天体物理中自组织临界现象的观测和模拟

李川*, 王文博, 陈鹏飞

南京大学天文与空间科学学院, 现代天文与天体物理教育部重点实验室, 南京 210023

*联系人, E-mail: lic@nju.edu.cn

收稿日期: 2021-09-01; 接受日期: 2021-12-17; 网络出版日期: 2022-04-11

国家重点研发计划(编号: 2020YFC2201200)和国家自然科学基金(编号: 11673012, 11961131002)资助项目

摘要 自组织临界(Self-Organized Criticality, SOC)理论描述了一个非线性动力学系统或复杂系统在不依赖于外部参数调节的情况下, 由能量驱动并通过自组织过程演化到某个临界点, 随之产生无标度的、分形耗散的且满足幂律分布的能量释放现象. 自其诞生之日起, SOC理论就被广泛地应用于解释诸多非线性动力学系统的幂律频数分布. 本文概述了SOC系统能量释放的物理过程, 总结了SOC在天体物理中的观测和模拟研究, 讨论了SOC和MHD湍流在天体爆发活动中的作用, 提出了SOC对空间天气预报可能的应用价值以及该领域中有待解决的一些重要问题.

关键词 自组织临界, 等离子体湍流, 太阳活动

PACS: 05.65.+b, 52.35.Ra, 96.60.Q-

1 引言

自组织临界(Self-Organized Criticality, SOC)理论的提出源自于Bak等人^[1]在1987年发表的里程碑式文章“Self-organized criticality: An explanation of $1/f$ noise”. 目前学术界对SOC理论的定义尚未形成一个统一的共识. 笔者基于以往研究工作, 倾向于如下定义: SOC描述了一个非线性动力学系统或复杂系统在不依赖于外部参数调节的情况下, 由能量驱动并通过自组织过程演化到某个临界点, 随之产生无标度的、分形耗散的且满足幂律分布的能量释放或“雪崩”现象^[1-6]. 最初它被用来解释自然界中无处不在的粉红噪声或闪烁噪声(功率谱为幂律形式且谱指数为1), 之后被广泛

应用于解释诸多非线性动力学系统的幂律频数分布, 例如人类社会中的人口分布^[7]和金融危机^[8,9]、生物学中的物种灭绝^[10]和病毒扩散^[11]、地球物理中的板块运动^[12]和地震活动^[13]、地磁物理中的磁层亚暴^[14]和极光辐射^[15]、天体物理中的太阳爆发^[16-21]、恒星耀斑^[22-26]、伽马射线暴^[27-29]和磁陀星爆发^[30-32]等.

尽管SOC的应用范围如此之广, 对其进行深入的理论分析和模型建立的工作却并不多见. 在解析研究中, 目前唯一的理论模型是由Aschwanden^[4,5]提出的“分形耗散SOC雪崩模型”. 该模型基于“分形是SOC系统的内禀属性”这个关键概念, 通过元胞自动机(Cellular Automaton, CA)模拟和分析推导, 计算了分形维度和欧式维度之间的关系, 并得到了雪崩尺度、持续时

引用格式: 李川, 王文博, 陈鹏飞. 天体物理中自组织临界现象的观测和模拟. 中国科学: 物理学 力学 天文学, 2022, 52: 269501

Li C, Wang W B, Chen P F. Observations and simulations of self-organized criticality phenomena in astrophysics (in Chinese). Sci Sin-Phys Mech Astron, 2022, 52: 269501, doi: [10.1360/SSPMA-2021-0245](https://doi.org/10.1360/SSPMA-2021-0245)

间、等待时间、峰值强度和积分能量的幂律频数分布的谱指数. 他认为该模型是一个普适模型, 其理论谱指数可以与诸多观测现象的谱指数进行比较^[33-36].

在数值模拟研究中, 主要是通过CA模拟实现一个SOC系统在时空中的动力学演化, 并分析其模拟雪崩的统计特征. CA是由离散格点所组成的网格化空间按照局部区域的数学和物理规则, 在离散的时间维度上演化的动力学系统, 是探索SOC系统时空演化最主要的工具^[37-41]. 在太阳物理中, 最早的CA模型由Lu和Hamilton^[37]提出. 该模型将日冕磁场网格化, 当局部区域的磁场梯度超过某个临界值, 就会引起磁场在其临近格点上的重新分配, 即发生能量释放或雪崩. 统计发现, 雪崩的持续时间、峰值强度和积分能量在频数分布上表现为幂律形式. 此后, 又有一系列基于不同的网格构建形式、能量驱动机制、临界判定条件和雪崩分配规则的CA模型发展出来, 以实现更加符合物理图像的太阳及天体爆发活动的CA模拟^[42-50].

我们也注意到, 湍流过程同样可以产生非线性动力学系统中爆发现象的幂律频数分布. 例如早期通过一维磁流体力学(Magnetohydrodynamics, MHD)模拟的太阳耀斑在持续时间、峰值强度和积分能量的频数分布上都符合幂律形式^[51]. 这里需要说明的是, MHD模拟是利用一组偏微分方程的数值解重现太阳爆发活动, 从物理图像上主要对应了MHD湍流过程. 那么如何区别SOC和湍流过程在非线性动力学系统能量释放中的作用呢? 这是笔者认为特别有趣味也特别意义的一个研究课题.

本文概括了SOC系统能量释放的物理过程, 总结了SOC在天体物理中的观测研究, 介绍了CA模型对太阳和其他天体爆发活动的模拟研究, 讨论了SOC和

MHD湍流在非线性动力学系统中的作用, 并提出了SOC在空间天气预报中可能的应用价值以及该领域中有待解决的一些重要问题.

2 自组织临界系统能量释放的物理过程

SOC系统是一个非线性动力学系统, 发生在其中的能量释放过程自然也是非线性的, 例如能量释放在初始阶段随时间以指数形式或幂律形式增长. 以最初的沙堆模型为例(图1左), 向沙堆上随机位置处注入沙粒(能量), 当某一局部区域的倾斜角度大于临界值时, 就会发生雪崩(能量释放), 局部区域的雪崩将使其周围沙粒重新分布, 并可能引起一系列雪崩的发生, 这个过程无疑是一个非线性的能量释放过程.

假设雪崩能量随时间的演化如图1右所示^[41]. 在系统能量达到某一临界值 W_0 后, 能量释放首先随时间以指数形式增长:

$$W(t) = W_0 \exp\left(\frac{t}{\tau_G}\right), \quad 0 \leq t \leq \tau, \quad (1)$$

其中, τ_G 为增长时标, τ 为能量释放达到峰值的时间. 因而, 峰值强度可表示为 $P=W_S-W_0$. 随后能量释放进入到线性衰减阶段:

$$W(t) = W_0 + (W_S - W_0) \left(1 - \frac{t-t_1}{D}\right), \quad t_1 < t < t_2, \quad (2)$$

其中, D 为衰减时间. 因而, 能量释放的持续时间可表示为 $T=\tau+D$. 假设增长时间 τ 的频数分布为随机分布, 分布函数可表示为

$$N(\tau)d\tau = \frac{N_0}{t_s} \exp\left(-\frac{\tau}{t_s}\right) d\tau, \quad (3)$$

图1 自组织临界沙堆模型示意图(左)和雪崩能量释放率随时间的演化(右)^[41]

Figure 1 Original sandpile SOC paradigm (left panel), and the schematic of the time evolution of an avalanche event (right panel) [41].

其中, t_S 为归一化的时间常数. 由此, 经过数学推导可以得到雪崩持续时间、峰值强度和积分能量的频数分布为^[41]

$$N(T)dT = \frac{N_0(\alpha_P - 1)}{\tau_D} \left(\frac{T}{\tau_D} + 1 \right)^{-\alpha_T} dT, \quad (4)$$

$$N(P)dP = \frac{N_0(\alpha_P - 1)}{W_0} \left(\frac{P}{W_0} + 1 \right)^{-\alpha_P} dP, \quad (5)$$

$$N(E)dE \approx \frac{N_0(\alpha_P - 1)}{2E_0} \left(\frac{E}{E_0} \right)^{-(\alpha_P + 1)/2} dE, \quad (6)$$

其中, $\alpha_P = (1 + \tau_G/t_S)$. 这样我们就能够理解一个非线性动力学系统(如SOC系统)中能量释放的频数分布为何呈现为幂律形式.

那么幂律频数分布 $N(x)dx \propto x^{-\alpha}dx$ 中谱指数 α 的大小是否可以通过理论分析而得到呢? 目前唯一的理论模型是由Aschwanden^[4]在2012年提出的“分形耗散SOC雪崩模型”. 该模型基于“分形是SOC系统的内禀属性”这个关键概念, 并在一定的假设之下, 得到了SOC系统能量释放的持续时间、峰值强度和积分能量频数分布的谱指数, 分别为

$$\alpha_T = (1 + S) / 2, \quad (7)$$

$$\alpha_P = 2 - 1 / S, \quad (8)$$

$$\alpha_E = 1 + (S - 1) / (D_S + 2), \quad (9)$$

其中, S 为欧式空间维度, D_S 为Hausdorff分形维度^[52], 通过模拟和观测分析得到 $D_S \approx (1 + S)/2$. 该模型期望能够解释诸多天体爆发活动的幂律频数分布. 对于太阳爆发, $S = 3$, 即可得到 $\alpha_T = 2$, $\alpha_P = 5/3$, $\alpha_E = 3/2$, 这与太阳耀斑的观测结果相当^[21]. 对于某些高能天体爆发现象, 例如伽马射线暴, 由于其能量释放近似集中在一维空间中, $S \approx 1$, 于是得到 $\alpha_T = 1$, $\alpha_P = 1$, $\alpha_E = 1$, 这也得到了相关观测的佐证^[27]. 之后, Aschwanden^[5]在2014年对该模型做了进一步的推广. 当然, 该理论模型是在较强的前提假设和模拟近似的情况下得到的, 因而希望毕其功于一役的初衷有待于观测和实验数据的进一步验证.

