

邢康宇, 陆洪智, 陈耀春, 等. 成层土中轴横受荷桩水平响应的非线性解[J]. 地质科技通报, 2021, 40(1): 166-174.

Xing Kangyu, Lu Hongzhi, Chen Yaochun, et al. Nonlinear solutions of lateral response for piles under axial and lateral load embedded in layered soils[J]. Bulletin of Geological Science and Technology, 2021, 40(1): 166-174.

成层土中轴横受荷桩水平响应的非线性解

邢康宇^{1a,1b}, 陆洪智^{1a,1b}, 陈耀春², 王新国², 张凯顺^{1a,1b}, 吴文兵^{1a,1b,1c}

(1. 中国地质大学(武汉) a. 工程学院; b. 岩土钻掘与防护教育部工程研究中心; c. 浙江研究院, 武汉 430074;

2. 中铁第四勘察设计院集团有限公司, 武汉 430063)

摘要: 对于承受轴向荷载的水平受荷桩, 以往研究大多基于线弹性或弹塑性水平荷载传递模型。为提升轴横受荷桩的计算设计水平, 采用轴向荷载传递法计算桩身轴力, 考虑桩身轴力引起的 $P-\Delta$ 效应, 基于双曲线型水平荷载传递模型考虑桩-土体系变形的非线性特征, 对成层土中轴横受荷桩的水平响应进行分析求解, 得到了轴横荷载作用下桩身变形和内力的非线性有限差分解, 并采用 MATLAB 语言编制了计算程序。使用模型试验算例与基于现场试验的有限元算例对非线性解的准确性进行对比验证, 结果表明: 计算结果与算例数据吻合良好, 可靠性较高; 采用不同荷载传递模型的计算结果在不同荷载水平下有所差异, 在较大荷载水平下桩-土变形的非线性特点不容忽视。

关键词: 轴横受荷桩; $P-\Delta$ 效应; 双曲线模型; 非线性解; 有限差分

中图分类号: P642.1 **文章编号:** 1000-7849(2021)01-0166-09 **收稿日期:** 2019-09-02

doi: 10.19509/j.cnki.dzkq.2021.0112

开放科学(资源服务)标识码(OSID):



Nonlinear solutions of lateral response for piles under axial and lateral load embedded in layered soils

Xing Kangyu^{1a,1b}, Lu Hongzhi^{1a,1b}, Chen Yaochun²,
Wang Xinguo², Zhang Kaishun^{1a,1b}, Wu Wenbing^{1a,1b,1c}

(1a. Faculty of Engineering; 1b. Engineering Research Center of Rock-Soil Drilling & Excavation and Protection of Ministry of Education; 1c. Zhejiang Institute, China University of Geosciences(Wuhan), Wuhan 430074, China; 2. China Railway Siyuan Survey and Design Group Company Limited, Wuhan 430063, China)

Abstract: Most of the previous studies were based on the linearly elastic or linearly elastic-plastic horizontal load transfer model for the laterally loaded piles undergoing axial load. In order to improve the calculation and design accuracy of axially and laterally loaded piles, considering the $P-\Delta$ effect caused by axial force of piles using the axial load transfer method, this paper proposes a nonlinear analysis approach based on hyperbola load transfer model to calculate the lateral response of elevated piles embedded in layered soils. The nonlinear finite difference solutions of the deformation and internal force for the pile shaft are obtained, and the relevant computer program is developed by MATLAB software. The accuracy of the nonlinear solutions is verified by utilizing the model test and the finite element calculation based on the field test. The calculation results showed that the results obtained by the nonlinear approach are in good agreement with the

基金项目: 国家自然科学基金项目(51678547); 中国科协青年人才托举工程(2018QNR0001); 中铁第四勘察设计院集团有限公司校企合作项目(2017K003-1)

作者简介: 邢康宇(1994—), 男, 现正攻读土木工程专业硕士学位, 主要从事桩基工程理论与技术方面的研究工作。E-mail: 767259190@qq.com

通信作者: 陆洪智(1974—), 男, 副教授, 主要从事地基处理与基础工程方向的研究工作。E-mail: luhongzhi@sohu.com

model test and finite element data. Besides, the results calculated by the approaches with different load transfer models are compared under different load levels. The nonlinear characteristics of pile-soil deformation cannot be ignored in calculation of lateral pile responses under large load.

Key words: pile under axial and lateral load; $P-\Delta$ effect; hyperbolic model; nonlinear solution; finite difference method

通常情况下,桥梁、海上平台等高桩基础不但受到来自于风、波浪、海流、交通车辆制动力等横向水平荷载作用,还承受着上部结构自重等带来的轴向荷载,此时桩体处于轴向、横向荷载联合作用,受力性状较为复杂。当前,在各类桩基水平承载力计算规范中,通常都不考虑轴向荷载的影响,这样便于简化计算及应用,然而随着现代建设中轴横受荷高桩基础的应用越来越广泛,不考虑轴向荷载的桩基水平承载力计算显得有些不足。现有研究^[1]表明,对于轴横受荷桩,水平荷载会使桩身产生一定的弯矩和水平变形,轴向荷载在桩身各处产生的轴力会因为桩身的水平变形对桩体产生附加弯矩,该附加弯矩又使桩身挠曲变形进一步增加,即 $P-\Delta$ 效应。尤其对于地面以上自由段较长的高桩基础,在承受较大荷载、地基土强度较弱时, $P-\Delta$ 效应不可忽视,这种情况下,准确地预测水平荷载下高桩基础的响应有着重要的工程意义。

目前关于轴横受荷桩水平响应的理论计算主要基于弹性地基梁法,即将桩体视为弹性梁,根据弹性地基梁的挠曲方程求解桩身位移与内力。基于此,栾鲁宝等^[2]、Ding 等^[3]将土体视为三维连续介质,考虑桩顶竖向静荷载作用的影响,求得了桩基水平振动响应解析解;赵明华^[4]、赵明华等^[5]分别采用 m 法和 c 法考虑 $P-\Delta$ 效应,推导得到了倾斜荷载作用下单层均质土中基桩内力及位移的幂级数解;陈林靖等^[6]基于综合刚度原理和双参数法推导了计算纵横受荷桩水平响应的有限差分解。然而上述分析^[4-6]均假定地基土反力与桩身水平位移成正比,适用于桩身发生小位移的情况。张磊等^[7]、陈鑫等^[8]基于 Hsiung^[9]提出的弹塑性模型,得到了纵、横向荷载下桩身侧向变形和内力的幂级数解,可以考虑桩体出现较大水平变形时地基土体发生弹塑性变形的特点;竺明星等^[10-11]也基于类似的弹塑性模型得出了纵横荷载单桩的矩阵传递解。然而,对于轴向、水平荷载联合作用的基桩而言,受力形式复杂,桩—土体系往往因变形较大而呈现出较为明显的非线性变形特征,上述方法^[10-11]仍然无法反映这一特点。

