波器的输入 y_t , 以避免脉冲噪声进入滤波器. 如果脉冲噪声持续超过一个采样周期, 则由多步形式的 MAP 进行处理. 固定的 ξ 会导致滤波

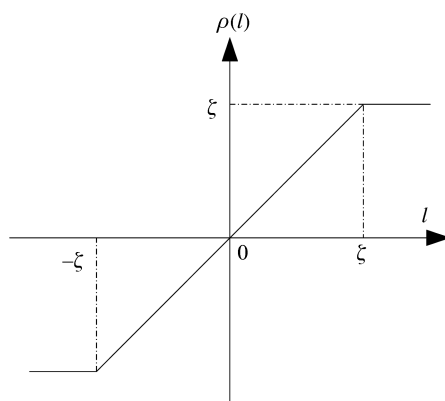


图 2 饱和非线性函数

Figure 2 Saturable nonlinear function

器在对噪声的灵敏度和信号的置信度之间做折中: 较小的 ξ 能够使得滤波器较好的抑制脉冲噪声, 但却可能将有用的信号也剔除; 而较大的 ξ 会导致脉冲噪声部分进入滤波器. 在本文的研究中, 构造了时变的 $\{\xi_t\}$.

3 无监督权值更新算法

令 $\mathbf{w}_t = [w_t, w_{t-1}, \dots, w_{t-(d-1)}]^T \in \mathbb{R}^d$ 和 $\mathbf{y}_t = [y_t, y_{t-1}, \dots, y_{t-(d-1)}]^T \in \mathbb{R}^d$ 分别表示 t 时刻的延迟权值向量和输入向量, 其中 $(\cdot)^T$ 为转置. 当向量中元素角标小于 0 时, 令其值为 0. 此外, 令 $\mathbf{c} = [\sigma_b^2, 0, \dots, 0]^T \in \mathbb{R}^d$ 表示背景噪声向量, $\|\cdot\|$ 为向量的欧氏范数, $|\cdot|$ 表示标量的绝对值, $(\cdot)^*$ 为最优值.

定义 1 对任意 $i, t \geq 1$ 与 $\mathbf{w}_t \in \mathbb{R}^d$, 令 $l_i(\mathbf{w}_t) \triangleq (y_i - \mathbf{w}_t^T \mathbf{y}_i)^2 + 2\mathbf{w}_t^T \mathbf{c}$. 根据传统 RLS 算法的代价函数^[1], 定义如下形式的 UR-RLS 算法代价函数:

$$L_\rho(\mathbf{w}_t) \triangleq \sum_{i=1}^t \lambda^{t-i} \rho(l_i(\mathbf{w}_t)) + \delta \lambda^t \|\mathbf{w}_t\|^2, \quad (3)$$

其中遗忘因子 λ 为接近 1, 但又小于 1 的正常数; δ 是一个正实数, 称为正则化参数; $\rho(\cdot)$ 为饱和非线性函数. 通过正则化项 $\delta \lambda^t \|\mathbf{w}_t\|^2$ 的平滑作用可以稳定 RLS 算法的解.

注 2 通过引入饱和非线性函数 $\rho(\cdot)$ 代替文献 [18] 中滤波器代价函数的对应项, 可以抑制脉冲噪声对权值更新过程的影响.

图 2 表示如下非线性函数:

$$\rho(l) = \begin{cases} l, & |l| < \zeta, \\ \text{sgn}(l)\zeta, & \text{otherwise,} \end{cases} \quad (4)$$

式中 $\text{sgn}(\cdot)$ 表示符号函数, ζ 为阈值. 若 $|l|$ 的值小于阈值 ζ , 则 UR-RLS 转变为文献 [18] 提出的通用滤波器 (universal FIR MMSE adaptive filtering, UAF); 若 $|l| \geq \zeta$, 则 $\rho(\cdot)$ 为一常数, 由此来抑制脉冲噪声. 可以看到, 较小的 ζ 能够较好抑制脉冲噪声, 但过小的 ζ 会使得较大的真实信号被当成脉冲噪声而抑制. 与此对应的, 如注 1 中所述, 大的 l 又会降低抑制脉冲噪声的效果. 在本文中, 通过构造与

l_t 值相关的时变阈值 ζ 以解决该问题. 综上可知, 式 (3) 定义的代价函数 $L_\rho(\mathbf{w}_t)$ 能够用来平滑脉冲噪声的影响.

