

Doi: 10.11840/j.issn.1001-6392.2015.01.008

基于非结构网格的高分辨率隐式算法研究及应用

路川藤, 罗小峰

(南京水利科学研究院 水文水资源与水利工程科学国家重点实验室, 江苏 南京 210029)

摘 要: 采用 LU-SGS 隐格式离散 N-S 方程, 求解过程引入超松弛系数。数值水槽试验研究发现, 超松弛系数的引入可以提高计算结果收敛速度, 其取值范围一般在 1~1.3 之间。应用 LU-SGS 算法, 建立了高分辨率的大东港海域潮流泥沙数学模型, 计算结果表明, 该算法稳定性好, 计算精度能够满足实际工程应用, 具有模拟大范围海域潮流泥沙运动的能力。

关键词: FVM; 隐式; 数值模拟; 潮流泥沙; 丹东港

中图分类号: P731

文献标识码: A

文章编号: 1001-6392(2015)01-0059-06

Study of the unstructured grid implicit algorithm and its application

LU Chuan-teng, LUO Xiao-feng

(The State Key Lab of Hydrology-Water Resources and Hydraulic Engineering
Nanjing Hydraulic Research Institute, Nanjing 210029, China)

Abstract: LU-SGS implicit algorithm is applied in the discrete N-S equations to solve the calculation by the relaxation coefficient whose value range is 1~1.3 according to the numerical flume experiment. Based on LU-SGS implicit algorithm, 2d tidal current and suspended sediment high resolution mathematical model in the Dadong Harbor is built with good verification which shows that the model can simulate the moving of tidal currents and suspended sediments.

Keywords: FVM; implicit algorithm; numerical simulation; tidal currents and sediments; Dandong Harbor

近年来, 随着计算机技术的迅猛发展, 非结构网格有限体积法得到广泛应用, 并且计算区域趋于大范围, 计算网格趋于高精度。非结构网格 FVM 显格式应用较多。刘玉玲 (2010) 用 WENO 格式有限体积法研究了丁坝群对流场的影响; 张宏伟 (2009) 用 Roe 二阶迎风格式模拟了胜利油田附近海域的潮汐流动; 王志力 (2005) 利用 Roe 格式平底模型模拟了蓬莱滩河段水流问题; Nguyen (2006) 通过对流项离散、时间推进、流速修正三个步骤建立模型, 并模拟了红河 Van-Coc 河段洪水运动; Kuiry (2008) 用 Reo 格式模拟了胡格利河局部河段的潮波运动; Simões (2011), Bladé (2008), Begnudelli 等 (2006) 对离散格式也做了一定的研究; 国际上知名的 FVCOM 软件及 MIKE 水动力模块亦基于 FVM 开发, 以上学者或

软件的研究均为显格式。

隐格式算法相比显格式, 其时间步长理论上不受 Courant 数限制, 能够节约大量计算时间, 有限差分法隐格式算法已相当成熟, 如 Leendertse 数值模式, 而非结构网格 FVM 隐式算法应用较少。Casulli (1992) 提出了半隐格式, 即对连续方程中流速梯度项和动量方程中水位梯度项采用法, Kuang (2011), Hu (2011) 较好的应用了此方法; 卢康明 (2010) 根据 N-S 方程各项物理成因不同, 将 N-S 方程分为两部分, 寻找水位比降与单元形心水位的关系, 建立隐式算法, 并成功应用到长江南京河段数值计算。

LU-SGS 隐格式算法由 Jameson 等 (1987) 提出, 因其节约计算时间, 在空气动力学中得到广泛应用 (Yuzhi, 2007; 王波兰, 2003)。LU-SGS 隐

收稿日期: 2013-11-25; 修订日期: 2014-06-12

基金项目: 国家自然科学基金青年科学基金 (51009095)

作者简介: 路川藤 (1983-), 男, 博士, 工程师, 主要从事港口、海岸及近海工程研究。电子邮箱: lctooabc@163.com。

格式算法在水动力学中应用较少, 杨彬 (2008) 应用 LU-SGS 算法模拟了长江口潮汐运动, 并与显式算法计算时间进行了比较, 发现 LU-SGS 算法计算效率高, 大大节约了计算时间。

本文在前人研究的基础上, 深入研究了 LU-SGS 算法的应用问题, 研究发现 LU-SGS 算法在取得较大时间步长的同时, 降低了计算结果收敛速度, 应采用超松弛系数加速计算结果收敛, 并将研究成果应用于丹东港潮流泥沙数值模拟。