另外基桩桩顶作用有轴向荷载时,轴向荷载通过桩侧摩阻力传递到桩周土层,致使桩身轴力沿深度变化,各土层摩阻力的发挥规律在不同的轴向荷载大小、桩周土土性、基桩尺寸等条件下各不相同,

桩身轴力的分布规律也千差万别,然而上述研究^[2-8,10-11]在计算附加弯矩时,仅仅将桩身轴力视为沿桩身保持不变或按比例变化,与真实情况有所出入,鲜有文献考虑桩身轴力实际的分布规律以计算桩身附加弯矩效应。

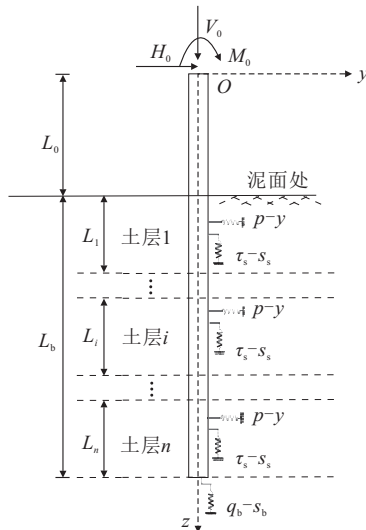
Kim 等^[12]考虑桩侧土体的非线性变形,基于 Kondner^[13]提出的双曲线型土体本构模型,提出了适用于水平受荷桩的双曲线型桩—土水平荷载传递模型;王璇等^[14]通过模型试验对抗滑桩水平变形过程中的位移场进行了详细研究。张乾青等^[15]在单桩轴向荷载传递法的基础上,提出了一种考虑成层土中单桩非线性受力性状的简化迭代算法,可有效计算轴向荷载作用下桩身轴力分布。

本文通过引入双曲线型水平荷载传递模型考虑桩—土体系的非线性变形情况,同时基于轴向荷载传递法预测桩身轴力的分布情况,考虑桩身轴力引起的 $P-\Delta$ 效应与地基土的成层性,推导得到轴向与横向荷载共同作用下高桩基础水平响应的非线性有限差分解,并且给出了相应的求解算法,编制了相应的 MATLAB 计算程序。最后结合模型试验算例和有限元算例以验证本文方法的合理性与适用性。

1 基本方程

1.1 方程的建立

假设轴向荷载不会引起桩侧地基土抵抗桩体水平位移能力的变化,在轴向荷载作用下桩的弯曲符合欧拉—伯努利梁理论,根据弹性梁理论对桩体的弯矩、位移进行计算。计算模型如图 1 所示,基于 Winkler 地基模型与轴向荷载传递法,在桩侧与桩端分别采用水平与轴向非线性弹簧模拟桩—土相互作用,水平非线性弹簧模拟地基水平土反力与桩体水平位移的关系,轴向非线性弹簧模拟桩侧摩阻力、桩端阻力与桩体竖向位移的关系。以桩顶中点为原点建立坐标系,横坐标 y 代表桩体任一点的水平位移,纵坐标 z 为桩顶以下任意长度,桩顶承受水平荷载 H_0 、轴向荷载 V_0 、弯矩 M_0 的作用。桩身自由段长度为 L_0 ,地面埋深段长度为 L_b ,桩径为 d ,桩体的刚度为 EI 。考虑地基土的成层性,将桩长埋深段范围内桩侧土划分为 n 层,每层土厚度为 $L_i (1 \leq i \leq n)$ 。



H_0 . 桩顶承受水平荷载; V_0 . 轴向荷载; M_0 . 弯矩; L_0 . 桩身自由段长度; L_b . 地面埋深段长度; d . 桩径; EI . 桩体刚度

图 1 计算模型

Fig. 1 Calculation model

任取土层 i 内桩体一微单元体进行受力分析(图 2), 其中 Q 、 M 和 N 分别表示微单元体受到的剪力、弯矩和轴力, p 为单位桩长受到的地基土反力。由水平力平衡、弯矩平衡以及梁的弯曲理论可得:

$$\left. \begin{aligned} Q &= Q + dQ + p dz \\ M + Q dz &= M + dM + N dy + \frac{1}{2} p (dz)^2 \\ M &= EI \frac{d^2 y}{dz^2} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

由式(1)可得埋深段任一土层 i 的桩身挠曲微分方程, 进一步忽略桩侧土反力, 分别求得桩身埋深段、自由段桩身挠曲微分方程:

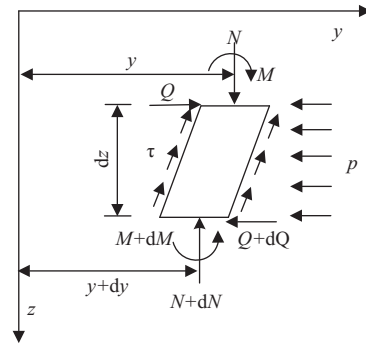
$$\left. \begin{aligned} EI \frac{d^4 y}{dz^4} + N_i \frac{d^2 y}{dz^2} + \left(\frac{dN}{dz} \right)_i \frac{dy}{dz} + p &= 0 (z > L_0) \\ EI \frac{d^3 y}{dz^3} + N \frac{dy}{dz} &= Q (z \leq L_0) \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

式中: $N_i \frac{d^2 y}{dz^2} + \left(\frac{dN}{dz} \right)_i \frac{dy}{dz}$ 、 $N \frac{dy}{dz}$ 项表示轴向荷载 N 对桩体水平响应的影响。

1.2 地基土反力的计算及参数选取

挠曲方程式(2)中地基土反力 p 采用桩—土水平荷载传递模型计算, 通过假设埋深处地基土反力 p 与桩体水平位移 y 满足一定的数学关系($p-y$ 曲线), 来模拟桩—土之间的水平相互作用。

