

回转曲面的测地线求解方法

马惠仙, 郑鹏飞, 赵菊娣

(华东理工大学机械与动力工程学院, 上海 200237)

摘 要: 当回转曲面上测地线两端点边界条件一定时, 根据 Clairant 定理设计一种形、数、计算机结合的方法求解测地线。避开传统的用偏微分方程组求解的抽象性和复杂性, 基于作图过程建立对应数学模型, 最终由计算机绘制测地线。该方法适合于回转曲面, 具有形象直观、精度可控、稳定可靠的优点。

关 键 词: 回转曲面; 测地线; Clairant 定理; 算法设计

中图分类号: TP 39

DOI: 10.11996/JGj.2095-302X.2017020170

文献标识码: A

文 章 编 号: 2095-302X(2017)02-0170-04

Method for Solving Geodesic Line on Revolving Surface

MA Huixian, ZHENG Pengfei, ZHAO Judi

(School of Mechanical and Power Engineering, East China University of Science and Technology, Shanghai 200237, China)

Abstract: When the boundary conditions of the two ends of the geodesic lines on the revolving surface are given, according to the Clairant theorem, a kind of shape, number and computer combination method is designed. To avoid the abstraction and complexity of the traditional solution of partial differential equations, the corresponding mathematical model based on the mapping process is established, and finally the geodesic line is drawn. The proposed method is suitable for the revolving surface, which possesses the advantages of visual image, controllable precision, stable and reliable.

Keywords: revolving surface; geodesic line; Clairant theorem; algorithm design

曲线上的测地线计算是船体的几何设计、机器人运动规划、Trimmed 曲面的中轴变换计算、地形漫游、数控加工、海床上的光缆铺设中的重要问题。根据 TODD 和 STRUIK^[1]所述, 测地线的历史可以追溯到 Johann Bernoulli 时代。在 1697 年, 他解决了凸曲面上两点间的最短路径问题, 并且证明了测地线的密切平面总是垂直于切平面。Bernoulli 的工作引起了 Euler 对测地线问题的重视, 在 1732 年首先给出了隐式曲线上的测地线方程。近代, 随着计算机技术的发展, 围绕着测地线的算法研究成为一个引人入胜的课题。

传统所用的微分方程求解曲面测地线的一个共性问题, 是没有分类研究不同曲面的测地线求

解, 其优点是所提出的方法具有一般性, 但具体求解的难易程度会因曲面复杂度不同而异。历史上法国数学家 Clairant 对回转曲面测地线进行了专门研究, 给出了 Clairant 定理^[2]。这一定理本质上仍是抽象的数学方法, 但却体现了分类求解的思想, 这是一种简化。沿着这一思路, 推测借助 Clairant 定理可以对回转曲面建立形象的图解方法, 以便充分展示测地线自身的几何直观性, 有助于宏观上对问题的理解, 也充分发挥计算机速度快、精度高的优越性。具体思路是首先研究回转曲面测地线的作图方法, 再跟踪作图步骤建立起对应的数学模型, 为计算机编程和绘制提供途径。最后再以一些算例验证方法的正确性。

收稿日期: 2016-08-03; 定稿日期: 2016-09-18

第一作者: 马惠仙(1965-), 女, 上海奉贤人, 讲师, 硕士。主要研究方向为计算机图形学及工程图学。E-mail: mhx65@163.com

1 Clairant 定理与图形化

1.1 Clairant 定理

假设在回转曲面 S 上有一测地线 q , A 是测地线上任意一点, r 是过 A 点的纬圆半径, 则在 A 点处的 $r \sin \alpha$ 值是常数 c , 可表示为

$$r \sin \alpha = c \quad (1)$$

其中, r 是过 A 点的纬圆半径; α 是测地线 q 和母线 $\overline{OA}$ 的夹角。若用 β 表示测地线和纬圆之间的夹角, 则式(1)可写成

$$r \cos \beta = c \quad (2)$$

现以圆锥面为例, 证明式(1)。

如图 1 所示, 设 C 是圆锥面上测地线 q 的顶点, 其到锥顶的距离是直线段 $\overline{OC} = c$, C 点的纬圆半径为 r_0 。测地线在 C 点与母线 $\overline{OC}$ 垂直, 再设 A 是测地线上的任意一点, l 是直线 $\overline{OA}$ 的长度, 由图 1 可知 l 、 r 、 α 三者之间有关系