3 天体物理中自组织临界现象的观测

3.1 太阳及恒星爆发

太阳是唯一一颗人类可以进行高时空分辨率观测

的恒星, 是观测其他恒星和宇宙的窗口. 对太阳的观测覆盖了从射电波段到伽马射线的全波段辐射. 在空间分辨率上, 随着DKIST望远镜的投入运行, 达到了0.03" (对应光球上约20 km). 尤其需要说明的是, 我国未来的空间卫星(CHASE^[53]和ASO-S^[54])和地基望远镜(口径2.5 m^[55]和1.8 m^[56])会陆续投入使用. 这使得我们可以对全日面或者某一个活动区进行多波段、高时空分辨率的观测, 因而可用于进行太阳爆发研究的观测数据异常丰富.

通常情况下, 我们会将太阳整体当作一个SOC系统来处理, 发生在日面上的太阳爆发(耀斑和日冕物质抛射)可能来自于不同的活动区, 对此不做区分. 进入到空间时代以来, 研究者利用硬X射线、软X射线和EUV波段的观测对太阳耀斑的统计工作不胜枚举. 例如, 在硬X射线的观测上, 通过诸如SMM/HXRBS^[57], CGRO/BATSE^[58], RHESSI^[59,60]等卫星的观测, 得到耀斑幂律频数分布的谱指数范围为 $\alpha_T = 1.8-2.2$, $\alpha_P = 1.6-1.8$, $\alpha_E = 1.5-1.8$. 图2显示了耀斑硬X射线峰值强度的幂律频数分布^[61], 可以看到其谱指数与前一节所述的“分形耗散SOC雪崩模型”的预测结果相去不远. 在软X射线的观测上, 通过Yohkoh^[62,63]和GOES^[64-66]卫星的观测, 得到幂律谱指数范围为 $\alpha_T = 2.0-3.0$, $\alpha_P = 1.6-2.0$, $\alpha_E = 1.4-1.9$. 在EUV波段的观测上, 通过

图 2 (网络版彩图) 太阳耀斑硬X射线峰值强度的幂律频数分布^[61]

Figure 2 (Color online) Power-law frequency distributions of solar hard X-ray flares^[61].

SOHO/EIT^[67], TRACE^[68]和SDO/AIA^[69]卫星的观测, 得到幂律谱指数范围为 $\alpha_T = 1.8-2.3$, $\alpha_P = 1.5-2.3$, $\alpha_E = 1.4-2.0$. 对于日冕物质抛射的统计工作并不多, 原因在于很难通过白光日冕仪的观测获得日冕物质抛射的持续时间、峰值强度和积分能量. Li等人^[20]分析了太阳第23活动周日冕物质抛射动能的频数分布, 发现其幂律谱指数与“分形耗散SOC雪崩模型”的预测值有一定差别.

此外, 还可以研究日面上某一个活动区所产生耀斑的统计特征. 例如Wheatland^[16]曾经分析了多个活动区所产生的耀斑峰值强度的频数分布, 发现其幂律谱指数与对整个日面耀斑的统计结果一致, 他们认为单独的活动区和整个太阳都可以作为SOC系统来看待. Lei等人^[70]分析了太阳第24活动周最活跃的活动区AR12673产生耀斑的持续时间和等待时间分布, 认为单个活动区的耀斑发生率与SOC预期的结果有一定差别, 这可能源于后文将要讨论的MHD湍流的作用.

对恒星磁活动和恒星爆发的研究目前已成为一个热点研究领域, 包括恒星磁场演化^[71-75]、恒星耀斑^[76-80]和星冕物质抛射^[81-84]等. SOC常用于恒星耀斑的观测和统计, 其观测覆盖了可见光、软X射线和EUV波段等(参见文献^[32]中3.4.1节). 相较于太阳耀斑及微耀斑(能量范围在 $10^{24}-10^{32}$ erg^[68,85]), 可观测的恒星耀斑的能量范围在 $10^{32}-10^{38}$ erg^[86], 因而可称为“超级耀斑”. 近年来随着Kepler和TESS卫星的陆续发射, 对恒星耀斑的研究越来越多. 例如, Kepler卫星对G型恒星的观测显示, 耀斑能量幂律频数分布的谱指数为 $\alpha_E = 2.04 \pm 0.17$ ^[87], 而F, G, K和M型的恒星耀斑能量幂律频数分布的谱指数范围为 $\alpha_E = 1.78-2.13$ ^[88]. Aschwanden和Güdel^[25]综合前人工作, 对Kepler卫星观测的162262个恒星耀斑进行了统计, 得到了耀斑能量频数分布的幂律谱指数为 $\alpha_E = 1.817 \pm 0.005$. 他们认为该结果与太阳耀斑能量的幂律频数分布谱指数相当, 并且都可以用“分形耗散SOC雪崩模型”解释. 如果我们将太阳耀斑和恒星耀斑的频数分布集中在一张图中(如图3所示), 可以看到耀斑能量在十几个量级上均呈现为谱指数约1.8的幂律分布^[86]. 此外, 随着利用多波段成像以及光谱观测数据对恒星爆发的研究日益增多, 星冕物质抛射日益成为一个热点研究课题^[89], 这将极大促进太阳和恒星爆发的比较研究.

图3 G型恒星耀斑和太阳耀斑能量的频数分布^[86]

Figure 3 Frequency distributions of flares on the Sun and on G-type stars ^[86].

3.2 高能天体爆发现象

太阳和恒星爆发仅仅是宇宙中众多爆发现象的代表. 除此之外, SOC还常被用于解释另一些极端高能的天体物理活动, 如伽马射线暴、磁陀星爆发、活动星系核耀变体等.

伽马射线暴是迄今为止宇宙中观测到的最剧烈的天体爆发现象, 理论上是由超大质量恒星演化到晚期塌缩爆炸或者是由致密双星并合(中子星或黑洞)而产生^[90-93]. 观测发现有近50%的伽马射线暴伴随X射线耀斑辐射^[94,95], 而X射线耀斑辐射的能量在频数分布上也是幂律形式. Wang和Dai^[27]统计了83个伽马射线暴对应的X射线耀斑, 分析了其能量和持续时间的分布(如图4所示), 其对应的微分频数分布的幂律谱指数分别为 $\alpha_E = 1.06 \pm 0.15$ 和 $\alpha_T = 1.10 \pm 0.15$. 他们认为该结果对应了一维情况下“分形耗散SOC雪崩模型”的预测值.

磁陀星爆发是近年来研究较多的另一类高能天体爆发现象. 磁陀星被认为是表面磁场强度大于 10^{14} G的中子星^[96], 当前的研究表明它可能是软伽马射线复现源(SGRs)、快速射电暴(FRBs)、X射线耀发、脉冲闪烁(Glitches)的共同起源^[97-99]. Cheng等人^[31]分析了1535次来自于SGR J1550-5418, SGR 1806-20和SGR 1900+14的磁陀星爆发, 发现其能量频数分布的幂律谱指数分别为1.84, 1.68和1.65. Lin等人^[32]对来自于SGR J1935+2154的127次磁陀星爆发做了多波段的观测分析, 并得到了其能量频数分布的幂律谱指数为

图 4 (网络版彩图)伽马射线暴对应X射线耀斑的频数分布. 左图为能量的积分频数分布, 右图为持续时间分布^[27]

Figure 4 (Color online) Frequency distributions of GRB X-ray flares. The left panel corresponds to the cumulative distributions of energy releases, and the right panel to the occurrence rate of flare duration [27].

1.78. 以上研究者均认为SOC理论可以很好地解释磁陀星爆发.

活动星系核(AGNs)是一类中心包含超大质量黑洞并伴有吸积盘和喷流的高能天体. 如果其喷流方向朝向地球, 对于观测者即表现为高光度、高偏振、视超光速运动及快速光变的耀变体(Blazars). 对耀变体 Blazar GC 0109+224的观测发现, 其间歇性爆发所产生的射电峰值强度符合幂律分布, 其谱指数为 $\alpha_P = 1.55$ ^[100], 因而耀变体爆发可被认为是SOC过程的体现. 此外, Neilsen等人^[101]利用CHANDRA卫星对银河系中心黑洞Sgr A*的观测发现, 其产生的39个X射线耀发的持续时间、峰值强度、积分能量均表现为幂律分布, 谱指数分别为 $\alpha_T = 0.9$, $\alpha_P = 1.9$ 和 $\alpha_E = 1.5$, 如图5所示, 这也被认为是一种SOC现象.