图 3 为目前几种较常用的水平荷载传递模型, 其中线弹性模型与弹塑性模型均假设地基反力模量 ($k = p/y$) 在桩土弹性变形过程中保持不变, 而许



Q . 微元体受到的剪力; M . 微元体受到的弯矩; N . 微元体受到的轴力; p . 单位桩长受到的地基土反力

图 2 土层 i 内桩体微单元受力图

Fig. 2 Force diagram of pile segment in the i th soil layer

多学者发现这一假定与实际过程不符, Kumar^[16] 结合水平受荷桩现场试验得到的结果表明, 地基反力模量 k 会随着桩体水平变形逐渐减小, 具有明显非线性变化的特征。为反映桩—土体系变形的非线性特点, 本文基于 Kim 等^[12] 提出的双曲线型 $p-y$ 曲线(如图 3 所示)计算地基土反力 p , 该模型中桩侧地基土反力与桩的水平位移满足如下双曲线函数关系:

$$p = \frac{y}{\frac{1}{k_{in}} + \frac{y}{p_u}} \quad (3)$$

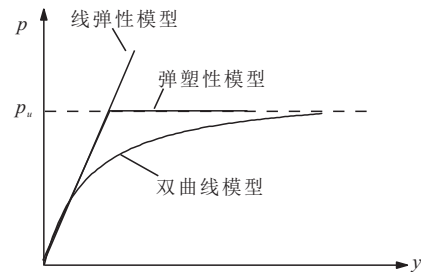


图 3 不同的荷载传递模型

Fig. 3 Different load transfer model

该模型曲线主要由两参数确定, 初始地基反力模量 k_{in} 以及极限地基土反力 p_u 。荷载传递原理为: 桩体水平位移较小时, 桩侧土体变形处于弹性状态, 桩土相互作用力由初始地基反力模量 k_{in} 确定, 随着桩体位移的增加, 桩侧土体变形随之增大, 地基反力模量 k 随之减小, 直至桩侧地基土反力达到极限值 p_u , 整个荷载传递过程体现了 k 的非线性变化特点。初始地基反力模量 k_{in} 的表达式为:

$$k_{in} = \eta_h (z - L_0) b_0$$

其中 b_0 为桩径影响系数, 取 $b_0 = d/d_r$, $d_r = 1$; η_h 为初始地基反力系数, Reese^[17] 给出了相应的取值范围, 其取值与建筑桩基技术规范^[18] 中 m 法地

基反力模量比例系数的取值相近,因此也可按规范建议取值。关于极限地基土反力 p_u 的计算,Guo^[19] 结合理论模型与现场实测结果提出了极限地基土反力统一表达式:

$$p_u = \begin{cases} N_g K_p \gamma_s d^{2-n} (\alpha_0 + z)^n & (\text{砂土}) \\ N_g S_u d^{1-n} (\alpha_0 + z)^n & (\text{黏土}) \end{cases} \quad (4)$$

式中: γ_s 为土的单位重度; S_u 为黏土不排水抗剪强度。朱碧堂^[20] 通过水平拉拔锚锭板试验确定了式(4)中参数的取值范围,对于砂土,取 $\alpha_0 = 0$, $n = 1.7$, $N_g = 0.55 \sim 2.5$; 对于黏土,取 $\alpha_0 = 0 \sim 0.4$, $n = 0.36 \sim 1.0$, $N_g = 0.7 \sim 1.6$; K_p 为被动土压力系数, γ_s 为地基土重度。

1.3 桩身轴力的计算及参数选取

在轴向荷载作用下,桩周土会在桩侧作用有摩阻力,影响桩身轴力的分布,进而影响轴力产生的附加弯矩的大小,准确计算桩身轴力的分布有助于精确求解桩身水平响应。

假设水平荷载不影响桩身轴力的分布,后文有限元模拟的结果也证明这一假设的合理性。本文根据轴向受荷桩的荷载传递法计算桩身轴力,其基本思想是采用轴向荷载传递模型模拟桩-土荷载相互作用关系,桩侧土(或桩端土)采用非线性弹簧的应力应变关系表示桩侧摩阻力 τ_s (或桩端阻力 q_b) 与桩身轴向位移 s 的关系。本文采用双曲线型侧阻与端阻荷载传递曲线来建立轴向荷载传递模型。

侧阻双曲线荷载传递曲线^[21] 的表达式为:

$$\tau_s(z) = \frac{s_s(z)}{f + g s_s(z)} \quad (5)$$

式中: $\tau_s(z)$ 为埋深 z 处的桩侧摩阻力; $s_s(z)$ 为埋深 z 处桩-土界面桩土相对位移; f 值可表示为 $f = r_0 / G_s \ln(r_m / r_0)$, 其中 r_0 为桩的半径, r_m 为桩的影响半径, G_s 为桩侧土的剪切模量,桩侧土为成层土

时, $r_m = 2.5 \frac{\sum_{i=1}^n G_{si} H_i}{G_{sm}} (1 - \frac{\sum_{i=1}^n \nu_{si} H_i}{L})$, 其中, ν_{si} 为第 i 层土的泊松比, G_{si} 为第 i 层土的剪切模量, G_{sm} 为土层中最大剪切模量; g 值可由式 $1/g = \tau_{su} / R_{sf}$ 推得,其中 R_{sf} 为桩侧土侧摩阻力破坏比,其值可取为 $0.80 \sim 0.95$, τ_{su} 为桩-土界面的极限剪切应力。

端阻双曲线荷载传递曲线^[15] 与侧阻类似:

$$q_b = \frac{s_b}{f_b + g_b s_b} \quad (6)$$

式中: q_b 为单位端阻; f_b 可表示为 $f_b = \pi r_0 (1 - \nu_b) / 4 G_b$, 其中 ν_b 和 G_b 分别为桩端土泊松比和剪切模量; g_b 可由下式推得: $1/g_b = R_b q_{bu}$, 其中 R_b 为端阻破坏比,可取 $0.75 \sim 0.80$, q_{bu} 为桩端土单位极限承载力。

利用上述侧阻与端阻荷载传递函数,结合变形协调法^[15] 可获得桩身侧摩阻力分布,同时考虑桩身自重,进而可计算桩身轴力分布。

2 方程的求解

2.1 挠曲方程的有限差分法

求解式(2),可得成层地基中轴横荷载作用下高桩基础的水平响应,考虑到高阶微分方程的复杂性与地基的成层性,本文采用有限差分法对式(2)进行求解。如图4所示,将桩体自由段与任一土层 i 埋深段离散化,离散步长为 h ,自由段桩体有 $m_0 = L_0 / h$ 分段,埋深段任一桩段 i 有 $m_i = L_i / h$ 分段,埋深