$$l \sin \alpha = c \quad (3)$$

要证明式(3), 可以将圆锥面展开到平面上, 如图 2 所示。在展开图上 $\overline{OC}$ 和 $\overline{OA}$ 变成 $\overline{O'C'}$ 和 $\overline{O'A'}$, 测地线 q 的弧长 AC 变成直线段 $\overline{A'C'}$, 同时 $\overline{O'C'}$ 和 $\overline{A'C'}$ 垂直, 三角形 $\Delta A'O'C'$ 的顶点 A' 的角度等于 α , 于是式(3)可在三角形 $\Delta A'O'C'$ 中得到证明。设 δ 是半圆锥角, 由图 1 可知 $r = l \sin \delta$, 用 $\sin \delta$ 乘以式(3)的两边, 得到 $c \sin \delta = l \sin \delta \sin \alpha$, 或 $r \sin \alpha = c_1$, 这里 $c_1 = c \sin \delta$ 是测地线的一个定值, 至此即证明了 Clairant 定理适用于圆锥面。

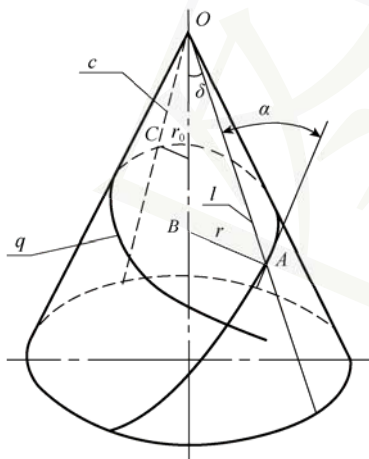


图 1 圆锥面上测地线立体图

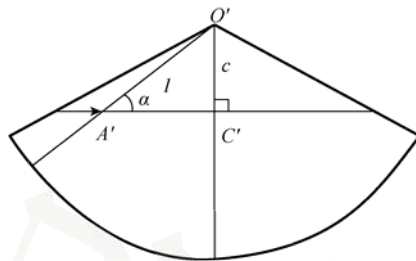


图 2 圆锥面上测地线展开图

1.2 作图与数学建模

由图 2 可知, $\overline{A'C'}$ 实际上就是圆锥面上连接 C 和 A 两点测地线的长度。因此, 只需将 $\overline{A'C'}$ 上各点返回到圆锥面上, 然后再用曲线相连, 就可以得到测地线了。因为 $\overline{A'C'}$ 线是通过展开圆锥面时确定 A 、 C 在展平面上的位置再连线而得, 所以返回 $\overline{A'C'}$ 上各点的具体作图就是按逆过程将展平面上的图形返回到圆锥面上。此图作为中间桥梁, 建立计算机编程绘制测地线所需的数学模型^[3-4]。

如图 3 所示, 已知 $A(a, a')$, $B(b, b')$ 为圆锥面上的两点, 求过 A 、 B 两点的测地线。设圆锥面的已知参数为 R 、 L 、 H , A 、 B 两点位置分别由 $L_A = L, \phi_A$ 和 $L_B = \sqrt{x_b^2 + (H - z_b)^2}, \phi_B$ 确定, A 、 B 两点所在的母线在展开图上的展开角为 $\theta = \frac{\phi_A \cdot \pi}{180^\circ} \times \frac{R}{L}$, 根据 L_A, L_B, θ 可以构造出图 4。于是 A 、 B 两点之间的测地线长度为

$$S = \sqrt{L_A^2 + L_B^2 - 2L_A L_B \cos \theta} \quad (4)$$

为了求出测地线各点 I 在圆锥面上的位置, 应先确定图 4 中的 L_I, S_I, θ_I , 再根据展开图中的 I 点确定其在圆锥面上的投影 $I(i, i')$, 最后根据投影图计算出 I 点的坐标 $I(x_i, y_i, z_i)$ 。由图 4 可知

$$S_I = \sqrt{L_A^2 + L_I^2 - 2L_A L_I \cos \theta_I} \quad (5)$$

由式(5)解出

$$L_I = \sqrt{L_A \cos \theta_I \pm L_A^2 \cos^2 \theta_I - (L_A^2 - S_A^2)} \quad (6)$$

由图 4 中的 $\triangle OAB$, 利用正弦定理

$$\frac{L_B}{\sin \alpha_1} = \frac{S}{\sin \theta} \quad (7)$$

根据式(7)解出

$$\sin \alpha_1 = \frac{L_B \sin \theta}{S} = \frac{L_B \sin \theta}{\sqrt{L_A^2 + L_B^2 - 2L_A L_B \cos \theta}} \quad (8)$$