通过极小化式 (3) 定义的代价函数 $L_\rho(\mathbf{w}_t)$, 可得如下方程:

$$\Phi_t \mathbf{w}_t^* = \mathbf{P}_t, \quad (5)$$

其中

$$\Phi_t = \delta \lambda^t \mathbf{I} + \sum_{i=1}^t \lambda^{t-i} \psi(l_i) \mathbf{y}_i \mathbf{y}_i^T = \lambda \Phi_{t-1} + \psi(l_t) \mathbf{y}_t \mathbf{y}_t^T, \quad (6)$$

$$\mathbf{P}_t = \sum_{i=1}^t \lambda^{t-i} \psi(l_i) (\mathbf{y}_i \mathbf{y}_i - \mathbf{c}) = \lambda \mathbf{P}_{t-1} + \psi(l_t) (\mathbf{y}_t \mathbf{y}_t - \mathbf{c}), \quad (7)$$

式中, $\psi(l) \triangleq d\rho(l)/dl$. 由矩阵的逆定理^[1], 则有

$$\Phi_t^{-1} = \lambda^{-1} (\mathbf{I} - K_t \mathbf{y}_t^T) \Phi_{t-1}^{-1}, \quad (8)$$

$$K_t = \frac{\psi(l_t) \Phi_{t-1}^{-1} \mathbf{y}_t}{\lambda + \psi(l_t) \mathbf{y}_t^T \Phi_{t-1}^{-1} \mathbf{y}_t}, \quad (9)$$

$$\mathbf{w}_t^* = \Phi_t^{-1} \mathbf{P}_t = \mathbf{w}_{t-1}^* + \psi(l_t) \Phi_t^{-1} [(\mathbf{y}_t - \mathbf{w}_{t-1}^{*T} \mathbf{y}_t) \mathbf{y}_t - \mathbf{c}], \quad (10)$$

其中, K_t 为增益矩阵. 若 $|l_t| < \zeta$, 则有 $\psi(l_t) = 1$, 当 λ 与 δ 均等于 1 时, 式 (10) 转变为 UAF; 若 $|l_t| \geq \zeta$, 则有 $\psi(l_t) = 0$, 此时由式 (6) 和 (7), 受到脉冲噪声干扰的观测信号 y_t 不会出现在表达式 Φ_t 与 $\mathbf{P}_t$ 中, 而权值向量也不会更新. 这样的性质保证了 UR-RLS 比 UAF 具有更强的鲁棒性. 此外, 遗忘因子 λ 和正则化参数 δ 的选取与传统 RLS 算法类似. 不失一般性, 可令 $\lambda = 0.99$; 高 (低) 信噪比条件下, δ 选择为大 (小) 的正常数.

注 3 如注 2 所述, 式 (4) 中的阈值 ζ 会影响算法的性能. 尽管 l_t 的分布通常未知, 但 ζ 可以选择如下:

$$\zeta = k_\zeta \hat{\sigma}_{l_t}, \quad (11)$$

其中 k_ζ 为置信因子, $\hat{\sigma}_{l_t}$ 为估计的不包含脉冲噪声时 l_t 的方差. 根据大量实验结果, 选择 $k_\zeta = 3.0$ 可以使得绝大部分受到干扰的信号被剔除掉. 接下来给出 $\hat{\sigma}_{l_t}$ 的估计表达式^[8]:

$$\hat{\sigma}_{l_t}^2 = \lambda_\sigma \hat{\sigma}_{l_{t-1}}^2 + (1 - \lambda_\sigma) c_1 \text{med}(A_\rho(l_t)) \quad (12)$$

式中 $A_\rho(l_t) = \{\rho(l_t), \dots, \rho(l_{t-N_l+1})\}$, $\text{med}(\cdot)$ 表示中值算子, N_l 为样本数, λ_σ 为遗忘因子, $c_1 = 1.483(1 + 5/(N_l - 1))$ 为有限样本校正因子^[20]. 此外, $\hat{\sigma}_{l_0}^2$ 是与不包含脉冲噪声的观测信号 y_t 的界相关的量, 在实际的使用中可以选择为 $\hat{\sigma}_{l_0}^2 = 3(B_X + B_B)$.

4 输入信号处理

考虑图 1 中所示的 FIR 滤波器, 则 UR-RLS 滤波器具有如下形式:

$$\hat{x}_t(y_t) = \mathbf{w}_t^{*T} \mathbf{y}_t. \quad (13)$$

不难看到, 尽管式 (10) 给出的权值更新算法对大的干扰不敏感, 但受到脉冲噪声干扰的滤波器输入向量 $\mathbf{y}_t$ 同样会导致滤波器性能变差. 在本节中, 通过构造多步预测器 MAP 以限制可能出现的脉冲噪声对输入向量 $\mathbf{y}_t$ 的影响.

定义 2 对任意 $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^d$, 定义 t 时刻 $k(k \geq 1)$ 步超前 MAP 的代价函数:

$$J_{\mathbf{u}}(t, k) \triangleq \sum_{i=1}^{t-k} \beta^{t-k-i} (\mathbf{y}_{i+k} - \mathbf{u}_{t,k}^T \mathbf{y}_i)^2 + \alpha \beta^{t-k} \|\mathbf{u}_{t,k}\|^2, \quad (14)$$

其中 $\mathbf{u}_{t,k}$ 为 MAP 的权值向量. 如定义 1, $0 < \alpha < \infty$ 与 $0 < \beta \leq 1$ 分别表示正则化参数和遗忘因子.