段共有 $m_b = \sum_{i=1}^n m_i$ 分段,每分段上下均设2个虚拟差分节点。依据中心差分原理,式(2)中微分式可用差分式表示^[20]:

$\left(\frac{dy}{dz} \right)_{j(i)} = \frac{y_{j+1(i)} - y_{j-1(i)}}{2h}$,进一步可得到2次、3次和4次微分的差分表达式,其中下标 $j(i)$ 代表为任一离散桩段 i ($0 \leq i \leq n$) 中的节点 j ($0 \leq j \leq m_i$),据此将自由段与埋深段桩身每个节点处的挠曲方程式(2)转化为如下的差分形式:

$$\left. \begin{aligned} & -y_{j-2(0)} + \varphi_{j(0)} y_{j-1(0)} - \\ & \varphi_{j(0)} y_{j+1(0)} + y_{j+2(0)} = \frac{2h^3}{EI} H_0 \text{ (自由段)} \\ & y_{j-2(i)} + \psi_{j(i)} y_{j-1(i)} + \omega_{j(i)} y_{j(i)} + \\ & \varphi_{j(i)} y_{j+1(i)} + y_{j+2(i)} + \frac{h^4}{EI} p_{j(i)} = 0 \text{ (埋深段)} \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

式中各项参数的表达式为: $\varphi_{j(0)} = 2 - \frac{N_{j(0)} h^2}{EI}$, $\psi_{j(i)} = -4 - \frac{(N_{j+1(i)} - 4N_{j(i)} - N_{j-1(i)}) h^2}{4EI}$, $\omega_{j(i)} = 6 - \frac{2N_{j(i)} h^2}{EI}$, $\varphi_{j(i)} = -4 + \frac{(N_{j+1(i)} + 4N_{j(i)} - N_{j-1(i)}) h^2}{4EI}$,

$$p_{j(i)} = \frac{y_{j(i)}}{\frac{1}{k_{in j(i)}} + \frac{y_{j(i)}}{p_{uj(i)}}}。$$

2.2 边界条件

在桩顶 $z=0$ 处,考虑桩顶自由的情况,节点 $0(0)$ 处有弯矩 $M_{0(0)} = M_0$,将其表示为差分形式为:

$$y_{-1(0)} - 2y_{0(0)} + y_{1(0)} = \frac{M_0 h_0^2}{EI} \quad (8)$$

在桩底节点 $m_{n(n)}$ 处,桩身剪力与弯矩满足:有 $Q_{m_{n(n)}} = M_{m_{n(n)}} = 0$,其差分形式分别为:

$$\left. \begin{aligned} & -y_{m_{n(n)}-2} - \varphi_{m_{n(n)}} y_{m_{n(n)}-1} + \\ & \varphi_{m_{n(n)}} y_{m_{n(n)}+1} + y_{m_{n(n)}+2} = 0 \\ & y_{m_{n(n)}-1} - 2y_{m_{n(n)}} + y_{m_{n(n)}+1} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

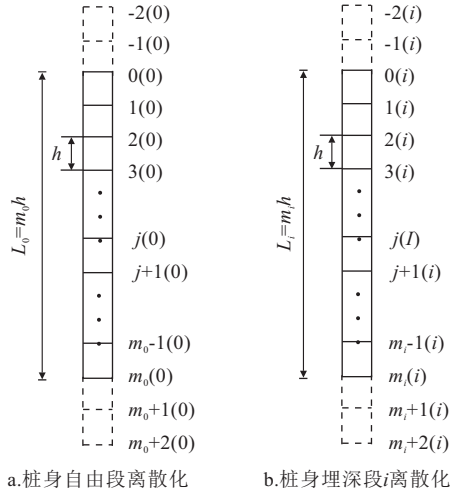


图 4 桩身离散化示意图

Fig. 4 Diagram of the discretion of piles

在桩身自由段、桩身各埋深段之间交界面要满足连续条件,即位移、转角、弯矩、剪力相等,由此可得各交界面处的虚拟节点之间的关系:

$$\left. \begin{aligned} y_{m_{i-1}-1(i-1)} &= y_{-1(i)}, y_{m_{i-1}-2(i-1)} = y_{-2(i)}, y_{m_{i-1}} \\ &= y_{0(i)}, y_{m_{i-1}+1(i-1)} = y_{1(i)}, y_{m_{i-1}+2(i-1)} = y_{2(i)} \end{aligned} \right\} \quad (1 \leq i \leq n) \quad (10)$$

据此可消去各交界面处设置的虚拟节点。

2.3 挠曲方程的有限差分分解

联立各节点处差分方程式(7)与方程式(8)~(10),可得到非线性差分方程组 $F(Y)$,其矩阵形式如下:

$$F(Y) = [K]Y + [P] - [C] = 0 \quad (11)$$

式中: $Y = (y_{-2(0)}, y_{-1(0)}, \dots, y_{j(i)}, \dots, y_{m_n+2(n)})$ 为桩身节点未知位移向量,一共包含 $m+5$ 个未知变量。 $[K]$ 为 $(m+5) \times (m+5)$ 阶桩身位移系数矩阵,其中: $[K]_{1,2} = 1, [K]_{1,3} = -2, [K]_{1,4} = 1; [K]_{q,q-1} = -1, [K]_{q,q} = \varphi_{q-2(0)}, [K]_{q,q+3} = 1, [K]_{q,q+2} = -\varphi_{q-2(0)}, (q=2,4,\dots,m_0+2); [K]_{q,q-2} = 1, [K]_{q,q} = \omega_{j(i)}, [K]_{q,q+1} = \varphi_{j(i)}, [K]_{q,q-1} = \psi_{j(i)}, [K]_{q,q+2} = 1 (i=1,2,3,\dots,n, j=q - \sum_{0}^{i-1} m_{i-1} - 3, q=m_0+3,\dots,m+3); [K]_{m+4,m+1} = -1, [K]_{m+4,m+2} = -\varphi_{m_n(n)}, [K]_{m+4,m+4} = \varphi_{m_n(n)}, [K]_{m+4,m+5} = 1, [K]_{m+5,m+2} = 1, [K]_{m+5,m+3} = -2, [K]_{m+5,m+4} = 1; 其余项为 0。 $[P]$ 为 $(m+5) \times 1$ 阶地基土反力矩阵,其中: $[P]_{q,1} = \frac{h^4}{EI} p_{j(i)} (i=1,2,3,\dots,n, j=q - \sum_{0}^{i-1} m_{i-1} - 3, q=m_0+3, m_0+4,\dots,m+3)$ 其余项为 0。 $[C]$ 为 $(m+5) \times 1$ 阶荷载矩阵,其中: $[C]_{1,1} =$$