1 控制方程

水流泥沙运动方程向量形式可写为:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \nabla E = M + \nabla E^d \quad (1)$$

式中: $U = (H, Hu, Hv, HS)T$

$E = (F, G)$

$$\text{式中: } F = \begin{pmatrix} Hu \\ Hu^2 + gH^2/2 \\ Huw \\ HuS \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} Hv \\ Huv \\ Hv^2 + gH^2/2 \\ HvS \end{pmatrix}$$

水流泥沙运动方程的紊动扩散项和泥沙扩散项表示为:

$$E^d = (F^d, G^d)$$

$$\text{其中 } F^d = \begin{pmatrix} 0 \\ N_x H \partial u / \partial x \\ N_x H \partial v / \partial x \\ D_x H \partial S / \partial x \end{pmatrix}, \quad G^d = \begin{pmatrix} 0 \\ N_y H \partial u / \partial x \\ N_y H \partial v / \partial x \\ D_y H \partial S / \partial x \end{pmatrix}$$

源项 M 表示为:

$$M = M_0 + M_f = \begin{pmatrix} 0 \\ gH(M_{0x} + M_{fx}) + f_v \\ gH(M_{0y} + M_{fy}) + f_u \\ F_s \end{pmatrix}$$

其中: H 为总水深 (m); u 、 v 为流速矢量沿 x 、 y 方向的速度分量 (m/s); t 为时间 (s); f 为科氏系数 ($f = 2W \sin \varphi$, W 是地球自转的角速度, φ 是所在地区的纬度); g 为重力加速度 (m/s^2); N_x 、 N_y 为 x 、 y 向水流紊动粘性系数 (m^2/s)。 S 为含沙量 (kg/m^3); D_x 、 D_y 为 x 、 y 向悬移质泥沙扩散系数 (m^2/s)。 F_s 为泥沙源汇函数或泥沙冲淤函数 ($\text{kg}/(\text{m}^2 \cdot \text{s})$); M_{0x} 、 M_{0y} 为 x 、 y 方向的河床底部高程变化; M_{fx} 、 M_{fy} 为 x 、 y 方向的底摩擦项;

2 数值方法

2.1 LU-SGS 算法

本文基于三角形网格单元对控制方程 (1) 进行离散, 物理变量 u 、 v 、 S 配置在网格单元中心, 水深 H 配置在网格节点。将第 i 号控制元记为 Ω_i , 在 Ω_i 上对向量式的基本方程组进行积分, 并利用 Green 公式将面积分化为线积分, 得:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega_i} U d\Omega_i + \int_{\partial\Omega_i} E \cdot \bar{n}_i dl = \int_{\Omega_i} S d\Omega_i - \int_{\partial\Omega_i} E^d \cdot \bar{n}_i dl \quad (2)$$

式中: $d\Omega_i$ 为面积分微元, dl 为线积分微元; $\bar{n}_i = (n_{ix}, n_{iy}) = (\cos \theta, \sin \theta)$ 。

以 $F(U)$ 、 $G(U)$ 表示对流项与紊动项积分结果, 则式 (2) 可写为:

$$A_i \frac{U_i^{n+1} - U_i^n}{\Delta t} + \sum_{j=1}^3 F(U_j^{n+1}) L_j = AS(U_i^n) - \sum_{j=1}^3 G(U_j^n) L_j \quad (3)$$

在 LU-SGS 近似因式分解过程中, 数值通量 $F(U)$ Riemann 问题近似解的 Roe 格式可表示为:

$$F(U) = F(U_L, U_R) = \frac{1}{2} [F(U_L) + F(U_R) - \rho_{ij}(U_R - U_L)] \quad (4)$$

式中: U_L 、 U_R 为交界面两侧的数值通量, ρ_{ij} 为通量 Jacobian 平均矩阵的谱半径。

式 (3) 左边第二项采用一阶近似:

$$F(U_j^{n+1}) - F(U_j^n) = [F(U_i^{n+1}, U_j^{n+1}) - F(U_i^n, U_j^{n+1})] + [F(U_i^n, U_j^{n+1}) - F(U_i^n, U_j^{n+1})] = \frac{\partial F(U)}{\partial U_i} \Delta U_i + \frac{\partial F(U)}{\partial U_j} \Delta U_j \quad (5)$$