3.3 宇宙线

宇宙线是来自于外太空的高能粒子流, 主要成分包括质子和原子核, 以及少量正负电子对、光子、中微子和介子. 宇宙线的能量范围可以从1 GeV跨越11个量级到达100 EeV, 低于1 GeV的高能粒子则主要是来自于太阳爆发的加速, 可称为太阳宇宙线或太阳高能粒子. 图6为宇宙线能谱^[102], 可以看到除了存在3 PeV附近的“膝”区(第二膝区没有被完全确认)和4 EeV附近的“踝”区外, 大致可以用一条指数为2.7的幂律谱来拟合^[103].

图 5 (网络版彩图)人马座Sgr A*中X射线耀发的积分流量(a)、峰值强度(b)和持续时间(c)的幂律频数分布^[101]

Figure 5 (Color online) Frequency distributions of X-ray flare fluence (a), peak count rate (b), and duration (c) observed from Sgr A* [101].

除了可以用具体的加速机制(比如直流电场加速、扩散激波加速和波粒相互作用)解释宇宙线能谱的形成之外, SOC过程也可以用于解释宇宙线能谱的幂律分布, 甚至谱指数的大小^[5]. 我们将宇宙线粒子每一次加速当作一次SOC雪崩过程, 考虑到宇宙线的加速源区离地球观测点非常遥远, 可以认为观测到的宇宙线粒子只是在一维的雪崩尺度 L 上被加速的, 因而粒子能量 $E \propto L$. 雪崩尺度的分布满足 $N(L) \propto L^{-3}$, 由此得到 $N(E) \propto N(L) \propto L^{-3} \propto E^{-3}$, 与宇宙线能谱2.7的幂律谱指数相当.

图 6 通过直接测量和大气簇射测量得到的宇宙线能谱^[102]
Figure 6 Energy spectrum of cosmic rays measured directly with detectors above the atmosphere and with air shower detectors^[102].

4 自组织临界过程的元胞自动机模拟

以上我们介绍了SOC的概念、物理过程及其在天体物理中的观测和应用。那么如何去研究一个SOC系统的动力学演化过程呢？最主要的工具是CA模拟。CA是由具有离散的、有限状态的格点所组成的网格化空间，按照局部区域的数学和物理规则，在离散的时间维度上实现非线性动力学系统的时空演化。

利用CA进行SOC过程的数值模拟时，最重要的算法包括：(1) 模拟所在的空间网格是如何构建的？(2) 能量驱动机制是怎样的？(3) 临界点的判定条件是什么？(4) 临界点后的雪崩分配规则又是什么？以下我们将主要介绍SOC的CA模拟在太阳爆发活动中的应用。

4.1 BTW沙堆模型

最初利用CA进行SOC过程模拟的是SOC理论的创立者Bak等人^[1,2]，以下简称BTW沙堆模型。以最简单的一维沙堆为例，如图7所示。向沙堆上随机格点处增加一粒砂，当该处沙粒的数值与相邻格点数值之差 Z_c 大于某一临界值，比如 $Z_c = 2$ 时，就会发生局部雪崩，并向相邻两个格点均分其差值。如相邻格点上仍然满足临界条件，局部雪崩将再次发生，直到所有位置处均不满足临界条件时，一次能量释放过程(完整雪崩过

图 7 一维BTW沙堆模型^[2]
Figure 7 One-dimensional BTW sandpile model^[2].

程)结束。

在三维情况下，每个格点的相邻格点数量增加到6个，这样BTW沙堆模型的计算规则成为

$$\begin{aligned} z(i, j, k) &= z(i, j, k) + 1, \text{ input,} \\ z(i, j, k) &= z(i, j, k) - 6, \text{ if } z(i, j, k) \geq 6, \\ z(i \pm 1, j \pm 1, k \pm 1) &= z(i \pm 1, j \pm 1, k \pm 1) + 1. \end{aligned} \quad (10)$$

对模拟的雪崩进行统计分析发现，雪崩尺度(能量)的幂律频数分布谱指数为~1.37，雪崩持续时间的谱指数~1.08^[2]。

4.2 LH Solar CA模型

Lu和Hamilton^[37,38]将CA模拟应用到天体物理SOC过程中，并发展了Solar CA模型。他们用S维($S = 1, 2, 3$)空间中每一个格点的数值表示该处的日冕磁场强度 $B_{i,j,k}$ ，并定义本地格点与周围格点的磁场梯度为

$$\Delta B = B_{i,j,k} - \frac{1}{2S} \sum_{n=1}^{2S} B_n, \quad (11)$$

其中， B_n 表示与本地格点 $B_{i,j,k}$ 相邻格点的日冕磁场强度。在随机格点处增加磁场强度，当磁场梯度超过某一临界值 B_c 时就会发生雪崩或者说磁场能量的释放。这类似于Parker纳耀斑模型中磁场切向不连续性(剪切角)达到某一阈值后产生的磁重联^[104]。

假设雪崩发生后格点的磁场向周围释放的分配规则是各项同性的，那么可以计算每次雪崩的磁场能量释放为

$$\Delta E_m = \frac{2S}{2S+1} \Delta B^2. \quad (12)$$

通过这个较为简洁的模型, 可以重现太阳耀斑在持续时间、峰值强度和积分能量上的幂律频数分布, 如图8所示, 其中谱指数 $\alpha_P = 1.8$, $\alpha_E = 1.4$, 他们认为该结果符合观测的硬X射线耀斑的幂律频数分布^[105,106].

4.3 离散MHD方程的CA模型

之后, 一系列更符合物理规律的CA模型逐步发展起来. 他们将离散化的MHD方程应用于CA模型, 采取多种不同的空间网格结构、能量驱动机制、临界判定条件和能量分配规则, 从而实现太阳和天体爆发活动的CA模拟和频数分布研究^[42-50]. 与纯粹的MHD数值模拟相比, CA模拟具有独特的优势: 一则其所需计算资源相对较少, 且能够产生数量可观的爆发活动; 二则可以分析任何一次雪崩的时空演化过程, 有助于理解SOC系统的分形维度.

这里仅举一例以作说明, 在对磁尾能量释放和磁层亚暴的CA模拟中, Takalo等人^[43]从如下磁感应方程出发:

$$\frac{\partial B}{\partial t} = \eta \nabla^2 B + \nabla \times (V \times B), \quad (13)$$

其中, 右侧第一项(拉普拉斯项)表示磁能耗散, 在CA模

拟中可认为雪崩能量释放用 ηL 表示, 第二项为对流项, 可认为能量驱动用 $S(x, y, t)$ 表示. 在二维情况下, 把磁感应方程格点化后, 耗散项就变为

$$\eta L = \frac{\eta}{\Delta x^2} [B(x, y+1) + B(x+1, y) + B(x, y-1) + B(x-1, y) - 4B(x, y)]. \quad (14)$$

因此, 雪崩的发生取决于拉普拉斯项大于某个临界值 $L > L_{cr}$. 随后当前格点与周围格点磁场强度的差值 $\Delta B = \eta(x, y)(L - L_{cr})$.

将向其周围格点均分. 系统能量可用如下方程表示:

$$E(t) = \frac{1}{2\mu_0} \sum_{x,y=1}^n B(x, y, t)^2. \quad (16)$$

这样即可得到每次雪崩的能量释放. 模拟结果显示其能量频数分布的幂律谱指数约为1.5^[43].

4.4 三维MFR CA模型

Wang等人^[107]进一步发展了前人关于太阳耀斑的CA模型, 构建了一个基于三维磁通量绳(Magnetic Flux Rope, MFR)的CA模型. 我们的出发点源于MFR结构在宇宙中的普遍存在以及MFR与天体爆发活动的密切联系. 例如, 当前的研究表明MFR是太阳爆发的关键所在^[108-112], MFR与Birkeland电流和磁层亚暴的相关性^[113], MFR在恒星际中表现为纤维状结构^[114,115], 磁陀星周围环绕有MFR^[116,117], 黑洞吸积盘以及喷流结构中可能存在MFR^[118]等. 因此, 发展基于MFR的三维CA模型对于理解天体爆发的SOC过程具有普遍的适用性.

图9为三维MFR CA模型的示意图. 其中左侧的MFR是由Titov-Démoulin-modified (TDm)模型构建而成的^[119,120]. 中间为格点化的MFR结构, 包含 $30 \times 30 \times 30$ 个格点. 从实际观测和磁场外推的研究来看, MFR从内到外具有不同类型的缠绕方式^[121,122]. 这促使我们可以考虑图9右侧所示不同类型的能量驱动机制, 即能量注入由内而外是增加、减少或均匀的. 用磁矢势 $A_{i,j,k} \mathbf{z}$ 代替磁场强度, 这样自然满足磁场散度为零的约束条件. 在柱坐标系下的磁场强度可表示为

$$B = \nabla \times A(r, \varphi, z) \mathbf{z} + B_0 \mathbf{z}, \quad (17)$$

其中, B_0 为 z 方向的背景磁场强度. 那么电流强度可以

图8 LH Solar CA模型得到的雪崩能量、持续时间和峰值强度的幂律频数分布^[37]

Figure 8 Frequency distributions of the simulated avalanche energy, duration, and peak intensity according to the LH Solar CA model [37].

图 9 (网络版彩图)基于三维磁通量绳的CA模型示意图. 左: 利用TDm模型构建的磁通量绳; 中: 网格化的磁通量绳结构 (30×30×30); 右: 三种能量驱动机制^[107]

Figure 9 (Color online) Sketch map of the 3D magnetic flux rope (MFR) CA model. Left panel: An MFR constructed by using the TDm model; Middle panel: the latticed MFR composed of 30×30×30 nodes; Right panel: the three kinds of energy driving mechanisms [107].