通过极小化定义 2 中的代价函数 $J_{\mathbf{u}}(t, k)$, 可得

$$\Psi_{t,k} \mathbf{u}_{t,k}^* = \mathbf{Q}_{t,k}, \quad (15)$$

其中

$$\Psi_{t,k} = \alpha \beta^{t-k} \mathbf{I} + \sum_{i=1}^{t-k} \beta^{t-k-i} \mathbf{y}_i \mathbf{y}_i^T = \beta \Psi_{t,k-1} + \mathbf{y}_{t-k} \mathbf{y}_{t-k}^T, \quad (16)$$

$$\mathbf{Q}_{t,k} = \sum_{i=1}^{t-k} \beta^{t-k-i} \mathbf{y}_{i+k} \mathbf{y}_i = \beta \mathbf{Q}_{t,k-1} + \mathbf{y}_t \mathbf{y}_{t-k}. \quad (17)$$

根据矩阵的逆定理, 通过求解方程 (15) 可得如下形式的 RLS 算法:

$$\Psi_{t,k}^{-1} = \beta^{-1} (\mathbf{I} - K_{t,k} \mathbf{y}_{t-k}^T) \Psi_{t,k-1}^{-1}, \quad (18)$$

$$K_{t,k} = \frac{\beta^{-1} \Psi_{t,k-1}^{-1} \mathbf{y}_{t-k}}{1 + \beta^{-1} \mathbf{y}_{t-k}^T \Psi_{t,k-1}^{-1} \mathbf{y}_{t-k}}, \quad (19)$$

$$\mathbf{u}_{t,k}^* = \Psi_{t,k}^{-1} \mathbf{Q}_{t,k} = \mathbf{u}_{t,k-1}^* + (\mathbf{y}_t - \mathbf{u}_{t,k-1}^{*T} \mathbf{x}_{t-k}) K_{t,k}, \quad (20)$$

式中 $K_{t,k}$ 为增益矩阵. 则有 $k(k \geq 1)$ 步超前 MAP:

$$\hat{\mathbf{y}}_{t+k|t} = \mathbf{u}_{t,k}^{*T} \mathbf{y}_t. \quad (21)$$

假设无脉冲噪声干扰的时间序列 y_t 具有如下 p 阶自回归形式 (autoregressive, AR(p)):

$$y_t = a_1 y_{t-1} + \cdots + a_p y_{t-p} + \varepsilon_t, \quad (22)$$

其中 ε_t 为高斯过程, 满足 $\varepsilon_t \sim N(0, \sigma_\varepsilon^2)$, 且 $p \leq d$. 令 $\mathbf{a} = [a_1 \cdots a_p 0 \cdots 0]^T \in \mathbb{R}^d$, 则有 $y_t = \mathbf{a}^T \mathbf{y}_{t-1} + \varepsilon_t$.

对任意 $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^d$, 定义

$$\Gamma(\mathbf{a}) = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & 0 \\ \mathbf{I}_{d-1} & \mathbf{0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{a}^T \\ \mathbf{0} \\ \vdots \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{d \times d},$$

其中 $\mathbf{I}_{d-1}$ 为单位阵, 可得

$$\mathbf{y}_{t+k} = \mathbf{a}^T \mathbf{y}_{t+k-1} + \varepsilon_{t+k} = \mathbf{a}^T [\Gamma(\mathbf{a})]^{k-1} \mathbf{y}_t + \mathbf{a}^T \underbrace{\sum_{i=0}^{k-2} [\Gamma(\mathbf{a})]^i}_{\triangleq \Xi_{k-2}} \begin{bmatrix} \varepsilon_{t+k-1-i} \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix} + \varepsilon_{t+k}. \quad (23)$$

定理 1 给定如式 (21) 所示的 MAP, 则有如下预测误差:

$$E[(\mathbf{y}_{t+k} - \hat{\mathbf{y}}_{t+k|t})^T (\mathbf{y}_{t+k} - \hat{\mathbf{y}}_{t+k|t})] = \mathbf{y}_t^T (\mathbf{a}^T [\boldsymbol{\Gamma}(\mathbf{a})]^{k-1} - \mathbf{u}_{t,k}^{*T})^T (\mathbf{a}^T [\boldsymbol{\Gamma}(\mathbf{a})]^{k-1} - \mathbf{u}_{t,k}^{*T}) \mathbf{y}_t \\ + \mathbf{a}^T \sum_{i=0}^{k-2} [\boldsymbol{\Gamma}(\mathbf{a})]^i \begin{bmatrix} \sigma_\varepsilon^2 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} ([\boldsymbol{\Gamma}(\mathbf{a})]^i)^T \mathbf{a} + \sigma_\varepsilon^2. \quad (24)$$