将 (5) 代入 (3) 得:

$$A_i \frac{U_i^{n+1} - U_i^n}{\Delta t} + \sum_{j=1}^3 \left\{ \frac{1}{2} \left[\frac{\partial F(U_i)}{\partial U_i} + \rho_{ij} I \right] \Delta U_i^n + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial F(U_j)}{\partial U_j} + \rho_{ij} I \right] \Delta U_j^n \right\} L_j = A_i S(U_i^n) - \sum_{j=1}^3 F(U_j^n) L_j - \sum_{j=1}^3 G(U_j^n) L_j \quad (6)$$

由于每一个控制体都是闭合的, 故:

$$\sum_{j=1}^3 \frac{\partial F(U_i^n)}{\partial U_i} L_i = 0$$

式 (6) 可写为:

$$\frac{A_i}{\Delta t} \Delta U_i^n + \sum_{j=1}^3 \rho_{i,j} I \Delta U_i^n L_j = -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^3 \left[\frac{\partial F(U_j)}{\partial U_j} + \rho_{i,j} I \Delta_j^n L_j + A_i S(U_i^n) - \sum_{j=1}^3 F(U_j^n) L_j - \sum_{j=1}^3 G(U_j^n) L_j \right] \quad (7)$$

$$\text{以, } D = \frac{A_i}{\Delta t} + \sum_{j=1}^3 \frac{1}{2} \rho_{i,j} L_j, \text{ Re} = A_i S(U_i^n) -$$

$$\sum_{j=1}^3 F(U_j^n) L_j - \sum_{j=1}^3 G(U_j^n) L_j \text{ 则式 (7) 可写为:}$$

$$D \Delta U_i^n = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^3 \left[\frac{\partial F(U_j)}{\partial U_j} - \rho_{i,j} I \Delta_j^n L_j + \text{Re} \right] \quad (8)$$

方程 (8) 的求解分两步:

① 向前推进:

$$\Delta U_i^* = D^{-1} \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^3 \left[\frac{\partial F(U_j)}{\partial U_j} - \rho_{i,j} I \Delta_j^n L_j + \text{Re} \right] \right\} \quad (9)$$

② 向后推进:

$$\Delta U_i = \Delta U_i^* - \frac{1}{2} D^{-1} \sum_{j=1}^3 \left[\frac{\partial F(U_j)}{\partial U_j} - \rho_{i,j} I \Delta_j^n L_j \right] \quad (10)$$

$$\text{则: } U_i^{n+1} = U_i^n + W \cdot \Delta U_i \quad (11)$$

W 为松弛系数。

2.2 定解条件

2.2.1 水位开边界

开边界又分为急流开边界和缓流开边界, 因本文所建模型为缓流模型, 故只给出缓流开边界的处理方法。

根据相容关系:

$$U_R + 2c_R = U_L + 2c_L \quad (12)$$

其中: c_L 和 c_R 表示单元两侧静水波传播速度。

$$U_R = U_L + 2\sqrt{gh_L} - 2\sqrt{g(Z_R - Z_d)} \quad (13)$$

式中: Z_d 为边界上通量积分点处的底高程。

2.2.2 闭边界

采用镜像法处理。在闭边界外侧虚拟一个单元, 边界上的两侧的法向流速相反, 切向流速相同, 即 $D_R = D_L, u_{n,R} = -u_{n,L}, u_{\tau,R} = -u_{\tau,L}, u_n, u_\tau$ 表示单元法向和切向流速。

2.2.3 初始条件

$\zeta(x, y, t) = \zeta_*(x, y, t), u(x, y, t) = u_*(x, y, t),$
 $u(x, y, t) = u_*(x, y, t), S(x, y, t) = S_*(x, y, t), *$ 表示初始场。

3 数值水槽算例

为检验 LU-SGS 算法的计算性能, 本文建立了长 30 km, 宽 10 km 的数值水槽, 水槽上边界与下边界给予恒定水位控制。水槽网格平均边长 400 m, 中央设置采样点 A, 如图 1, 分别采用显格式与隐格式计算。