$\frac{M_0 h_0^2}{EI}, [C]_{q,1} = \frac{2h^3}{EI} H_0 (q=2,4,\dots,m_0+2)$, 其余项为 0。

由于按双曲线模型确定的地基土反力形式较为复杂,导致最终确定的差分方程组变为复杂的非线性方程组(11),求解也变得更加困难。对此,本文采用牛顿迭代法^[22]对上述非线性方程组进行求解,具体的求解流程图如图 5 所示。其本质是利用方程组(11)的雅克比矩阵 $J[Y]$,将非线性方程组转化为线性方程组进行求解,雅克比矩阵 $J = F'(Y)$,为 $(m+5) \times (m+5)$ 阶矩阵,其中: $[J]_{q,q-1} = -1, [J]_{q,q} = \varphi_{q-2(0)}, [J]_{q,q+3} = 1, [J]_{q,q+2} = \varphi_{q-2(0)} (q=2,4,\dots,m_0+2); [J]_{q,q-2} = 1, [J]_{q,q} = \xi_{j(i)}, [J]_{q,q-1} = \psi_{j(i)}, [J]_{q,q+1} = \varphi_{j(i)}, [J]_{q,q+2} = 1 (j=q - \sum_{0}^{i-1} m_{i-1} - 3, i=1,2,3,\dots,n; q=m_0+3, m_0+4,\dots,m+3); [J]_{m+4,m+1} = -1, [K]_{m+4,m+2} = -\varphi_{m_n(n)}, [J]_{m+4,m+4} = \varphi_{m_n(n)}, [J]_{m+4,m+5} = 1, [J]_{m+5,m+2} = 1, [J]_{m+5,m+3} = -2, [J]_{m+5,m+4} = 1, 其余项为 0, 矩阵中 $\xi_{(j)i}$ 为:$

$$\xi_{j(i)} = \frac{h^4}{EI} \left(\frac{1}{k_{inj(i)}} + \frac{y_{j(i)}}{p_{uj(i)}} \right)^2 + \omega_{j(i)} \quad (12)$$

进行迭代时,需要首先设迭代精度 e 以及初值 Y^0 , 为了减少迭代的次数,方便计算,可按 $p_{j(i)} = k_{inj(i)} y_{j(i)}$ 计算矩阵 $[P]$,即可将 $F(Y)$ 转化为线性方程组 $F_0(Y)$,将其解 Y^0 视为 $F(Y)$ 的初始近似解。据此本文编制了相应的 MATLAB 计算程序对其进行求解,得到桩身位移响应 Y 后可以采用下

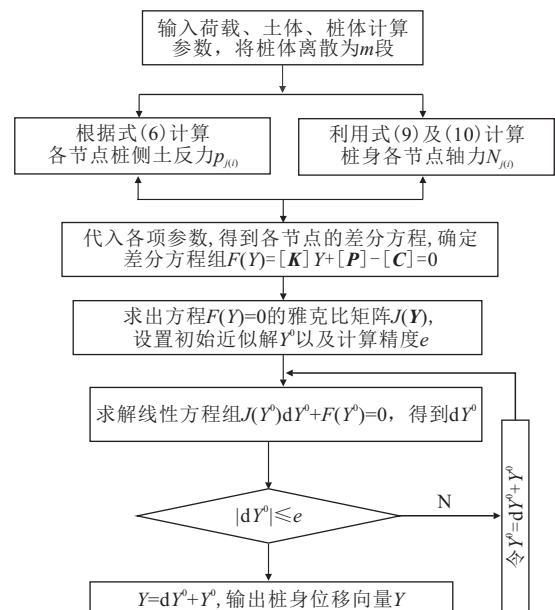


图 5 求解流程图

Fig. 5 Flow chart of solution

式确定任一桩段 i 节点 j 处的弯矩 $M_j(i)$:

$$M_{j(i)} = \frac{EI}{h^2} (y_{j-1(i)} - 2y_{j(i)} + y_{j+1(i)}) \quad (13)$$

值得注意的是,若控制式(2)中地基土反力的计算采用线弹性或弹塑性模型,则上述非线性差分方程组即可退化为线性方程组,可以采用矩阵的线性计算^[20]求出桩体的位移响应 Y ,进而获得轴横受荷高桩的线弹性与弹塑性差分解。

3 算例验证

3.1 模型试验算例

Sastry 等^[24]对成层砂土中的模型桩进行了倾斜加载试验。该模型桩为 PVC 管桩,桩径为 73 mm,壁厚为 7.4 mm,抗弯刚度 $EI = 1.41 \text{ kN} \cdot \text{m}^2$,桩长为 1 250 mm,桩的入土长度为 1 120 mm。地基土为成层砂土,上层为松砂,厚度为 560 mm,重度为 13.3 kN/m^3 ,内摩擦角为 30° ;下层为密砂,厚度为 1 040 mm,重度为 15.5 kN/m^3 ,内摩擦角为 32.5° 。桩顶中心作用有倾斜荷载 $Q = 0.6Q_u = 0.604 \text{ kN}$,倾斜荷载与竖直方向成倾角 $\alpha = 30^\circ$ 。根据上述条件,对于上层松砂,选取 $\eta_h = 11\,000 \text{ kN/m}^3$, $N_g = 0.6$, $\alpha_0 = 0$, $n = 1.7$;下层密砂,选取 $\eta_h = 25\,000 \text{ kN/m}^4$, $N_g = 1.2$, $\alpha_0 = 0$, $n = 1.7$ 。由于模型桩尺寸较小,忽略桩身自重以及侧摩阻对桩身轴力的影响,依据本文方法计算得到桩身弯矩分布曲线,并与实测结果对比,如图 6 所示。