证明 由于 ε_t 是方差为 σ_ε^2 的白噪声, 则有如下预测误差:

$$E[(\mathbf{y}_{t+k} - \hat{\mathbf{y}}_{t+k|t})^T (\mathbf{y}_{t+k} - \hat{\mathbf{y}}_{t+k|t})] \\ = E[(\mathbf{a}^T [\boldsymbol{\Gamma}(\mathbf{a})]^{k-1} \mathbf{y}_t + \mathbf{a}^T \boldsymbol{\Xi}_{k-2} + \varepsilon_{t+k} - \mathbf{u}_{t,k}^{*T} \mathbf{y}_t)^T \cdot (\mathbf{a}^T [\boldsymbol{\Gamma}(\mathbf{a})]^{k-1} \mathbf{y}_t + \mathbf{a}^T \boldsymbol{\Xi}_{k-2} + \varepsilon_{t+k} - \mathbf{u}_{t,k}^{*T} \mathbf{y}_t)] \\ = E[\mathbf{y}_t^T (\mathbf{a}^T [\boldsymbol{\Gamma}(\mathbf{a})]^{k-1} - \mathbf{u}_{t,k}^{*T})^T (\mathbf{a}^T [\boldsymbol{\Gamma}(\mathbf{a})]^{k-1} - \mathbf{u}_{t,k}^{*T}) \mathbf{y}_t] + E[(\mathbf{a}^T \boldsymbol{\Xi}_{k-2})^T (\mathbf{a}^T \boldsymbol{\Xi}_{k-2})] + E[\varepsilon_{t+k}^T \varepsilon_{t+k}] \\ = \mathbf{y}_t^T (\mathbf{a}^T [\boldsymbol{\Gamma}(\mathbf{a})]^{k-1} - \mathbf{u}_{t,k}^{*T})^T (\mathbf{a}^T [\boldsymbol{\Gamma}(\mathbf{a})]^{k-1} - \mathbf{u}_{t,k}^{*T}) \mathbf{y}_t \\ + \mathbf{a}^T \sum_{i=0}^{k-2} [\boldsymbol{\Gamma}(\mathbf{a})]^i \begin{bmatrix} \sigma_\varepsilon^2 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} ([\boldsymbol{\Gamma}(\mathbf{a})]^i)^T \mathbf{a} + \sigma_\varepsilon^2.$$

注 4 根据定理 1, 随着预测时间的增加, 误差逐步累积. 通常采用一步前向预测 ($k=1$) 来产生式 (2) 中的比较序列, 当且仅当脉冲噪声持续时间超过一个采样周期时才使用多步预测形式.

如注 1 所述, 将采用时变的 ξ_t 来判断观测信号是否包含脉冲噪声. 由 MAP 可得 $\hat{y}_{t|t-1}$, 则无脉冲噪声时的估计误差为 $e_t = y_t - \hat{y}_{t|t-1}$. 假设 e_t 为高斯过程, 若其方差能够得到, 则有 $P_r\{|e_t| > \xi\} = \theta_\xi = 1 - \text{erfc}\{\xi/(\sqrt{2}\hat{\sigma}_{\xi_t})\}$, 其中 $\text{erfc}(r) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^r e^{-x^2} dx$ 为误差函数 [9]. 通过选择不同的 θ_ξ , 则可得具有不同置信度的脉冲噪声检测准则. 如令 $\theta_\xi = 0.01$, 即有 99% 的概率能够检测到脉冲噪声, 此时式 (2) 中的阈值 ξ 可选择为 [10]:

$$\xi = k_\xi \hat{\sigma}_{\xi_t} = 2.576 \hat{\sigma}_{\xi_t}, \quad (25)$$

其中 $k_\xi = 2.576$, $\hat{\sigma}_{\xi_t}$ 为无脉冲噪声估计误差的方差估计. 采用如下形式表达式对 $\hat{\sigma}_{\xi_t}$ 进行估计:

$$\hat{\sigma}_{\xi_t}^2 = \lambda_\xi \hat{\sigma}_{\xi_{t-1}}^2 + (1 - \lambda_\xi) c_1 \text{med}(A(e_t)), \quad (26)$$

其中 $A(e_t) = \{e_t^2, \dots, e_{t-N_e+1}^2\}$, N_e 为估计时选用样本序列长度; λ_ξ 为遗忘因子, $\text{med}(\cdot)$ 与 c_1 同式 (12). 由于 MAP 能够快速获得 $\hat{y}_t$ 较为精确的估计, 则在起始阶段选择 $\hat{\sigma}_{\xi_0} = 3(B_X + B_B)$.

5 仿真和实验结果

5.1 线性随机信号

考虑如下 AR(1) 信号 [18]:

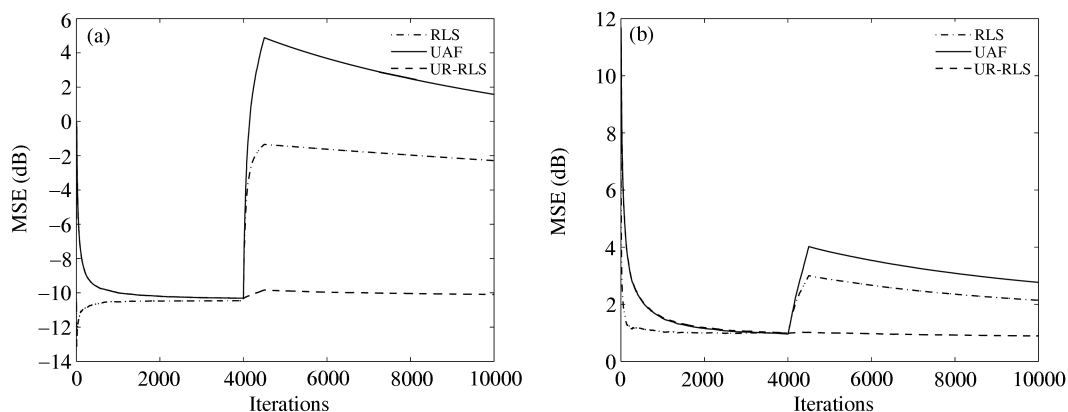


图 3 不同算法对 AR(1) 信号估计误差的 MSE

Figure 3 MSE results of the various algorithms in the presence of the impulses for AR(1) signal: RLS, UAF, and UR-RLS. Impulses in the observed noisy signal appear between $n = 4001$ and $n = 4500$. (a) SBNR=10 dB; (b) SBNR=-5 dB

$$x_t = \gamma x_{t-1} + z_t, \quad \gamma = 0.9, \quad t = 1, 2, \dots, \quad (27)$$

其中, $\{z_t\}_{t \geq 1}$ 独立同分布, 满足 $z_t \sim \mathcal{N}(0, 1^2)$; $x_0 \sim \mathcal{N}(0, \frac{1}{1-\gamma^2})$ 以保证 $\{x_t\}_{t \geq 1}$ 满足平稳性条件. 观测信号 $\{y_t\}_{t \geq 1}$ 由式 (1) 产生, 其中背景噪声 $\{b_t\}_{t \geq 1}$ 为高斯过程, 与 $\{x_t\}_{t \geq 1}$ 无关. 若 σ_x^2 与 σ_b^2 分别表示真实信号和背景噪声的功率谱密度, 则有如下形式的信噪比 (signal-to-background-noise ratio, SBNR):

$$\text{SBNR} = 10 \lg \left[\frac{\sigma_x^2}{\sigma_b^2} \right]. \quad (28)$$

在仿真中, 选择 σ_b^2 使得 SBNR=10 和 SBNR=-5 dB. 算法性能由估计误差的均方误差 (mean-square-error, MSE) 形式表示, 即 $10 \lg (\text{MSE})(\text{dB})$.

脉冲噪声 n_t 可表示为 $n_t = p_t i_t$, 式中 i_t 表示方差为 σ_i^2 的随机过程, p_t 为在 0 和 1 间切换的序列. 若 $p_t = 1$, 则表示在该时刻有脉冲噪声; 若 $p_t = 0$, 则表示无脉冲噪声. 选择 p_t 为 $P(p_t = 1) = \epsilon$ 的 Bernouli 过程.

除特别声明外, 本节均使用如下参数: FIR 滤波器阶数 $d = 5$; 样本总长 $n = 10000$; 遗忘因子 $\lambda = \beta = \lambda_\sigma = \lambda_\xi = 0.99$; 正则化参数 $\delta = \alpha = 1(10 \text{ dB})$ 或 $\delta = \alpha = 100(-5 \text{ dB})$; 脉冲方差 $\sigma_i^2 = 300$, $\epsilon = 0.1$; 阈值比例因子 $k_\zeta = 3.0$, $k_\xi = 2.576$, 方差估计窗口宽度 $N_l = N_e = 10$. 与传统的 RLS 算法^[1]和 UAF^[18]做比较.

图 3 所示为中等信噪比 (10 dB) 和低信噪比 (-5 dB) 情况下, 分别采用 RLS, UAF 和 UR-RLS 算法对式 (27) 所示 AR(1) 进行 50 次独立实验估计误差的平均 MSE. 脉冲噪声依据伯努利过程在样本点 $n = 4001$ 与 $n = 4500$ 之间随机产生. 由图 3(a) 和 (b) 不难看出, 当没有脉冲噪声时, 本文提出的 UR-RLS 与 UAF 具有相似的表现. 与文献 [18] 中的结论一致, 无监督形式的 UAF 和 UR-RLS 与传统 RLS 算法在无脉冲噪声时具有相近的性能. 但是, 脉冲噪声会使得 RLS 和 UAF 的性能变差, 而对 UR-RLS 影响有限.

由于脉冲噪声影响 UAF 的权值更新和滤波解算过程, 其输出表现最差. 而 RLS 算法采用的是未受脉冲噪声干扰的期望信号 x_t , 因此其性能相对 UAF 要好. 由式 (2) 和 (4), 脉冲噪声得到极大的抑制, 使得 UR-RLS 的输出基本未受到干扰.