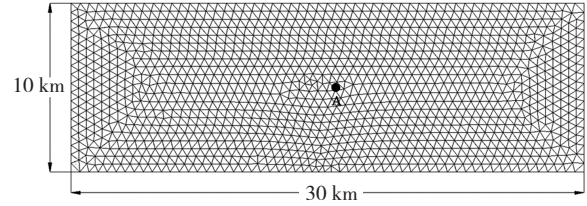


图1 数值水槽平面示意图

当不考虑松弛系数时, 即 $W = 1$, 计算结果如图 2, 横坐标表示计算结果达到收敛时的计算时间。由图知, 隐格式时间步长 (最大时间步长 100 s) 远大于显式 (显式最大时间步长为 10 s), 节省计算时间。当采样点 A 流速达到稳定时, 显格式用时最短, 隐格式用时随时间步长的增大而增大, 这说明 LU-SGS 算法虽然能够取较大的时间步长, 但计算结果收敛速度大大降低, 对于非恒定流数值计算而言, 这将严重影响计算精度。

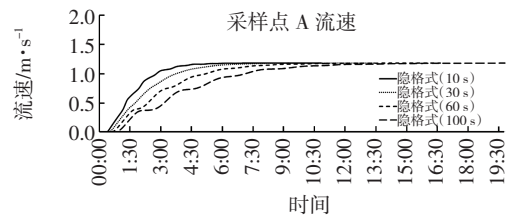


图2 采样点 A 流速变化过程线

当考虑松弛系数时, 取 $W = 1$, 计算结果如图 3。由图知, 改进的 LU-SGS 算法计算收敛速度明显加快, 当时间步长为 60 s 时, 其收敛速度接近于显式, 说明采用超松弛系数处理计算结果能明显

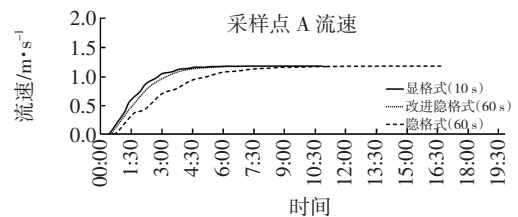


图3 采样点 A 流速变化过程线

加快计算收敛速度。

不同时间步长超松弛系数的选取见表 1。由表知, 超松弛系数取值范围随时间步长的增大而缩小, 时间步长越大, 超松弛系数合理值的取值越大, 其取值范围一般在 1~1.3 之间。

表 1 超松弛系数的选取

时间步长	10 s	30 s	60 s	100 s
W 可变范围	1.0~2.5	1.0~1.6	1~1.4	1~1.3
W 合理值	1.0	1.1	1.2	1.25

4 LU-SGS 隐式算法应用

4.1 算例 1

过丘恒定流根据不同的初边值条件, 流场内可能同时存在亚临界流、激波和超临界流, 因其流态复杂和模拟困难, 经常用于验证 FVM 模型对间断的捕捉能力。取计算域长 20 m, 宽 3 m 的矩形水槽, 以 0.1 m 间隔生成网格, 共 16 020 个单元。底高程 Z_b 和静水深按下式:

$$Z_b = \max[0, 0.02 - 0.05(x - 10)^2], h = 0.4 - Z_b$$

计算分三种工况:

静水: 上下游边界给予恒定水位 0.66 m。

有激波混合流: 上流边界给予单宽流量 $q = 0.18 \text{ m}^3/\text{s}$, 下游给予水位 -0.07 m。

无激波混合流: 上流边界给予单宽流量 $q = 0.53 \text{ m}^3/\text{s}$, 下游给予水位 0.66 m。

图 4~6 分别为三种工况下, 水位解析解与数值解的对比, 并比较显式与隐式算法计算结果。由图知, 隐格式算法数值解与显格式基本一致, 均与解析解吻合良好, 说明本文 LU-SGS 隐格式 FVM 方法能够成功模拟该复杂水流问题。