表示为

$$J = -\frac{1}{\mu_0} \nabla^2 A_z. \quad (18)$$

因此, 磁矢势的分布决定了电流强度的分布, 进一步决定了是否可以在局部区域触发雪崩, 产生能量释放过程.

系统的能量可以计算如下:

$$E = \sum \frac{1}{2} A_z J_z. \quad (19)$$

根据MFR由内而外可能具有不同的缠绕方式, 我们考虑一个全局的且与位置相关的能量驱动机制,

$$A_{i,j,k}^{t+1} = [1 + \varepsilon(i,j)] A_{i,j,k}^t, \quad \forall(i,j,k), \quad (20)$$

其中, $\varepsilon(i,j)$ 为磁矢势的增加率. 在该驱动机制的作用下, 如果局部区域的磁矢势差值达到某一随机分布的阈值 A_c 时, 即电流强度分布在局部区域达到某一阈值 J_c 时, 就会发生雪崩或能量释放. 其中磁矢势差值表示为

$$\Delta A_{i,j,k} = A_{i,j,k} - \frac{1}{6} A_n, \quad (21)$$

其中, A_n 为周围6个格点磁矢势的平均值.

局部雪崩发生后, 周围区域的磁矢势在周围格点上的分配规则如下:

$$\begin{aligned} A_{i,j,k}^{t+1} &= A_{i,j,k}^t - \frac{6}{7} A_c, \\ A_{i+1,j,k}^{t+1} &= A_{i+1,j,k}^t + \frac{6}{7} \frac{r_1}{x+a} A_c, \\ A_{i-1,j,k}^{t+1} &= A_{i-1,j,k}^t + \frac{6}{7} \frac{r_2}{x+a} A_c, \\ A_{i,j+1,k}^{t+1} &= A_{i,j+1,k}^t + \frac{6}{7} \frac{r_3}{x+a} A_c, \\ A_{i,j-1,k}^{t+1} &= A_{i,j-1,k}^t + \frac{6}{7} \frac{r_4}{x+a} A_c, \\ A_{i,j,k+1}^{t+1} &= A_{i,j,k+1}^t + \frac{6}{7} \frac{r_5}{x+a} A_c, \\ A_{i,j,k-1}^{t+1} &= A_{i,j,k-1}^t + \frac{6}{7} \frac{x}{x+a} A_c, \end{aligned} \quad (22)$$

其中, r_i 为 (0, 1) 之间的随机数, $a = \sum r_i$, x 为自由参数, 由雪崩发生后系统能量达到最低的第一性原理所确定^[49,50], 也即

$$\frac{\partial(E^{t+1} - E^t)}{\partial x} = 0. \quad (23)$$

通过以上关键步骤的设置, 我们分别对三种能量驱动机制运行了 5×10^6 步. 例如对于均匀驱动的情况 (即第二种情况), 整个模拟共计产生了 5214 次完整雪

图 10 (网络版彩图) 三维MFR CA模拟的雪崩持续时间、峰值强度和释放能量的幂律频数分布^[107]

Figure 10 (Color online) Frequency distributions of the CA simulated avalanche duration, peak intensity, and released energy [107].

崩过程. 统计模拟雪崩的持续时间、峰值强度和释放能量, 可以得到如图10所示的幂律频数分布, 计算的谱指数分别为 $\alpha_T = 1.38 \pm 0.01$, $\alpha_P = 1.22 \pm 0.02$, $\alpha_E = 1.18 \pm 0.01$.

该模型还可以做进一步推广, 比如可以采用非守恒的雪崩分配规则, 即当雪崩发生后, 局部区域的磁矢势只将部分数值分配到其周围格点上, 其余部分释放到SOC系统之外. 这种情况可以解释某些开放的动力学系统, 比如日冕物质抛射过程, 或是太阳活动区与宁静区及其他活动区有磁场连接和能量交换的情况.

5 自组织临界与MHD湍流

需要说明的是, SOC并非是非线性动力学系统中产生幂律频数分布的唯一物理机制, 湍流过程同样可以产生能量释放的幂律频数分布. 在天体物理环境中磁化等离子体占主导, 其动力学尺度远大于耗散尺度, 磁雷诺数通常都特别大, 因而由各种不稳定性造成的MHD湍流无处不在, 例如在星际空间、超新星遗迹、黑洞吸积盘、太阳内部对流区、日冕和太阳风、磁层和电离层. 图11显示的是Cluster卫星观测到的太阳风能谱^[123]. 可以看到太阳风的湍流能谱在流体力学尺度上表现为典型的Kolmogorov谱, 谱指数大小为5/3, 在离子动力学尺度上幂律谱指数大小为8/3. 在太阳爆发过程中, 磁通量绳下方的电流片中也观测到了幂律谱指数大小在~1.0~1.8之间的湍流能谱^[124].

天体物理中的爆发活动原则上都可以通过MHD方程湍流解在时空上的局部剧变来体现. 然而在实际观测中却很难获得爆发过程中物理参量的真实细节,

图 11 (网络版彩图) Cluster卫星观测到的太阳风能谱^[123]

Figure 11 (Color online) Solar wind spectra measured by the Cluster mission [123].

在MHD数值模拟中, 所需要的计算资源又异常庞大, 所以通过SOC模型来理解这些爆发活动成为一个相对简洁且必要的方法. 尽管SOC和MHD湍流是两类不同的模型, 但在一定程度上可适用于不同尺度或层次的爆发活动. 对于一些小尺度的能量释放, 利用MHD湍流来理解更加合理. 对于一些大尺度的能量释放过程, 则可以通过相对简洁的SOC雪崩模型来解释.

那么如何区分SOC和MHD湍流在非线性动力学系统能量释放中的作用呢? 笔者近年来尝试从SOC和湍流的本质不同点入手: SOC事件的发生是彼此间相互独立的雪崩, 而湍流过程则涉及不同尺度的能量级联, 因而事件之间是相互联系的. 于是通过对等待时间分布(Waiting Time Distribution, WTD)的研究, 可以在一定程度上厘清这个问题^[20,24,70,125].

5.1 等待时间分布

等待时间是指每两个相邻事件之间的时间差. 从SOC的定义来看, 雪崩事件的发生是随机过程, 因而其等待时间在统计上应该遵从泊松分布^[17,41,126]:

$$P(\Delta t) = \lambda e^{-\lambda \Delta t}, \quad (24)$$

其中, λ 为事件的平均发生率. 然而在实际观测中, 我们发现, 天体爆发活动从一个较长的时间尺度上看, λ 是时间变化的. 例如太阳爆发的发生率随着太阳活动周存在11年左右的长周期及其他短周期的变化. 因此, 太阳爆发的WTD需要使用非稳态泊松分布来表示^[127–129],

$$P(\Delta t) = \begin{cases} \lambda_1 e^{-\lambda_1 \Delta t}, & t_1 \leq t < t_2, \\ \lambda_2 e^{-\lambda_2 \Delta t}, & t_2 \leq t < t_3, \\ \dots & \dots \\ \lambda_n e^{-\lambda_n \Delta t}, & t_n \leq t \leq t_{n+1}. \end{cases} \quad (25)$$

用连续函数 $\lambda(t)$ 对上式进行转换, 即变为

$$P(\Delta t) = \frac{\int_0^T \lambda(t)^2 e^{-\lambda(t) \Delta t} dt}{\int_0^T \lambda(t) dt}. \quad (26)$$

再定义 $f(\lambda)d\lambda = dt/T$, 其中 $f(\lambda)$ 为事件发生率的分布函数, 于是WTD函数表达为

$$P(\Delta t) = \frac{\int_0^\infty f(\lambda) \lambda^2 e^{-\lambda \Delta t} d\lambda}{\int_0^\infty \lambda f(\lambda) d\lambda}. \quad (27)$$

这里我们采用一个普适的 $f(\lambda)$,

$$f(\lambda) = A \lambda^{-\alpha} e^{-\beta \lambda}. \quad (28)$$

将其代入方程(27), 推导后即得到一个普适的非稳态泊松分布公式^[125]:

$$P(\Delta t) = A \frac{\Gamma(3-\alpha)}{\lambda} (\beta + \Delta t)^{-(3-\alpha)}, \quad (29)$$

其中, $0 \leq \alpha < 2$. 可以清楚地看到, 当 Δt 较大时非稳态泊松分布接近幂律分布, 幂律谱指数的范围是(1, 3].

该公式可用于解释许多天体爆发活动的WTDs, 比如太阳高能粒子事件和II型太阳射电暴^[125]、日冕物质抛射^[130]、恒星耀斑^[24]、伽马射线暴^[131]等. 图12为类太阳恒星KIC11551430所产生耀斑的WTD, 可以用非稳态泊松分布较好地拟合, 表明采用SOC雪崩随

图 12 (网络版彩图)类太阳恒星KIC11551430耀斑的等待时间分布^[24]

Figure 12 (Color online) WTD of stellar flares produced by the solar type star KIC11551430 [24].

机过程模型可以在一定程度上模拟恒星耀斑的等待时间^[24].