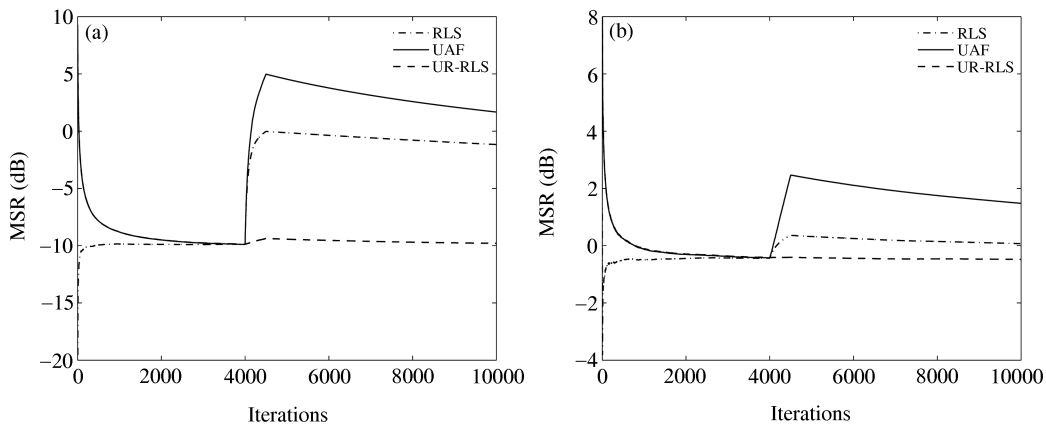


图 4 不同算法对非线性信号估计误差的 MSE

Figure 4 MSE results of the various algorithms in the presence of the impulses for nonlinear signal: RLS, UAF, and UR-RLS. Impulses in the observed noisy signal appear between $n = 4001$ and $n = 4500$. (a) SBNR=10 dB; (b) SBNR=-5 dB

5.2 非线性随机信号

考虑如下形式的非线性信号 [18]:

$$x_t = 0.1x_{t-1} - 0.5 \cos(3x_{t-1}) + 0.4 \sin(x_{t-2}) + 0.1x_{t-2} + z_t, \quad t = 2, 3, \dots, \quad (29)$$

其中参数值和测试条件均同 5.1 小节. 同样采用传统的 RLS 和 UAF 作为比较.

图 4 表示针对非线性信号式 (29), 分别采用传统 RLS, UAF 和 UR-RLS 算法对真实信号进行估计时 50 次独立实验估计误差的平均 MSE. 中等信噪比 (10 dB) 情形如图 4(a), 其与图 3(a) 中 AR(1) 信号的处理结果相一致. 低信噪比 (-5 dB) 情形的结果如图 4(b) 所示, 其与图 3(b) 所示的 AR(1) 信号处理结果相对应.

5.3 阈值选取

由于式 (2) 和 (4) 中的阈值选取会极大影响到算法的性能, 因此本部分实验给出其估计结果. 信号与测试条件同 B 部分, 选择信噪比 SBNR=-5 dB.

图 5(a) 为式 (4) 中饱和非线性函数阈值估计结果, 其中 $k_\zeta = 3.0$. 采用本文中的阈值选取方法, 可以使未受脉冲噪声干扰的 l_t 无阻碍的通过非线性函数; 当出现脉冲噪声时, 该阈值又能恰当的抑制其幅值, 这就保证了 FIR 滤波器的权值更新过程不受到脉冲噪声的影响. 图 5(b) 为预测误差的界, 其中 $k_\xi = 2.576$. 由于受脉冲噪声干扰的信号都被预测值替代, 因此 FIR 滤波器的输入向量不会受脉冲噪声的影响.

5.4 光纤陀螺信号去噪

四位置光纤陀螺 (fiber optic gyroscope, FOG) 寻北仪通过测量地球转速的分量 ($\leq 0.0042^\circ/\text{s}$), 可以得到所在方位的北向角. 实验中用到的 FOG 角度随机游走系数为 $0.005^\circ/\sqrt{h}$, 采样率 100 Hz, 其他初始参数设置同 5.1 小节.