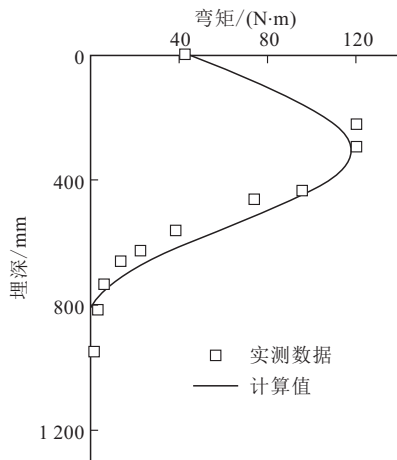


图 6 桩身弯矩预测值与实测值对比

Fig. 6 Comparison between predicted and measured bending moments of piles

结果显示本文计算结果与实测弯矩较为吻合,运用上述牛顿迭代法只需迭代数次便能得出结果,说明本文解与程序较为可靠。但上述模型试验算例由于尺寸原因,无法验证本文解在工程实例应用中

的精度,因此采用基于工程实例建立的有限元模型进行对比验证。

3.2 有限元算例

(1) 建模过程

采用有限元模型对本文理论解进行验证,为保证有限元模型的有效性,基于 Ng 等^[25]进行的灌注桩水平加载原位试验进行模拟验算。试验单桩直径为 1.5 m,埋深段桩长为 28 m,自由段桩长为 1.5 m。地基土体平均重度为 21 kN/m^3 ,桩身重度 24 kN/m^3 ,其余参数见表 1。通过有限元程序 ABAQUS,对该水平加载试验进行数值模拟,桩体采用线弹性模型进行模拟,桩周及桩端土体采用 Mohr-Coulomb 模型模拟,桩土接触采用接触对进行实现,通过三维实体模型进行建模,土体深度为 2 倍桩长,长、宽均为 20 倍桩径。有限元模拟时,由于文献[22]中未提供桩土材料的弹性模量、泊松比,因此在同类材料、土体参数取值范围内进行试算,使结果与原位加载试验接近,最终确定的桩土材料弹性模量、泊松比见表 1。

表 1 现场试验地基土主要物理参数

Table 1 Main physical properties of soils

土层	层厚/ m	内摩擦角/ ($^\circ$)	黏聚力/ kPa	弹性模量/ MPa	泊松比 ν
桩	—	—	—	4.2×10^4	0.2
回填土	3	12	8	40	0.31
砂土	3	28	13	65	0.33
黏土 1	4	14	30	18	0.4
黏土 2	17	18	35	26	0.4
风化岩	1	35	28	675	0.25

不考虑轴向荷载,使用本文方法计算上述灌注桩桩顶荷载位移曲线,依据地基土性质选取的计算参数如表 2 所示,并将其与有限元模拟结果和原位加载试验结果进行对比,如图 7 所示。对比结果显

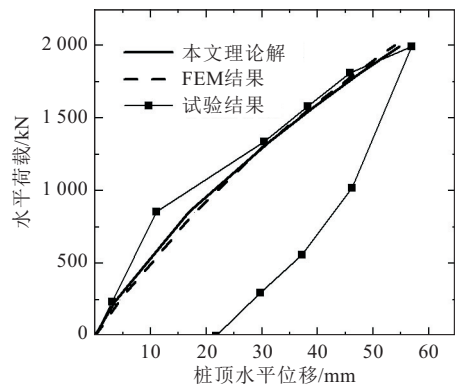


图 7 水平荷载—位移曲线

Fig. 7 Comparison of horizontal load and horizontal deflection from calculated, FEM analysis and field tests

示,三者结果较为一致,说明本文理论解选用的计算参数较为准确,此有限元模型也基本能够反映实际的土层条件与桩—土相互作用情况。因此,在此有限元模型的基础上,研究轴横受荷高桩的桩体内力与变形响应,能够反映实际桩土工作条件,并得到准确的加载结果。在上述有限元模型的基础上,建立桩体自由段长度 12 m,其余条件不变的轴横受荷桩有限元模型,在桩顶分别施加不同大小的轴向、水平荷载工况组合,模型网格划分竖直剖面如图 8 所示。

表 2 各土层理论计算参数

Table 2 Computed parameters of each soil layer

土层	地基反力系数 $\eta_h/(\text{MN} \cdot \text{m}^{-3})$	N_g	n	α_0
回填土	35	1.4	1.7	0
砂土	45	1.9	1.7	0
黏土 1	15	0.8	0.5	0.2
黏土 2	18	1	0.8	0.3
风化岩	100	2.3	1.7	0

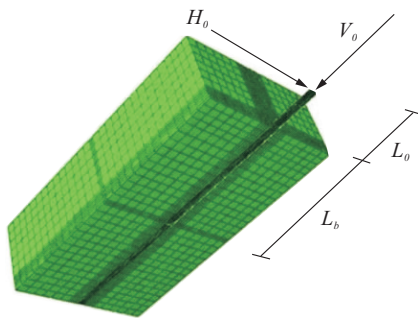


图 8 有限元计算模型

Fig. 8 Finite element calculation model

(2) 计算参数的确定

采用本文方法对上述有限元加载实例进行计算,双曲线型 $p-y$ 曲线模型中的相关计算参数见表 2。桩体轴力计算过程中,侧阻破坏比 R_{sf} 与端阻破坏比分别取 0.85 和 0.78;参数 f 由土体剪切模量 G_s 确定,可按式 $G_s = E_s / (1 + 2\nu_s)$ 计算;参数 g 由桩—土界面极限抗剪强度 τ_{su} 确定,可按 $\tau_{su} = K_0 (K/K_0) \sigma_z \tan \delta$ 计算,其中, K_0 为桩侧土的静止土压力系数,计算公式为 $K_0 = 1 - \sin \varphi$,张乾青等^[13]研究表明,对于小位移灌注桩, $K/K_0 = 0.7 \sim 1.2$,对于大位移灌注桩 $K/K_0 = 1 \sim 2$,本文取 1, δ 为桩—土界面的摩擦角,一般可取 $(0.75 \sim 1)\varphi$,本文取 $\delta = \varphi$; σ_z 为桩侧土竖向应力;由文献[22]获知桩端土极限承载 $q_{bu} = 3\,000 \text{ kPa}$ 。在不同荷载工况下,依据上述计算参数,由轴向荷载传递法确定的桩身轴力分布如图 9 所示,并与有限元的计算结果对

比。结果表明,首先在荷载工况为 $V_0 = 4\,000 \text{ kN}$ 、 $H_0 = 300 \text{ kN}$ 与 $V_0 = 4\,000 \text{ kN}$ 、 $H_0 = 600 \text{ kN}$ 时,有限元计算得到的轴力分布结果基本相同,说明水平荷载对桩身轴力的分布并无较大影响;其次,在 3 种工况下,本文通过轴向荷载传递法计算得到的轴力分布与有限元结果基本相同,说明采用本文方法可以有效预测轴横荷载作用下单桩桩身轴力的分布。