如果非线性动力学系统中能量释放过程由湍流所主导, 那么表示离散随机过程的泊松分布将不再适用, 而需要用一个连续概率分布——稳定分布来表达^[66],

$$P(\Delta t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \varphi(z) e^{-i\Delta t z} dz. \quad (30)$$

在两参数的简化情况下, 其特征函数表示为

$$\varphi(z) = \exp(-c|z|^\alpha). \quad (31)$$

于是可以得到等待时间分布的Lévy方程^[126]:

$$P(\Delta t) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \cos(z\Delta t) \exp(-c|z|^\alpha) dz, \quad (32)$$

其中, $0 < \alpha \leq 2$, 当 Δt 较大时, 该方程可以产生尾部的幂律分布 $\sim \Delta t^{-(\alpha+1)}$, 幂律谱指数的范围同样是(1, 3]. 该公式可用于解释一些与湍流相关的WTD, 比如MHD模拟的太阳活动^[51,132]、源于同一活动区的太阳耀斑^[70]、行星际的磁通量绳^[133]等. 图13所示为太阳第24周最活跃的AR12673产生耀斑的WTD, 可以看到非稳

图 13 (网络版彩图)活动区AR12673所产生耀斑的等待时间分布^[70].

Figure 13 (Color online) WTD of solar flares produced in AR12673 [70].

态泊松分布不再适用, 而Lévy方程却能够很好地拟合, 表明该活动区耀斑的产生偏离SOC的随机过程, 可能与MHD湍流的记忆过程相关^[70].

5.2 泊松分布的K-S测试

为了进一步研究天体爆发活动的发生率与随机过程的偏离程度, 我们可以用Kolmogorov-Smirnov (K-S) 测试来判断其与泊松分布的偏离程度^[24,128,134,135]. 首先引入一个随机变量:

$$H_i = \frac{2\delta t_i}{2\delta t_i + \delta \tau_i}, \quad (33)$$

其中, $\delta t_i = \min(t_{i+1} - t_i, t_i - t_{i-1})$, 当 $\delta t_i = t_{i+1} - t_i$ 时, $\delta \tau_i = t_{i+2} - t_{i+1}$, 当 $\delta t_i = t_i - t_{i-1}$ 时, $\delta \tau_i = t_{i-1} - t_{i-2}$. 如果爆发活动是完全随机的, 则 δt_i 和 $\delta \tau_i$ 的分布均符合泊松分布, 那么 H_i 的概率密度函数为

$$P(H_i) = 2\lambda_i e^{-2\lambda_i \delta t_i} \lambda_i e^{-\lambda_i \delta \tau_i}. \quad (34)$$

设 h 为一个(0, 1]之间的参考值, 通过如下计算可

得其积分概率密度, 可以看到积分概率密度并不依赖于 λ 的数值,

$$\begin{aligned} P(H < h) &= \int_h^1 P(H) dH = 1 - h = 1 - h \quad \text{or} \\ P(H < h) &= h. \end{aligned} \quad (35)$$

如果泊松假设成立, 那么观测得到的随机变量 H_i 将与理论的积分概率密度相吻合, 而偏离的程度则表示与随机过程的差别程度. 图14所示为GOES卫星观测的C级和M级以上太阳耀斑, 以及Kepler卫星观测的类太阳恒星耀斑的K-S测试^[24]. 可以看到, 较弱的C级耀斑明显偏离泊松分布, 而较强的M级以上耀斑和恒星耀斑则与泊松分布较为吻合. 这似乎说明“超级耀斑”的发生是由SOC主导的随机过程, 这就面临着其不可预测性的难题.

5.3 SOC与空间天气预报

太阳耀斑和日冕物质抛射有时会对地球附近的空间环境产生强烈扰动, 并造成灾害性空间天气事件. 随着人类科技的日益进步和对太空探索的日益增多, 空间天气预报和预警成为当前亟需发展的研究领域. 作为灾害性空间天气的源头, 对太阳活动的预报成为关

图 14 (网络版彩图)太阳和恒星耀斑泊松分布的K-S测试^[24]

Figure 14 (Color online) K-S test of the Poisson hypothesis for solar and stellar flares [24].

键所在. 如前文所述, 如果太阳爆发活动尤其是大型的太阳爆发是由SOC过程主导的, 那么其随机分布的特征是否意味着大型太阳爆发是无法预测的呢? 做个类比, 1997年Geller等人^[13]在*Science*上发表了一篇颇具争议的文章“Earthquakes cannot be predicted”. 他们将地球当作一个SOC系统, 发现地震的强度遵从幂律分布, 并认为大地震由一系列小地震(雪崩)累加而成, 而小地震何时以何种强度发展为大地震是随机的, 这样最终得出地震尤其是大地震不可预测的结论. 事实上, 关于大地震是否可预测的问题一直处于争论之中^[136,137].

笔者认为要回答大地震或大型太阳爆发是否可以被预测, 首先需要弄清楚两个问题: (1) 它们是不是源自于纯粹的SOC系统? (2) SOC系统的大尺度雪崩有没有相关参数作为其先兆?

对于第一个问题, 我们在前文中已涉及. 从观测的角度, 源于同一活动区的耀斑偏离SOC预测的泊松分布(图13), 而MHD湍流可能在一定程度上起到了重要作用. 此外, K-S测试表明即使对于大型太阳耀斑或恒星耀斑也并非完全符合泊松分布(图14). 从CA模拟的角度, 采用非守恒的雪崩分配规则^[48], 可以模拟某些并非完全独立的SOC系统, 这些系统与周围环境有磁场连接或能量交换. 因此, 大型太阳爆发可能并非源于纯粹的SOC系统, MHD湍流或其他物理过程也可能起到重要作用.

对于第二个问题, 近期的研究工作给了我们很好的启示. Morales和Santos^[138]重新回顾了LH Solar CA模型, 在模拟中他们试图找到某些可以造成大型雪崩的参量. 他们首先考虑网格中接近临界点的网格数量, 发现其与雪崩能量释放的大小没有相关性. 但是在大型雪崩发生前, 所有网格点的平均值大小是一个关键参量. 从图15中可以发现, 在4次大型雪崩发生前, 网格点的平均值都有大幅度的增加. 这个模拟结果类似于大型太阳爆发最有可能发生于平均磁场强度较大的活动区或磁通量绳结构, 而平均磁场强度的增加则来自于活动区等离子体的对流、剪切和扭缠运动. 这与太阳活动预报的经验统计方法^[139-142]、物理方法^[143]以及当前流行的机器学习方法^[144,145]所依据的磁场参量是一致的.

通过以上论述, 我们认为大型太阳爆发在一定程度上是可以被预测的. 一则源于太阳爆发并非完全由

图 15 (网络版彩图) LH Solar CA模型模拟雪崩的能量释放与网格点平均值的比^[138]

Figure 15 (Color online) Energy releases of LH Solar CA model, and the mean value of the lattice nodes ^[138].

SOC过程主导; 二则因为尽管SOC事件在统计上是随机分布的, 但某些参量可为雪崩事件发生概率的预报提供重要依据.

6 总结和展望

自1987年SOC理论被提出以来, 它在各个领域被广泛地应用. 绝大多数工作只是拿来主义, 把它当作一个似乎无往而不利的工具来解释观测、模拟和实验中存在的幂律频数分布. 本文从笔者专业出发, 总结了SOC在天体物理中的观测和模拟研究, 着重从理论上概括了SOC的物理过程和频数分布, 从CA模拟上介绍了SOC系统的动力学演化, 并深入讨论了SOC和MHD湍流在非线性动力学系统能量释放中的作用, 以期读者了解或涉猎SOC的研究提供一些有价值的参考. 本文的主要结论以及未来需关注的重要问题简述如下.

(1) SOC是非线性动力学系统能量释放的物理过程, 在不依赖于外部参数调节的情况下, 由能量驱动并通过自组织演化到某个临界点, 随之产生无标度的、分形耗散的且满足幂律分布的能量释放.

(2) 达到临界点后的非线性能量增长方式以及增长时间的随机分布是产生SOC雪崩尺度幂律分布的原因, 其幂律谱指数可由“分形耗散SOC雪崩模型”得到. 然而该模型在分形维度的计算和雪崩尺度的分布等重要假设上还需进一步探索, 以适用于不同SOC系统和

天体爆发现象.

(3) CA是了解SOC系统动力学演化的重要工具. 基于磁通量绳结构(MFR)的三维CA模型, 可以用于解释众多与MFR相关的天体爆发现象, 例如太阳和恒星爆发、地磁活动、磁陀星爆发和伽马射线暴等. 该模型还可以在空间网格结构、能量驱动机制、雪崩分配规则等方面做进一步完善, 从而更好地解释观测.

(4) SOC和MHD湍流均可以产生非线性动力学系统的幂律频数分布, 通过对等待时间的分析可以在一定程度上区分两者在非线性系统能量释放中的作用.

在实际观测中, 比如天体爆发活动, SOC和MHD湍流可能同时存在, 如何将两者结合到统一的模型中, 是一个有待于研究的重要课题.

(5) SOC雪崩的可预测性目前仍是一个存在争议的问题. 笔者在此抛砖引玉: 尽管从统计上SOC系统的能量释放是一个随机过程, 但存在某些参量可以作为其发生概率的重要依据, 从这个角度上来说, SOC并不会造成太阳爆发不可预测这一难题. 如何将SOC应用于灾害性空间天气事件的预警和预报中, 是未来需要考虑的一个重要问题.