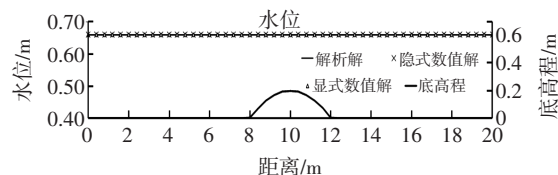


图 4 静水条件下水位对比

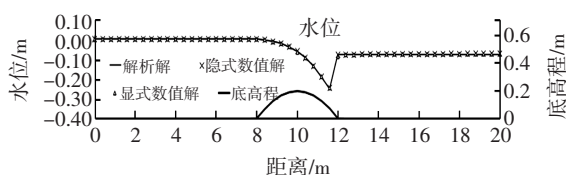


图 5 有激波条件下水位对比

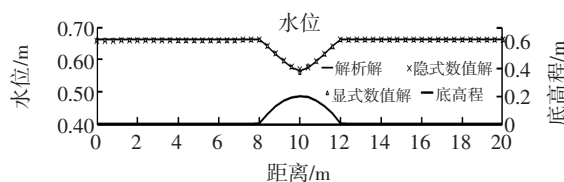


图 6 无激波条件下水位对比

4.2 算例 2

4.2.1 丹东港海域数学模型的建立

丹东港(陈志昌, 2007)位于辽东半岛东北部, 鸭绿江入海口西岸, 与朝鲜绸缎岛一水相隔, 是我国大陆海岸线北端的国际贸易商港。

模型上边界取自丹东浪头港区, 外海边界至 -50 m 等深线, 西侧边界至石城岛, 东侧至朝鲜大和岛。模型总长约 150 km, 宽 110 km, 大东港区局部水域网格加密(图 7), 最小网格边长约 35 m, 最大网格边长约 2 km, 单元总数 107 179 个, 时间步长 12 s (显式时间步长仅为 1.2 s), 超松弛系数取 1.1。

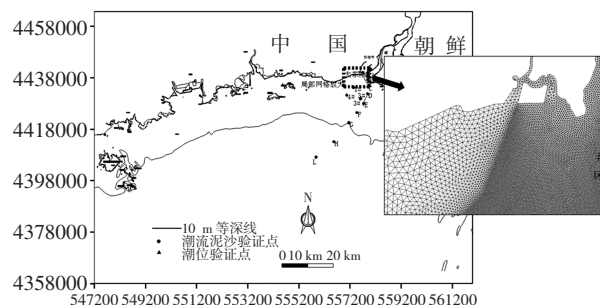


图 7 数学模型范围示意图

4.2.2 关键问题的处理

(1) 开边界

外海边界由东中国海模型提供控制潮位, 上游边界由实测水文资料提供潮位过程。

(2) 动边界

考虑到模拟海域浅滩较多, 滩地随着潮位变化出露和淹没, 计算中要求正确反映浅滩的干湿特征, 需采用适当的动边界处理技术。本项研究中采用了干湿法, 根据计算单元水深判断是否露滩, 当水深小于某一控制水深时, 将该单元作为陆地处理, 若水深大于控制水深则重新参与计算。为避免水量不平衡, 动边界控制水深采用 0.02 m。

(3) 糙率处理

糙率是潮流计算的主要计算参数之一, 反映了潮流运动过程中的阻力特性, 糙率选取正确与否对

计算结果有直接影响。糙率是一个综合参数,与床面泥沙特性、水深及地形形态都有一定关系,本文选用了附加糙率公式(辛文杰,1993),考虑水深变化后的糙率响应,取 $0.013+0.012/H$ 。

(4) 悬沙源汇函数处理(窦国仁,1995)

泥沙源汇函数可表示为:

$$F_s = -\alpha W(S - \beta S_*) \quad (4-1)$$

其中: α 为悬沙沉降概率; W 为悬沙沉降速度(中值粒径取絮团当量粒径 0.03 mm); S_* 为水流挟沙力;

$$\beta = \begin{cases} 1, & S > S_* \\ 1, & S \leq S_* \text{ 且 } V > V_c \\ S/S_*, & S \leq S_* \text{ 且 } V \leq V_c \end{cases}, \quad V_c \text{—以潮流垂线}$$

平均流速表示的泥沙起动流速。

4.2.3 模型验证

模型验证资料采用 2010 年 9 月 24 日-9 月 25

日同步观测的大潮水文测验资料,验证点见图 7。

潮位验证结果如图 8,潮流验证见图 9,含沙量验证见图 10。从验证结果来看,除个别点外,计算潮位和流速流向无论是大小还是相位均与实测资料相近,大部分站点计算值和实测值吻合较好,相对误差均在 10% 以内。由于本模型全水域采用均匀沙,无法模拟不同水域泥沙粒径、容重、颗粒形状不同等方面因素,故含沙量验证偏差相对较大,但总体来说,含沙量验证能够反映大东港海域泥沙的分布特征。