再由图 4 中的 $\triangle OAI$ ，利用正弦定理

$$\frac{L_A}{\sin(\pi - (\alpha_1 + \theta_I))} = \frac{S_I}{\sin \theta_I} \quad (9)$$

根据式(9)解出

$$S_I = \frac{L_A \sin \theta_I}{\sin(\pi - (\alpha_1 + \theta_I))} \quad (10)$$

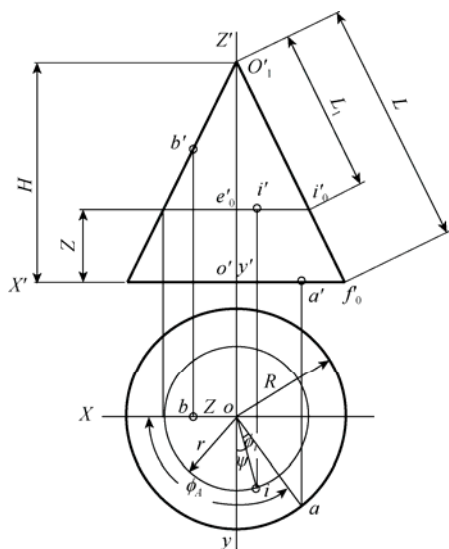


图 3 测地线已知条件的投影图

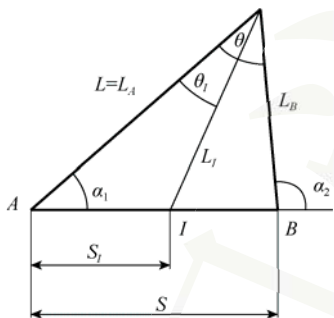


图 4 测地线展开图对应的参数

根据圆锥面底圆弧长与展开弧长相等的关系，由展开弧长对应角 θ_I 求得底圆弧长对应角

$$\phi_i = \frac{180^\circ \theta_I}{\pi} \times \frac{L}{R} \quad (11)$$

在图 3 的 V 面投影中 $\triangle a'_1 i'_0 e'_0$ 与 $\triangle a'_1 o' f'_0$ 是两个相似三角形，故有

$$r = \frac{R}{L} L_I \quad (12)$$

由图 3 的 V 、 H 两个投影可确定 I 点的坐标为

$$\begin{cases} x = r \sin \psi \\ y = r \cos \psi \\ z = H \left(1 - \frac{r}{R} \right) \\ H = \sqrt{L^2 - R^2} \\ \psi = \phi_A - \frac{\pi}{2} - \phi_i \\ 0 \leq \theta_I \leq \theta \end{cases} \quad (13)$$

1.3 计算机绘制测地线

式(13)即为圆锥面上连接 A 、 B 两点的测地线的数学关系。利用式(13)编制程序，由计算机绘制出测地线如图 5 所示^[5]，图中用 4 个视口表达了测地线。

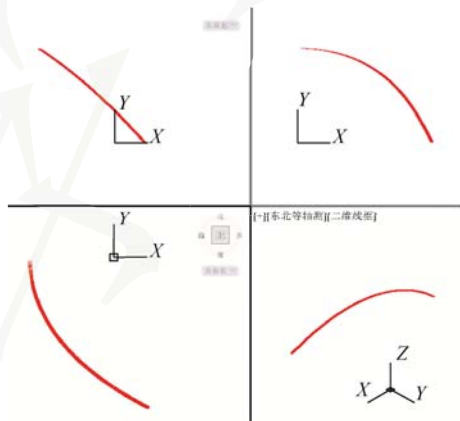
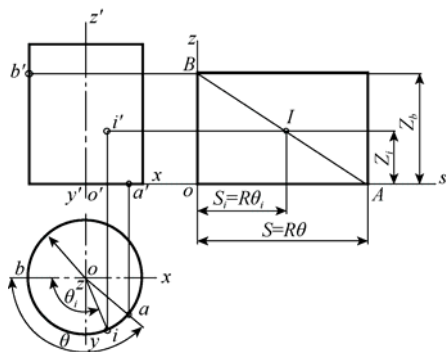


图 5 测地线 4 个视口的投影

2 圆柱面、球面测地线求解

2.1 圆柱面测地线求解

首先求出连接圆柱面上已知两点 A 、 B 的测地线的长度 $\overline{AB}$ ，如图 6(b)所示，再将 $\overline{AB}$ 上各点返回到圆柱面上，以 I 点为例，如图 6(a)所示^[6-7]。