参考文献

- Bak P, Tang C, Wiesenfeld K. Self-organized criticality: An explanation of the $1/f$ noise. *Phys Rev Lett*, 1987, 59: 381–384
- Bak P, Tang C, Wiesenfeld K. Self-organized criticality. *Phys Rev A*, 1988, 38: 364–374
- Pruessner G. Self-Organized Criticality: Theory, Models and Characterisation. Cambridge: Cambridge University Press, 2012
- Aschwanden M J. A statistical fractal-diffusive avalanche model of a slowly-driven self-organized criticality system. *Astron Astrophys*, 2012, 539: A2, arXiv: [1112.4859](#)
- Aschwanden M J. A macroscopic description of a generalized self-organized criticality system: Astrophysical applications. *Astrophys J*, 2014, 782: 54–73, arXiv: [1310.4191](#)
- Aschwanden M J, Crosby N B, Dimitropoulou M, et al. 25 years of self-organized criticality: Solar and astrophysics. *Space Sci Rev*, 2016, 198: 47–166, arXiv: [1403.6528](#)
- Zanette D H. Multiplicative processes and city sizes. In: *The Dynamics of Complex Urban Systems. An Interdisciplinary Approach*. Berlin: Springer, 2007
- Mantegna R N, Stanley H E. *The Physics of Complex Systems*. Amsterdam: IOS, 1997
- Bartolozzi M, Leinweber D B, Thomas A W. Self-organized criticality and stock market dynamics: An empirical study. *Physica A*, 2005, 350: 451–465, arXiv: [cond-mat/0405257](#)
- Sepkoski Jr. J J. Ten years in the library: New data confirm paleontological patterns. *Paleobiology*, 1993, 19: 43–51
- Johansen A. Spatio-temporal self-organization in a model of disease spreading. *Physica D*, 1994, 78: 186–193
- Hovius N, Stark C P, Allen P A. Sediment flux from a mountain belt derived by landslide mapping. *Geology*, 1997, 25: 231–234
- Geller R J, Jackson D D, Kagan Y Y, et al. Earthquakes cannot be predicted. *Science*, 1997, 275: 1616
- Consolini G, Lui A T Y. Sign-singularity analysis of current disruption. *Geophys Res Lett*, 1999, 26: 1673–1676
- Uritsky V M, Klimas A J, Vassiliadis D. Critical finite-size scaling of energy and lifetime probability distributions of auroral emissions. *Geophys Res Lett*, 2006, 33: L08102
- Wheatland M S. Flare frequency-size distributions for individual active regions. *Astrophys J*, 2000, 532: 1209–1214
- Wheatland M S. The coronal mass ejection waiting-time distribution. *Sol Phys*, 2003, 214: 361–373
- Aschwanden M J, Stern R A, Güdel M. Scaling laws of solar and stellar flares. *Astrophys J*, 2008, 672: 659–673, arXiv: [0710.2563](#)
- Crosby N B. Frequency distributions: From the Sun to the Earth. *Nonlin Processes Geophys*, 2011, 18: 791–805
- Li C Z, Yang J H, Li C, et al. Self-organized criticality of the solar eruptions during solar cycle 23 (in Chinese). *Sci Sin-Phys Mech Astron*, 2016, 46: 029501 [李成章, 杨建华, 李川, 等. 太阳第23活动周爆发现象的自组织临界特征. 中国科学: 物理学 力学 天文学, 2016, 46: 029501]
- Aschwanden M J. Self-organized criticality in solar and stellar flares: Are extreme events scale-free? *Astrophys J*, 2019, 880: 105, arXiv: [1906.05840](#)
- Maehara H, Shibayama T, Notsu S, et al. Superflares on solar-type stars. *Nature*, 2012, 485: 478–481

- 23 Aschwanden M J. Thresholded power law size distributions of instabilities in astrophysics. *Astrophys J*, 2015, 814: 19–43, arXiv: [1510.01987](#)
- 24 Li C, Zhong S J, Xu Z G, et al. Waiting time distributions of solar and stellar flares: Poisson process or with memory? *Mon Not R Astron Soc-Lett*, 2018, 479: L139–L142
- 25 Aschwanden M J, Güdel M. Self-organized criticality in stellar flares. *Astrophys J*, 2021, 910: 41–56
- 26 Tu Z L, Yang M, Wang H F, et al. Superflares, chromospheric activities, and photometric variabilities of solar-type stars from the second-year observation of TESS and spectra of LAMOST. *Astrophys J Suppl Ser*, 2021, 253: 35–56, arXiv: [2101.02901](#)
- 27 Wang F Y, Dai Z G. Self-organized criticality in X-ray flares of gamma-ray-burst afterglows. *Nat Phys*, 2013, 9: 465–467, arXiv: [1308.1253](#)
- 28 Harko T, Mocanu G, Stroia N. Self organized criticality in an one dimensional magnetized grid. Application to GRB X-ray afterglows. *Astrophys Space Sci*, 2015, 357: 84–92, arXiv: [1503.01980](#)
- 29 Yi S X, Xi S Q, Yu H, et al. Comprehensive study of the X-ray flares from gamma-ray bursts observed by *SWIFT*. *Astrophys J Suppl Ser*, 2016, 224: 20–32, arXiv: [1603.07429](#)
- 30 Göğüş E, Woods P M, Kouveliotou C, et al. Statistical properties of SGR 1806-20 bursts. *Astrophys J*, 2000, 532: L121–L124, arXiv: [astro-ph/0002181](#)
- 31 Cheng Y, Zhang G Q, Wang F Y. Statistical properties of magnetar bursts and FRB 121102. *Mon Not R Astron Soc*, 2020, 491: 1498–1505, arXiv: [1910.14201](#)
- 32 Lin L, Göğüş E, Roberts O J, et al. Burst properties of the most recurring transient magnetar SGR J1935+2154. *Astrophys J*, 2020, 893: 156–172, arXiv: [2003.10582](#)
- 33 Sornette D. Critical Phenomena in Natural Sciences: Chaos, Fractals, Self-organization and Disorder: Concepts and Tools. Heidelberg: Springer, 2004. 528
- 34 Yoshida F, Nakamura T, Watanabe J I, et al. Size and spatial distributions of sub-km main-belt asteroids. *Publ Astron Soc Jpn*, 2003, 55: 701–715
- 35 Crosby N B, Meredith N P, Coates A J, et al. Modelling the outer radiation belt as a complex system in a self-organised critical state. *Nonlin Processes Geophys*, 2005, 12: 993–1001
- 36 Aschwanden M J, Shimizu T. Multi-wavelength observations of the spatio-temporal evolution of solar flares with AIA/*SDO*. II. Hydrodynamic scaling laws and thermal energies. *Astrophys J*, 2013, 776: 132–156, arXiv: [1308.5198](#)
- 37 Lu E T, Hamilton R J. Avalanches and the distribution of solar flares. *Astrophys J*, 1991, 380: L89
- 38 Lu E T, Hamilton R J, McTiernan J M, et al. Solar flares and avalanches in driven dissipative systems. *Astrophys J*, 1993, 412: 841–852
- 39 Georgoulis M K, Vlahos L. Variability of the occurrence frequency of solar flares and the statistical flare. *Astron Astrophys*, 1998, 336: 721–734
- 40 Charbonneau P, McIntosh S W, Liu H L, et al. Avalanche models for solar flares. *Sol Phys*, 2001, 203: 321–353
- 41 Aschwanden M J. Self-Organized Criticality in Astrophysics, the Statistics of Nonlinear Processes in the Universe. New York: Springer-Praxis, 2011. 416
- 42 Vassiliadis D, Anastasiadis A, Georgoulis M, et al. Derivation of solar flare cellular automata models from a subset of the magnetohydrodynamic equations. *Astrophys J*, 1998, 509: L53–L56
- 43 Takalo J, Timonen J, Klimas A, et al. Nonlinear energy dissipation in a cellular automaton magnetotail field model. *Geophys Res Lett*, 1999, 26: 1813–1816
- 44 Isliker H, Anastasiadis A, Vlahos L. MHD consistent cellular automata (CA) models: I. Basic features. *Astron Astrophys*, 2000, 363: 1134–1144
- 45 Isliker H, Anastasiadis A, Vlahos L. MHD consistent cellular automata (CA) models. *Astron Astrophys*, 2001, 377: 1068–1080
- 46 Morales L, Charbonneau P. Self-organized critical model of energy release in an idealized coronal loop. *Astrophys J*, 2008, 682: 654–666
- 47 Morales L, Charbonneau P. Geometrical properties of avalanches in a pseudo-3D coronal loop. *Astrophys J*, 2009, 698: 1893–1902
- 48 Strugarek A, Charbonneau P, Joseph R, et al. Deterministically driven avalanche models of solar flares. *Sol Phys*, 2014, 289: 2993–3015, arXiv: [1402.4730](#)
- 49 Farhang N, Safari H, Wheatland M S. Principle of minimum energy in magnetic reconnection in a self-organized critical model for solar flares. *Astrophys J*, 2018, 859: 41–50, arXiv: [1804.10356](#)
- 50 Farhang N, Wheatland M S, Safari H. Energy balance in avalanche models for solar flares. *Astrophys J*, 2019, 883: L20, arXiv: [1909.00195](#)
- 51 Boffetta G, Carbone V, Giuliani P, et al. Power laws in solar flares: Self-organized criticality or turbulence? *Phys Rev Lett*, 1999, 83: 4662–4665, arXiv: [chao-dyn/9904043](#)