5 结论

非结构网格有限体积法显式算法应用较多,隐式较少。本文在前人研究的基础上,深入讨论 LU-SGS 隐式算法的应用问题。经数值水槽试验研究,

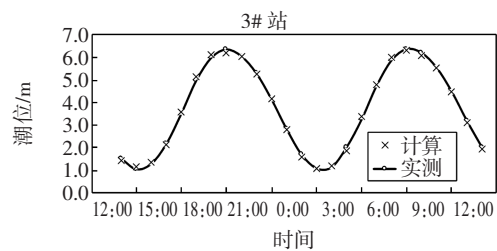
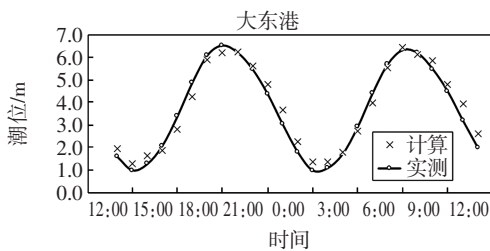


图 8 大潮潮位验证

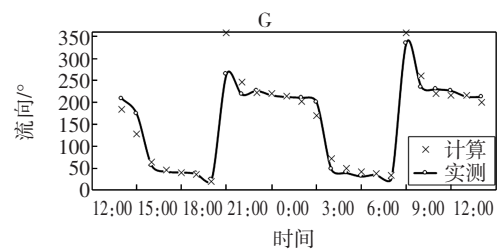
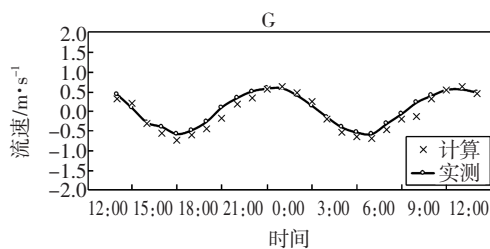
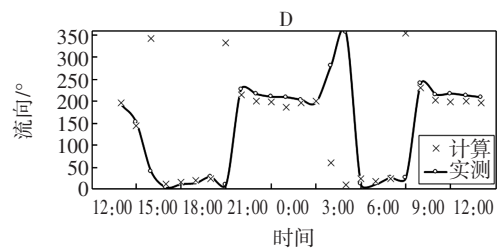
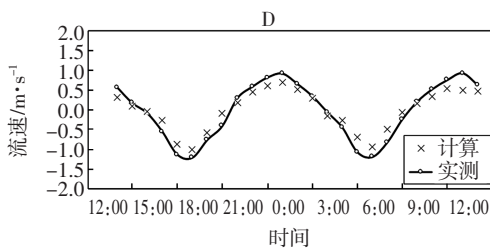
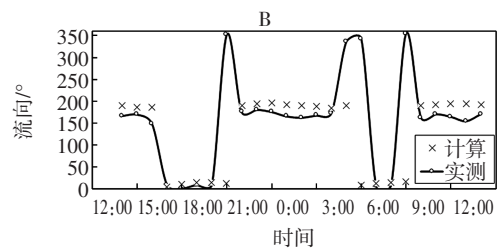
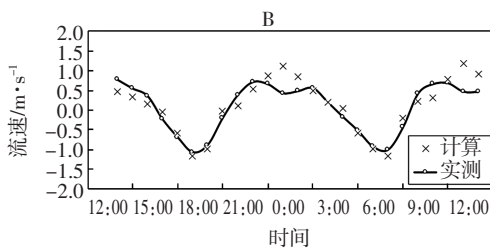