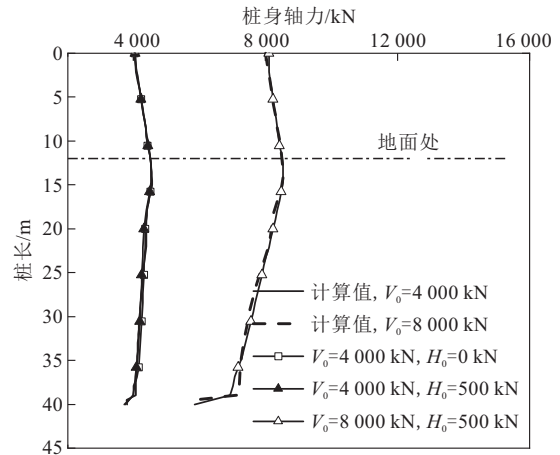


图 9 桩身轴力计算值与有限元结果对比

Fig. 9 Comparison between calculation results and FEM axial force of piles

(3) 结果分析

图 10,11 分别为不同荷载工况下本文计算得到的桩身位移和弯矩分布与有限元结果的对比。结果表明,图示两种荷载工况下桩身位移分布基本与有限元结果一致,桩身弯矩分布在桩身下部虽略有差别,但是工程实际中所注重考虑的桩身最大弯矩计算数值与位置基本一致,不同工况下计算程序中牛顿迭代法的迭代次数均不超过 5 次,说明本文非线性解是较为稳定与准确的。为进一步验证本文解的

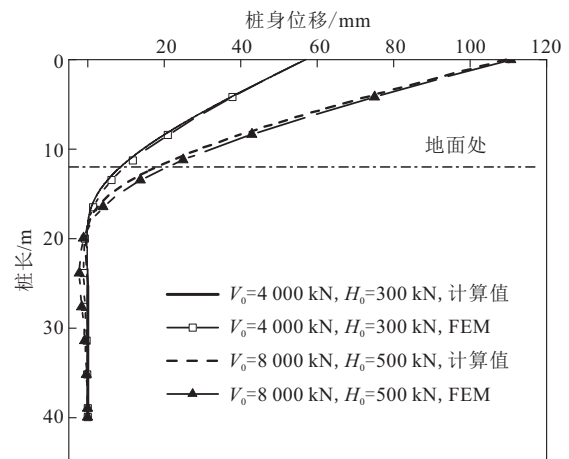


图 10 桩身位移计算值与有限元结果对比

Fig. 10 Comparison between calculation results and FEM of displacements of piles

计算精度,分别采用线弹性、弹塑性荷载传递模型对上述有限元算例进行验算,并将其结果与本文非线性解进行对比,最终计算得到的桩顶位移结果如图 12 所示。

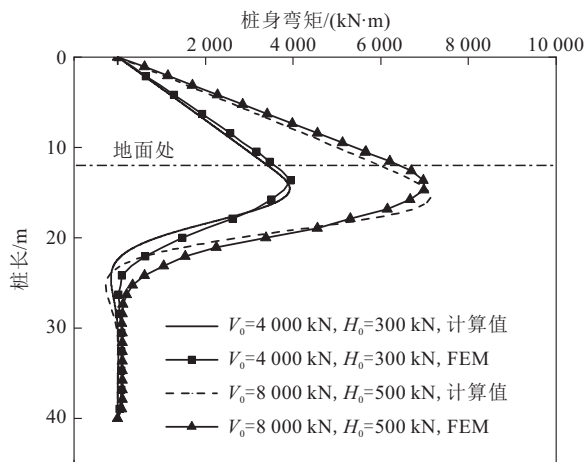


图 11 桩身弯矩计算值与有限元结果对比

Fig. 11 Comparison between calculation results and FEM bending moments of piles

图 12 中分别比较了不同荷载条件下 3 种计算方法得到的桩顶水平位移与有限元结果的异同,并且给出了不同分析方法的计算误差。可以发现:①3 种方法的计算结果在加载初期、荷载较小的情况下均与有限元结果较为一致,并且相对误差均处在很小的范围,计算精度均可达到要求,因此小荷载工况下可视情况选取合适的计算方法;②随着荷载水平的提高,桩顶水平位移逐渐增加,到了加载后期阶段,桩顶水平位移随着荷载水平的提高而大幅增加出现失稳情形,此时本文非线性差分解的计算结果

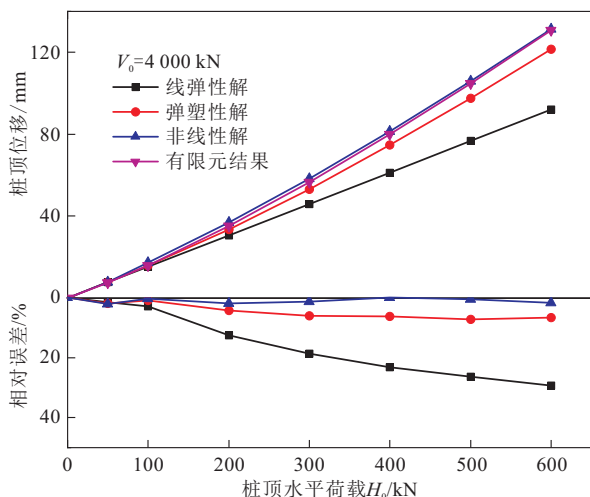


图 12 不同分析方法计算结果对比

Fig. 12 Comparison of calculation results of different calculation methods

与有限元结果较为一致但线性解与弹塑性解均较有限元结果有不同程度的低估,线性解误差最大,最大误差可达 29.3%,弹塑性解误差较小,均不超过 7%。

究其原因,从荷载传递模型来看,线性解假定地基土反力随着桩体位移增长线性增加,并不考虑土体屈服,因此会高估土反力的发挥,在荷载较大时较本文方法与弹塑性解结果偏小许多。弹塑性解虽然可考虑土体屈服,也可保证一定的计算精度,但不能反映地基土反力系数随桩土变形逐渐减小的非线性变化过程,在桩土变形的前期过程,对地基土反力的发挥仍有一定程度高估,因此计算精度不如非线性解高,也从侧面反映了较大荷载水平下桩—土变形的非线性特点不容忽视。从解法的难易程度来看,线性法与弹塑性法均可获得幂级数解或矩阵传递解等解析解,本文非线性解虽是数值解,但根据算法编制计算程序后,能快速获得准确结果,并且改变地基土反力的计算形式后即可退化为线性解或弹塑性解,方便比较。在实际计算中,应根据荷载情况选用合适的分析计算方法,当荷载较大时,本文非线性解可有效考虑轴、横荷载作用下桩—土体系的非线性变形特点,具有较高的计算精度。