- 52 Mandelbrot B B. The Fractal Geometry of Nature. San Francisco: W. H. Freeman, 1983
- 53 Li C, Fang C, Li Z, et al. Chinese H α Solar Explorer (CHASE)—A complementary space mission to the ASO-S. *Res Astron Astrophys*, 2019, 19: 165–169
- 54 Gan W Q, Zhu C, Deng Y Y, et al. Advanced Space-based Solar Observatory (ASO-S): An overview. *Res Astron Astrophys*, 2019, 19: 156–163
- 55 Fang C, Gu B Z, Yuan X Y, et al. 2.5 m wide-field and high-resolution telescope (in Chinese). *Sci Sin-Phys Mech Astron*, 2019, 49: 059603 [方成, 顾伯忠, 袁祥岩, 等. 2.5 m大视场高分辨率望远镜. 中国科学: 物理学 力学 天文学, 2019, 49: 059603]
- 56 Rao C H, Gu N T, Rao X J, et al. First light of the 1.8-m solar telescope—CLST. *Sci China-Phys Mech Astron*, 2020, 63: 109631
- 57 Crosby N B, Aschwanden M J, Dennis B R. Frequency distributions and correlations of solar X-ray flare parameters. *Sol Phys*, 1993, 143: 275–299
- 58 Biesecker D A. On the Occurrence of Solar Flares Observed with the Burst and Transient Source Experiment (BATSE). Dissertation for Doctoral Degree. New Hampshire: University of New Hampshire, 1994
- 59 Su Y, Gan W Q, Li Y P. A statistical study of RHESSI flares. *Sol Phys*, 2006, 238: 61–72
- 60 Christe S, Hannah I G, Krucker S, et al. *RHESSI* microflare statistics. I. Flare-finding and frequency distributions. *Astrophys J*, 2008, 677: 1385–1394
- 61 Aschwanden M J. The state of self-organized criticality of the Sun during the last three solar cycles. I. Observations. *Sol Phys*, 2011, 274: 99–117, arXiv: [1006.4861](#)
- 62 Shimizu T. Energetics and occurrence rate of active-region transient brightenings and implications for the heating of the active-region corona. *Publ Astron Soc Jpn*, 1995, 47: 251–263
- 63 Shimojo M, Shibata K. Occurrence rate of microflares in an X-ray-bright point within an active region. *Astrophys J*, 1999, 516: 934–938
- 64 Veronig A, Temmer M, Hanslmeier A, et al. Temporal aspects and frequency distributions of solar soft X-ray flares. *Astron Astrophys*, 2002, 382: 1070–1080
- 65 Yashiro S, Akiyama S, Gopalswamy N, et al. Different power-law indices in the frequency distributions of flares with and without coronal mass ejections. *Astrophys J*, 2006, 650: L143–L146, arXiv: [astro-ph/0609197](#)
- 66 Aschwanden M J, Freeland S L. Automated solar flare statistics in soft X-rays over 37 years of *GOES* observations: The invariance of self-organized criticality during three solar cycles. *Astrophys J*, 2012, 754: 112–126, arXiv: [1205.6712](#)
- 67 Krucker S, Benz A O. Energy distribution of heating processes in the quiet solar corona. *Astrophys J*, 1998, 501: L213–L216
- 68 Parnell C E, Jupp P E. Statistical analysis of the energy distribution of nanoflares in the quiet Sun. *Astrophys J*, 2000, 529: 554–569
- 69 Uritsky V M, Davila J M, Ofman L, et al. Stochastic coupling of solar photosphere and corona. *Astrophys J*, 2013, 769: 62–81, arXiv: [1212.5610](#)
- 70 Lei W H, Li C, Chen F, et al. Do the solar flares originating from an individual active region follow a random process or a memory-dependent correlation? *Mon Not R Astron Soc*, 2020, 494: 975–982
- 71 Donati J F, Cameron A C. Differential rotation and magnetic polarity patterns on AB Doradus. *Mon Not R Astron Soc*, 1997, 291: 1–19
- 72 Berdyugina S V. Starspots: A key to the stellar dynamo. *Living Rev Sol Phys*, 2005, 2: 8
- 73 He H, Wang H, Yun D. Activity analyses for solar-type stars observed with *Kepler*. I. Proxies of magnetic activity. *Astrophys J Suppl Ser*, 2015, 221: 18–35, arXiv: [1602.02233](#)
- 74 Wright N J, Drake J J. Solar-type dynamo behaviour in fully convective stars without a tachocline. *Nature*, 2016, 535: 526–528, arXiv: [1607.07870](#)
- 75 Zhang J, Bi S, Li Y, et al. Magnetic activity of F-, G-, and K-type stars in the LAMOST-*Kepler* field. *Astrophys J Suppl Ser*, 2020, 247: 9, arXiv: [2002.09842](#)
- 76 Schaefer B E. Flashes from normal stars. *Astrophys J*, 1989, 337: 927–933
- 77 Schaefer B E, King J R, Deliyannis C P. Superflares on ordinary solar-type stars. *Astrophys J*, 2000, 529: 1026–1030, arXiv: [astro-ph/9909188](#)
- 78 Kowalski A F, Hawley S L, Wisniewski J P, et al. Time-resolved properties and global trends in dMe flares from simultaneous photometry and spectra. *Astrophys J Suppl Ser*, 2013, 207: 15–71, arXiv: [1307.2099](#)
- 79 Balona L A. Flare stars across the H-R diagram. *Mon Not R Astron Soc*, 2015, 447: 2714–2725
- 80 Yan Y, He H, Li C, et al. Characteristic time of stellar flares on Sun-like stars. *Mon Not R Astron Soc-Lett*, 2021, 505: L79–L83, arXiv: [2105.12375](#)

- 81 Vida K, Kriskovics L, Oláh K, et al. Investigating magnetic activity in very stable stellar magnetic fields. *Astron Astrophys*, 2016, 590: A11, arXiv: [1603.00867](#)
- 82 Odert P, Leitzinger M, Hanslmeier A, et al. Stellar coronal mass ejections—I. Estimating occurrence frequencies and mass-loss rates. *Mon Not R Astron Soc*, 2017, 472: 876–890, arXiv: [1707.02165](#)
- 83 Argiroffi C, Reale F, Drake J J, et al. A stellar flare-coronal mass ejection event revealed by X-ray plasma motions. *Nat Astron*, 2019, 3: 742–748, arXiv: [1905.11325](#)
- 84 Odert P, Leitzinger M, Guenther E W, et al. Stellar coronal mass ejections—II. Constraints from spectroscopic observations. *Mon Not R Astron Soc*, 2020, 494: 3766–3783, arXiv: [2004.04063](#)
- 85 Aschwanden M J, Tarbell T D, Nightingale R W, et al. Time variability of the “quiet” Sun observed with *TRACE*. II. Physical parameters, temperature evolution, and energetics of extreme-ultraviolet nanoflares. *Astrophys J*, 2000, 535: 1047–1065
- 86 Shibayama T, Maehara H, Notsu S, et al. Superflares on solar-type stars observed with *Kepler*. I. Statistical properties of superflares. *Astrophys J Suppl Ser*, 2013, 209: 5–17, arXiv: [1308.1480](#)
- 87 Wu C J, Ip W H, Huang L C. A study of variability in the frequency distributions of the superflares of G-type stars observed by the *Kepler* mission. *Astrophys J*, 2015, 798: 92
- 88 Yang H, Liu J. The flare catalog and the flare activity in the *Kepler* mission. *Astrophys J Suppl Ser*, 2019, 241: 29–47, arXiv: [1903.01056](#)
- 89 Veronig A M, Odert P, Leitzinger M, et al. Indications of stellar coronal mass ejections through coronal dimmings. *Nat Astron*, 2021, 5: 697–706, arXiv: [2110.12029](#)
- 90 Kouveliotou C, Meegan C A, Fishman G J, et al. Identification of two classes of gamma-ray bursts. *Astrophys J*, 1993, 413: L101–L104
- 91 Dai Z G, Lu T. γ -ray bursts and afterglows from rotating strange stars and neutron stars. *Phys Rev Lett*, 1998, 81: 4301–4304, arXiv: [astro-ph/9810332](#)
- 92 Piran T. The physics of gamma-ray bursts. *Rev Mod Phys*, 2004, 76: 1143–1210
- 93 Mészáros P. Gamma-ray bursts. *Rep Prog Phys*, 2006, 69: 2259–2321, arXiv: [astro-ph/0605208](#)
- 94 Falcone A D, Morris D, Racusin J, et al. The first survey of X-ray flares from gamma-ray bursts observed by *Swift*: Spectral properties and energetics. *Astrophys J*, 2007, 671: 1921–1938, arXiv: [0706.1564](#)
- 95 Chincarini G, Mao J, Margutti R, et al. Unveiling the origin of X-ray flares in gamma-ray bursts. *Mon Not R Astron Soc*, 2010, 406: 2113–2148, arXiv: [1004.0901](#)
- 96 Kouveliotou C, Dieters S, Strohmayer T, et al. An X-ray pulsar with a superstrong magnetic field in the soft γ -ray repeater SGR1806-20. *Nature*, 1998, 393: 235–237
- 97 Mereghetti S. The strongest cosmic magnets: Soft gamma-ray repeaters and anomalous X-ray pulsars. *Astron Astrophys Rev*, 2008, 15: 225–287, arXiv: [0804.0250](#)
- 98 Olausen S A, Kaspi V M. The McGill magnetar catalog. *Astrophys J Suppl Ser*, 2014, 212: 6–27, arXiv: [1309.4167](#)
- 99 Turolla R, Zane S, Watts A L. Magnetars: The physics behind observations. A review. *Rep Prog Phys*, 2015, 78: 116901, arXiv: [1507.02924](#)
- 100 Ciprini S, Fiorucci M, Tosti G, et al. The optical variability of the blazar GV 0109+224. Hints of self-organized criticality? In: Takalo L O, Valtaoja E, eds. High Energy Blazar Astronomy. San Francisco: ASP, 2003, 229: 265
- 101 Neilsen J, Nowak M A, Gammie C, et al. A *Chandra*/HETGS census of X-ray variability from Sgr A* during 2012. *Astrophys J*, 2013, 774: 42, arXiv: [1307.5843](#)
- 102 Blümer J, Engel R, Hörandel J R. Cosmic rays from the knee to the highest energies. *Prog Particle Nucl Phys*, 2009, 63: 293–338, arXiv: [0904.0725](#)
- 103 Liu R Y, Wang X Y, Zhang B. The origin of extragalactic ultrahigh energy cosmic rays (in Chinese). *Sci Sin-Phys Mech Astron*, 2015, 45: 119507 [柳若愚, 王祥玉, 张冰. 河外极高能宇宙线的起源. 中国科学: 物理学 力学 天文学, 2015, 45: 119507]
- 104 Parker E N. Nanoflares and the solar X-ray corona. *Astrophys J*, 1988, 330: 474–479
- 105 Dennis B R. Solar hard X-ray bursts. *Sol Phys*, 1985, 100: 465–490
- 106 Dennis B R. Solar flare hard X-ray observations. *Sol Phys*, 1988, 118: 49–94
- 107 Wang W B, Li C, Tu Z L, et al. Avalanches of magnetic flux rope in the state of self-organized criticality. *Mon Not Astron Soc*, 2022, 512: 1567–1573
- 108 Chen P F. Coronal mass ejections: Models and their observational basis. *Living Rev Sol Phys*, 2011, 8: 1