图 9 大潮潮流验证

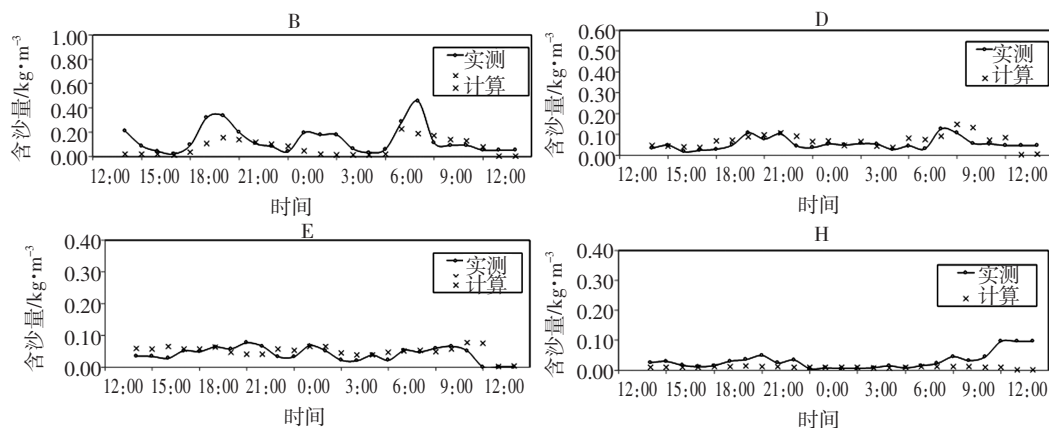


图 10 大潮含沙量验证

LU-SGS 隐式算法引入超松弛系数后, 可以明显提高计算收敛速度, 超松弛系数取值范围一般为 1~1.3。

基于 LU-SGS 隐式算法, 建立了丹东港海域高分辨率潮流悬沙数学模型, 计算结果表明, 该算法计算稳定性好, 计算精度满足规程要求, 说明模型具有模拟大范围海域潮流泥沙运动的能力。

参 考 文 献

- Begnudelli L, Sanders B F, 2006. Unstructured Grid Finite-volume Algorithm for Shallow-water Flow and Scalar Transport with Wetting and Drying. *Journal of Hydraulic Engineering*, 132(4): 371-384.
- Bladé E, Gómez-Valentín M, 2008. Preserving Steady-state in One-dimensional Finite-volume Computations of River Flow. *Journal of Hydraulic Engineering*, 134(9): 1343-1347.
- Casulli V, Cheng R T, 1992. Semi-implicit Finite Difference Methods for Three Dimensional Shallow Water Flow. *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, 15: 629-648.
- C Kuang, S Chen, 2011. A Two-dimensional Morphological Model Based on A Next Generation Circulation Solver I: Formulation and Validation. *Coastal Engineering*, 59: 1-13.
- Hu D, Fan B, 2011. A Semi-implicit 3-D Numerical Model Using Sigma-coordinate for Non-hydrostatic Pressure Free-surface Flows. *Journal of Hydrodynamics*, 23(2): 212-223.
- Jameson A, Yoon S, 1987. Lower-upper Implicit Schemes with Multiple Grids for the Euler Equations. *AIAA Journal*, (7): 929-935.
- Kuiri S N, Pramanik K, Sen D, 2008. Finite Volume Model for Shallow Water Equations with Improved Treatment of Source Terms. *Journal of Hydraulic Engineering*, 134(2): 231-242.
- Nguyen D K, Shi Y, Wang S, 2006. 2D Shallow-water Model Using Unstructured Finite-volumes Methods. *Journal of Hydraulic Engineering*, 132(3): 258-269.
- Simões F, 2011. Finite Volume Model for Two-dimensional Shallow Environmental Flow. *Journal of Hydraulic Engineering*, 137 (2): 173-182.
- Yuzhi Sun, Z J Wang, 2007. Efficient Implicit LU-SGS Algorithm for High-Order Spectral Difference Method on Unstructured Hexahedral Grids. 45th AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit, Reno, Nevada: 8-11.
- 陈志昌, 罗小峰, 2007. 丹东港大东港区物理模型试验研究. 南京水利科学研究院.
- 窦国仁, 窦希萍, 2003. 潮流和波浪作用下的悬沙运动及数学模拟. 窦国仁论文集: 824-836
- 刘玉玲, 周孝德, 杨国丽, 2010. 基于 WENO 格式的天然河道丁坝群二维水流数值模拟. *水动力学研究与进展 A 辑*, 25 (1): 93-98.
- 卢康明, 李光焱, 2010. 非结构网格浅水方程隐式解法. *水动力学研究与进展*, 25 (2): 247-253.
- 王波兰, 2003. 二维非结构网格 Euler 方程的 LU-SGS 算法. 南京航空航天大学.
- 王志力, 耿艳芬, 金生, 2005. 具有复杂计算域和地形的二维浅水流动数值模拟. *水利学报*, 36 (4): 439-444.
- 辛文杰, 1993. 河口、海湾平面潮流数值计算中的几个问题. *水动力学研究与进展*, 8 (3): 348-354.
- 杨彬, 2008. 非结构网格上浅水方程的 LU-SGS 隐式算法. *河海大学学报 (自然科学版)*, 36 (4): 483-487.
- 张宏伟, 康海贵, 2009. 具有复杂计算域和地形的潮汐流动数值模拟. *水科学进展*, 20 (1): 118-123.

(本文编辑: 李晓光)