4 结 语

本文开展了水平受荷高桩基础在轴向荷载作用下水平变形受力响应的理论研究,已有研究往往忽略桩—土变形的非线性特点,本文通过引入双曲线型荷载传递模型考虑这一缺点,并采用轴向荷载传递法计算桩身轴力以考虑桩身轴力引起的 $P-\Delta$ 效应,对轴横受荷高桩的水平响应进行分析求解,得到了轴横荷载作用下桩身水平变形与内力的非线性有限差分解,是双曲线型 $p-y$ 曲线在桩基础轴向、水平受荷条件下的推广。

通过具体算例对比验证了本文非线性解的可靠性与准确性。有限元算例表明水平荷载对桩身轴力的分布并无较大影响,采用轴向荷载传递法可有效预测桩身轴力,有利于准确计算桩身附加弯矩效应。最后,本文对比了线弹性、弹塑性、双曲线型荷载传递模型计算结果的差异,在荷载较小的情况下,3 种模型计算结果较为一致,均能获得准确结果;荷载较大时,线性解误差较大,非线性解与弹塑性解均能保证一定计算精度,但弹塑性解由于无法考虑桩—土变形的非线性特点,精度较非线性解略低,此时桩—土变形的非线性特点不容忽视,进一步说明了本文解的适用性,可为轴横受荷高桩的设计提供相应的理论计算依据。

参考文献:

- [1] Liang F, Chen H, Chen S. Influences of axial load on the lateral response of single pile with integral equation method[J]. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 2012, 36(16): 1831-1845.
- [2] 栾鲁宝, 丁选明, 周仕礼, 等. 考虑竖向荷载的桩基水平振动响应解析解[J]. 建筑结构, 2015, 45(19): 80-86.
- [3] Ding X, Luan L, Zheng C, et al. Influence of the second-order effect of axial load on lateral dynamic response of a pipe pile in saturated soil layer[J]. Soil Dynamics and Earthquake Engineering, 2017, 103: 86-94.
- [4] 赵明华. 轴向和横向荷载同时作用下的桩基计算[J]. 湖南大学学报: 自然科学版, 1987, 14(2): 68-81.
- [5] 赵明华, 徐卓君, 马宾辉, 等. 倾斜荷载下基桩 C 法的幂级数解[J]. 湖南大学学报: 自然科学版, 2012, 39(3): 1-5.
- [6] 陈林靖, 余其凤, 戴自航. 纵横弯曲桩计算的综合刚度和双参数法的有限差分解[J]. 岩石力学与工程学报, 2016, 35(3): 613-622.
- [7] 张磊, 龚晓南, 俞建霖. 考虑土体屈服的纵横荷载单桩变形内力分析[J]. 岩土力学, 2011, 32(8): 2441-2445.
- [8] 陈鑫, 向先超, 刘凯, 等. 小桩距下的抗滑桩后滑坡推力分布规律分析[J]. 地质科技情报, 2019, 38(6): 157-164.
- [9] Hsiung Y M, Chen S S, Chou Y C. Analytical solution for piles supporting combined lateral loads[J]. Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering, 2006, 132(10): 1315-1324.
- [10] 竺明星, 龚维明, 何小元, 等. 堆载作用下考虑土拱效应的被动桩变形内力半解析解[J]. 岩土工程学报, 2013, 35(11): 1997-2008.
- [11] 竺明星, 龚维明, 何小元, 等. 纵横向受荷基桩变形内力的矩阵传递解[J]. 岩土力学, 2014, 35(11): 3281-3288.
- [12] Kim B T, Kim N K, Lee W J, et al. Experimental load-transfer curves of laterally loaded piles in Nak-Dong River sand[J]. Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering, 2004, 130(4): 416-425.
- [13] Kongner R L. Hyperbolic stress-strain response: Cohesive soils[J]. Journal of the Soil Mechanics & Foundations Division, 1963, 89(1): 115-143.
- [14] 王璇, 胡新丽, 周昌, 等. 基于物理模型试验的滑坡—抗滑桩位移场变化特征[J]. 地质科技通报, 2020, 39(4): 103-108.
- [15] 张乾青, 李连祥, 李术才, 等. 成层土中单桩受力性状简化算法[J]. 岩石力学与工程学报, 2012, 31(增刊 1): 3390-3394.
- [16] Kumar S, Lalvani L, Omar M. Nonlinear response of single piles in sand subjected to lateral loads using $k_{h\max}$ approach[J]. Geotechnical and Geological Engineering, 2006, 24(1): 163-181.
- [17] Reese L, Cox W R, Koop F D. Analysis of laterally loaded piles in sand[C]//Proceedings of 6th Offshore Technology Conference. Houston: [s. n.], 1974: 473-483.
- [18] 中国建筑科学研究院. JTJ 94—2008 建筑桩基技术规范[S]. 北京: 中国建筑工业出版社, 2008.
- [19] Guo W D, Lee F H. Load transfer approach for laterally loaded piles[J]. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 2001, 25(11): 1101-1129.
- [20] 朱碧堂. 土体的极限抗力与侧向受荷桩性状[D]. 上海: 同济大学, 2005.
- [21] 张乾青. 竖向受荷桩承载特性理论与工程应用[M]. 北京: 中国建筑工业出版社, 2016.
- [22] 李庆扬. 非线性方程组的数值解法[M]. 北京: 科学出版社, 2005.
- [23] 尤汉强, 杨敏, 孙庆. 对侧向受荷桩有限差分解法的改进研究[J]. 结构工程师, 2009, 25(4): 114-118.
- [24] Sastry V V R N, Meyerhof G G. Behaviour of flexible piles in layered sands under eccentric and inclined loads [J]. Canadian Geotechnical Journal, 1994, 31(4): 513-520.
- [25] Ng C W W, Zhang L M, Nip D C N. Closure of "response of laterally loaded large-diameter bored pile groups"[J]. Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering, 2002, 128: 964-965.