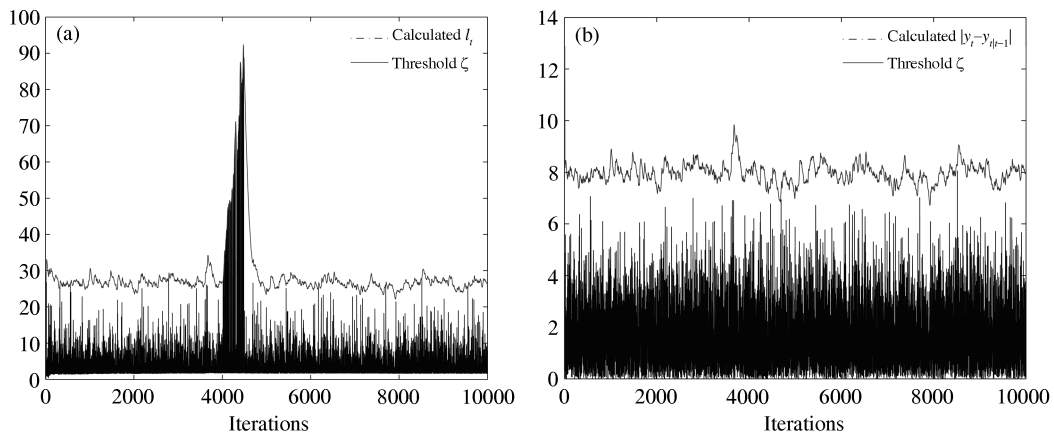


图 5 饱和非线性函数和预测误差阈值估计

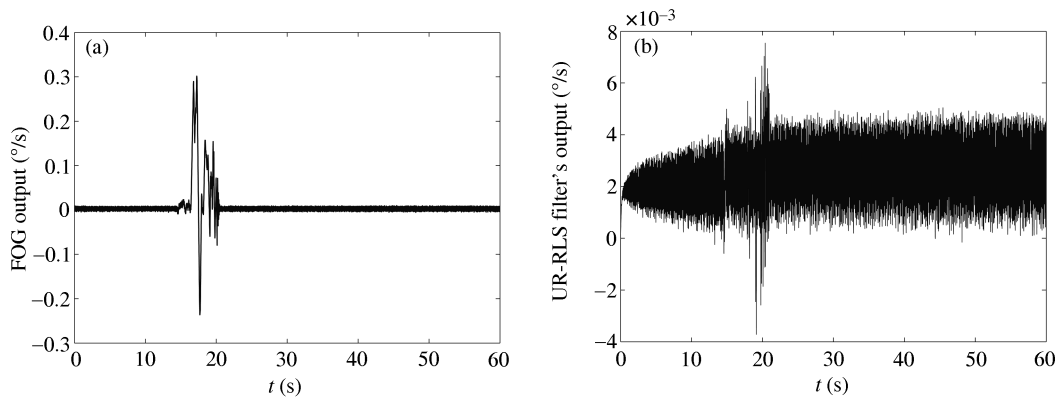
 Figure 5 Thresholds estimation of (a) saturable nonlinear function and (b) prediction error ($k_\zeta = 3.0$, $k_\xi = 2.576$)


图 6 寻北仪中 (a)FOG 原始信号和 (b)UR-RLS 输出信号

Figure 6 (a) Initial output of FOG in a north finder in adverse environment and (b) the UR-RLS filter's output. Notice the longitudinal axis of (b) has been greatly expanded compared with (a)

寻北仪放置在高精度转台上, 测试时的真北值为 1369.2 密位 (82.152°). 静态测试时信噪比近似为 -3.06 dB. 每个位置采样 60 s, 寻北时间 4 min. 图 6(a) 给出了某一个位置 FOG 的原始输出信号, 测试时有人从附近走过, 可以看到人员走动引起的振动被 FOG 测量到. 采用此时的数据进行北向值解算, 其值为 1298.6 密位 (77.916°), 与真实值相差 70.6 密位.

图 6(b) 给出了经过 UR-RLS 处理后的信号, 可见人员走动引起的干扰已经被极大的消除, 此时的信噪比提高到 6.13 dB. 利用该信号解算得到的北向值为 1368.1 密位 (82.086°), 其误差降低到 1.1 密位.

6 结论

为抑制脉冲噪声对信号估计的影响, 提出一种基于最小二乘的无监督鲁棒自适应滤波算法. 通过构造具有时变饱和和非线性约束的代价函数, 抑制了脉冲噪声对滤波器权值更新算法的影响. 此外, 设计预测器对输入信号进行预测, 并将预测值与观测信号进行对比, 能偶以很高的概率检测到脉冲噪声,

通过替换以尽可能降低脉冲噪声对滤波器输入的影响. 当脉冲噪声持续时间超过一个样本周期时, 则通过多步预测器来进行输入信号预测. 实验结果表明, 提出的 UR-RLS 滤波器在无脉冲噪声干扰时与传统已知期望信号的 RLS 算法具有相近的收敛速度和精度; 在有脉冲噪声干扰时, 与其它方法相比 UR-RLS 具有很好的鲁棒性.