(a) 圆柱面的投影 (b) 展开图

图 6 圆柱面测地线投影及展开图

根据图 6(b)可得

$$\frac{z_i}{z_b} = \frac{R(\theta - \theta_i)}{R\theta} \quad (14)$$

由图 6(a) V/H 投影可找到圆柱面上连接 A 、 B 两点的测地线的数学关系

$$\begin{cases} x = R \cos \theta_i \\ y = R \sin \theta_i \\ z = \frac{z_b(\theta - \theta_i)}{\theta} \\ 0 \leq \theta_i \leq \theta \end{cases} \quad (15)$$

式(15)即为圆柱面上连接 A 、 B 两点的测地线的数学关系。利用式(15)编制程序,由计算机绘制出测地线如图 7 所示。

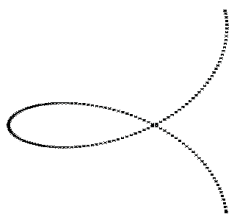


图 7 圆柱面上测地线的三维图形

2.2 球面测地线求解

由 Clairant 定理可知回转曲面上所有的子午线都是测地线,球面的回转轴无限多,只要过球心即可,所以球面上的所有大圆都是子午线,球面上的已知两点 A 、 B 必在同一大圆上,只要找到这一大圆,则两点之间的劣弧即是测地线。据此可进行如下求作,如图 8 所示^[8]。

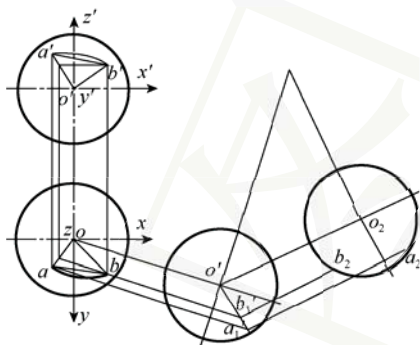


图 8 球面上测地线作图过程

(1) 用换面法将平面 $\triangle AOB$ 变换成垂直面,球亦随之。

(2) 在新投影体系里求出 $\triangle AOB$ 与球面的交线,

即大圆, A 、 B 两点定在交线圆上。

(3) 第二次投影变换求得交线实形,在交线上连 A 、 B 两点较短的那段圆弧即为测地线实长,将此线上各点的投影返回到原投影体系中即得测地线的投影。

以球心为原点建立直角坐标系,设 A 、 B 两点的坐标分别为 $A(x_a, y_a, z_a)$ $B(x_b, y_b, z_b)$ 测地线为过 O 、 A 、 B 三点的平面与球面的交线,其方程为

$$\begin{cases} \begin{vmatrix} x & y & z \\ x_a & y_a & z_a \\ x_b & y_b & z_b \end{vmatrix} = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = x_a^2 + y_a^2 + z_a^2 \end{cases} \quad (16)$$

根据式(16)编写程序可以由计算机绘制测地线,在此从略。

3 结 论

Clairant 定理从数学角度简化了对回转曲面的测地线求解,其实质是先确定测地线长度再求解测地线上各点。

本文利用此定理的几何意义,实现了圆锥、圆柱、圆球面上两点之间测地线的图形表达。在此基础上建立起图形的数学模型为计算机绘制测地线提供了途径,使问题得到直观而精确、快速的解决。

参 考 文 献

- [1] TODD J A. STRUIK D J. Lectures on classical differential geometry [J]. Mathematical Gazette, 1951, 35(312): 136.
- [2] 柳斯捷尔尼克. 最短线[M]. 北京: 中国青年出版社, 1957: 21-30.
- [3] 欧斐君, 梁建华. 变分法及其应用[M]. 太原: 山西科学技术出版社, 1987: 70-75.
- [4] 谭勋章, 罗阳, 刘胜青. 具有扩展功能的钣金展开 CAD 系统的研究与开发[J]. 机械研究与应用, 2004, 17(1): 85-87.
- [5] 苏步青, 刘鼎元. 初等微分几何学[M]. 上海: 上海科学技术出版社, 1985: 213-218.
- [6] 蒋德军, 宗子安. 曲面展开CAD系统的设计与研究[J]. 湖南工程学院学报: 自然科学版, 2003, 13(1): 37-39.
- [7] 张彩明, 杨兴强, 李学庆, 等. 计算机图形学[M]. 北京: 科学出版社, 2005: 176-181.
- [8] 李学志. VisualLISP 程序设计[M]. 方戈亮, 孙立红, 译. 北京: 清华大学出版社, 2006: 286-290.