参考文献

- 1 Haykin S. Adaptive Filter Theory. 4th ed. New Jersey: Prentice Hall, 2002
- 2 Sun J, Chen J, Liu G P, et al. Delay-dependent robust H_∞ filter design for uncertain linear systems with time-varying delay. *Circuits Syst Signal Process*, 2009, 28: 763–779
- 3 Shi P, Mahmoud M, Nguang S K, et al. Robust filtering for jumping systems with mode-dependent delays. *Signal Process*, 2006, 86: 140–152
- 4 Chan S C, Zou Y. A recursive least M-estimate algorithm for robust adaptive filtering in impulsive noise: fast algorithm and convergence performance analysis. *IEEE Trans Signal Process*, 2004, 52: 975–991
- 5 Xia T, Wan Q, Wang X, et al. 2-D DOAs estimation in impulsive noise environments using joint diagonalization fractional lower-order spatio-temporal matrices. *Sci China Ser F-Inf Sci*, 2008, 51: 1585–1593
- 6 Weng B, Kenneth E B. Nonlinear system identification in impulsive environments. *IEEE Trans Signal Process*, 2005, 53: 2588–2594
- 7 Seong R K, Efron A. Adaptive robust impulse noise filtering. *IEEE Trans Signal Process*, 1995, 43: 1855–1866
- 8 Jayant N. Average- and median-based smoothing techniques for improving digital speech quality in the presence of transmission errors. *IEEE Trans Commun*, 1976, 24: 1043–1045
- 9 Zou Y, Chan S C, Ng T S. A recursive least M-estimate (RLM) adaptive filter for robust filtering in impulsive noise. *IEEE Signal Process Lett*, 2000, 7: 324–326
- 10 Zou Y, Chan S C, Ng T S. Least mean M-estimate algorithms for robust adaptive filtering in impulse noise. *IEEE Trans Circuits II*, 2000, 47: 1564–1569
- 11 Vega L R, Rey H, Benesty J, et al. A new robust variable step-size NLMS algorithm. *IEEE Trans Signal Process*, 2008, 56: 1878–1893
- 12 Vega L R, Rey H, Benesty J, et al. A family of robust algorithms exploiting sparsity in adaptive filters. *IEEE Trans Audio Speech Lang Process*, 2009, 17: 572–581
- 13 Vega L R, Rey H, Benesty J, et al. A fast robust recursive least-squares algorithm. *IEEE Trans Signal Process*, 2009, 57: 1209–1216
- 14 Awate S P, Whitaker R T. Unsupervised, information-theoretic, adaptive image filtering for image restoration. *IEEE Trans Pattern Anal*, 2006, 28: 364–376
- 15 Makov U. Approximations to unsupervised filters. *IEEE Trans Autom Control*, 1980, 25: 842–847
- 16 Zeitler G C, Singer A C. Universal linear least-squares prediction in the presence of noise. In: *Proceedings of IEEE/SP 14th Workshop on Statistic Signal Process*. New York: IEEE Press, 2007. 611–614
- 17 Zinkevich M. Online convex programming and generalized infinitesimal gradient ascent. In: Lane T, ed. *Proceedings of the 20th International Conference on Machine Learning*. Menlo Park: AAAI Press, 2003. 928–936
- 18 Moon T, Weissman T. Universal FIR MMSE filtering. *IEEE Trans Signal Process*, 2009, 57: 1068–1083
- 19 Weissman T, Ordentlich E, Weinberger M J, et al. Universal filtering via prediction. *IEEE Trans Inf Theory*, 2007, 53: 1253–1264
- 20 Rousseeuw P J, Leroy A M. Robust Regression and Outlier Detection. New York: Wiley, 1987

Unsupervised robust recursive least-squares algorithm for impulsive noise filtering

CHEN Jie^{1,2}, MA Tao^{1,2,3*}, CHEN WenJie^{1,2} & PENG ZhiHong^{1,2}

¹ School of Automation, Beijing Institute of Technology, Beijing 100081, China;

² Key Laboratory of Complex System Intelligent Control and Decision (Beijing Institute of Technology), Ministry of Education, Beijing 100081, China;

³ Key Laboratory of Applied Superconductivity, Institute of Electrical Engineering, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190, China

*E-mail: matao@bit.edu.cn

Abstract A robust recursive least-squares (RLS) adaptive filter against impulsive noise is proposed for the situation of an unknown desired signal. By minimizing a saturable nonlinear constrained unsupervised cost function instead of the conventional least-squares function, a possible impulse-corrupted signal is prevented from entering the filter's weight updating scheme. Moreover, a multi-step adaptive filter is devised to reconstruct the observed "impulse-free" noisy sequence, and whenever impulsive noise is detected, the impulse contaminated samples are replaced by predictive values. Based on simulation and experimental results, the proposed unsupervised robust recursive least-square adaptive filter performs as well as conventional RLS filters in "impulse-free" circumstances, and is effective in restricting large disturbances such as impulsive noise when the RLS and the more recent unsupervised adaptive filter fails.

Keywords unsupervised adaptive filtering, impulsive noise suppression, recursive least-squares algorithm, FIR filters, prediction



CHEN Jie was born in 1965. He received the Ph.D. degree in control theory and control engineering from Beijing Institute of Technology in 2001. He is currently a Professor with School of Automation, Beijing Institute of Technology. His main research interests include multi-index optimization, multi-objective decision and control, intelligent control, and constrained nonlinear control. Dr. Chen is a member of IEEE.



MA Tao was born in 1984. He received the Ph.D. degree in control science and engineering from Beijing Institute of Technology in 2011. He is currently an Assistant Investigator with Institute of Electrical Engineering, Chinese Academy of Sciences. His current research interests include sensor signal processing, power system signal processing and inertial navigation.



CHEN WenJie was born in 1975. He received the Ph.D. degree in navigation, guidance and control from Beijing Institute of Technology in 2004. He is currently an Associate Investigator with School of Automation, Beijing Institute of Technology. His main research interests include image processing and inertial navigation.



PENG ZhiHong was born in 1975. She received the Ph.D. degree in control theory and control engineering from Central South University, Changsha in 2000. She is currently an Associate Professor with School of Automation, Beijing Institute of Technology. Her main research interests include intelligent control.