- 109 Zhang J, Cheng X, Ding M D. Observation of an evolving magnetic flux rope before and during a solar eruption. *Nat Commun*, 2012, 3: 747, arXiv: [1203.4859](#)
- 110 Cheng X, Guo Y, Ding M D. Origin and structures of solar eruptions I: Magnetic flux rope. *Sci China Earth Sci*, 2017, 60: 1383–1407, arXiv: [1705.08198](#)
- 111 Ouyang Y, Zhou Y H, Chen P F, et al. Chirality and magnetic configurations of solar filaments. *Astrophys J*, 2017, 835: 94–102, arXiv: [1612.01054](#)
- 112 Xing C, Cheng X, Ding M D. Evolution of the toroidal flux of CME flux ropes during eruption. *Innovation*, 2020, 1: 100059, arXiv: [2011.10750](#)
- 113 Akasofu S I. Exploring the Secrets of the Aurora. New York: Springer, 2007. 288
- 114 Federrath C. On the universality of interstellar filaments: Theory meets simulations and observations. *Mon Not R Astron Soc*, 2016, 457: 375–388, arXiv: [1510.05654](#)
- 115 André P. Interstellar filaments and star formation. *Comptes Rendus Geosci*, 2017, 349: 187–197, arXiv: [1710.01030](#)
- 116 Lyutikov M. Magnetar giant flares and afterglows as relativistic magnetized explosions. *Mon Not R Astron Soc*, 2006, 367: 1594–1602, arXiv: [astro-ph/0511711](#)
- 117 Yu C. Magnetar giant flares—Flux rope eruptions in multipolar magnetospheric magnetic fields. *Astrophys J*, 2012, 757: 67–75, arXiv: [1208.1459](#)
- 118 Shukla A, Mannheim K. Gamma-ray flares from relativistic magnetic reconnection in the jet of the quasar 3C 279. *Nat Commun*, 2020, 11: 4176–4182
- 119 Titov V S, Török T, Mikic Z, et al. A method for embedding circular force-free flux ropes in potential magnetic fields. *Astrophys J*, 2014, 790: 163–176
- 120 Titov V S, Downs C, Mikic Z, et al. Regularized biot-savart laws for modeling magnetic flux ropes. *Astrophys J*, 2018, 852: L21, arXiv: [1712.06708](#)
- 121 Guo Y,ariat E, Valori G, et al. Magnetic helicity estimations in models and observations of the solar magnetic field. III. Twist number method. *Astrophys J*, 2017, 840: 40–55, arXiv: [1704.02096](#)
- 122 Wang Y, Shen C, Liu R, et al. Understanding the twist distribution inside magnetic flux ropes by anatomizing an interplanetary magnetic cloud. *J Geophys Res Space Phys*, 2018, 123: 3238–3261, arXiv: [1803.01353](#)
- 123 Alexandrova O, Lacombe C, Mangeney A, et al. Solar wind turbulent spectrum at plasma kinetic scales. *Astrophys J*, 2012, 760: 121–126, arXiv: [1212.0412](#)
- 124 Cheng X, Li Y, Wan L F, et al. Observations of turbulent magnetic reconnection within a solar current sheet. *Astrophys J*, 2018, 866: 64–77, arXiv: [1808.06071](#)
- 125 Li C, Zhong S J, Wang L, et al. Waiting time distribution of solar energetic particle events modeled with a non-stationary Poisson process. *Astrophys J*, 2014, 792: L26–L29, arXiv: [1408.2306](#)
- 126 Lepreti F, Carbone V, Veltri P. Solar flare waiting time distribution: Varying-rate poisson or Lévy function? *Astrophys J*, 2001, 555: L133–L136
- 127 Wheatland M S, Sturrock P A, McTiernan J M. The waiting-time distribution of solar flare hard X-ray bursts. *Astrophys J*, 1998, 509: 448–455
- 128 Wheatland M S. The origin of the solar flare waiting-time distribution. *Astrophys J*, 2000, 536: L109–L112, arXiv: [astro-ph/0005121](#)
- 129 Wheatland M S, Litvinenko Y E. Understanding solar flare waiting-time distributions. *Sol Phys*, 2002, 211: 255–274
- 130 Lamy P L, Floyd O, Boclet B, et al. Coronal mass ejections over solar cycles 23 and 24. *Space Sci Rev*, 2019, 215: 39
- 131 Guidorzi C, Dichiara S, Frontera F, et al. A common stochastic process rules gamma-ray burst prompt emission and X-ray flares. *Astrophys J*, 2015, 801: 57–66, arXiv: [1501.02706](#)
- 132 Galtier S, Pouquet A. Solar flare statistics with a one-dimensional MHD model. *Sol Phys*, 1998, 179: 141–165
- 133 Hu Q, Zheng J, Chen Y, et al. Automated detection of small-scale magnetic flux ropes in the solar wind: First results from the *Wind* spacecraft measurements. *Astrophys J Suppl Ser*, 2018, 239: 12–37, arXiv: [1810.01308](#)
- 134 Bi H, Borner G, Chu Y. Correlations in the absorption lines of the quasar Q0420-388. *Astron Astrophys*, 1989, 218: 19–23
- 135 Telloni D, Carbone V, Lepreti F, et al. Stochasticity and persistence of solar coronal mass ejections. *Astrophys J*, 2014, 781: L1
- 136 Wyss M, Aceves R L, Park S K, et al. Cannot earthquakes be predicted? *Science*, 1997, 278: 487–490
- 137 Kanamori H. 72-Earthquake prediction: An overview. *Int Handbook Earthq Eng Seismol*, 2003, 81: 1205–1216
- 138 Morales L F, Santos N A. Predicting extreme solar flare events using Lu and Hamilton avalanche model. *Sol Phys*, 2020, 295: 115–126

- 139 Gallagher P T, Moon Y J, Wang H. Active-region monitoring and flare forecasting. I. Data processing and first results. *Sol Phys*, 2002, 209: 171–183
- 140 Georgoulis M K, Rust D M. Quantitative forecasting of major solar flares. *Astrophys J*, 2007, 661: L109–L112
- 141 Lee K, Moon Y J, Lee J Y, et al. Solar flare occurrence rate and probability in terms of the sunspot classification supplemented with sunspot area and its changes. *Sol Phys*, 2012, 281: 639–650
- 142 Chen A Q, Wang J X. On the possibility of predicting flare index and CME velocity using vector magnetograms. *Sci China-Phys Mech Astron*, 2020, 63: 269512
- 143 Kusano K, Iju T, Bamba Y, et al. A physics-based method that can predict imminent large solar flares. *Science*, 2020, 369: 587–591
- 144 Huang X, Wang H, Xu L, et al. Deep learning based solar flare forecasting model. I. Results for line-of-sight magnetograms. *Astrophys J*, 2018, 856: 7
- 145 Li X, Zheng Y, Wang X, et al. Predicting solar flares using a novel deep convolutional neural network. *Astrophys J*, 2020, 891: 10–20

Observations and simulations of self-organized criticality phenomena in astrophysics

LI Chuan^{*}, WANG WenBo & CHEN PengFei

Key Laboratory for Modern Astronomy and Astrophysics, Ministry of Education, School of Astronomy and Space Science, Nanjing University, Nanjing 210023, China

Self-organized criticality (SOC) is a critical state of a nonlinear dynamical system or a complex system that is continuously driven toward a critical value of instability threshold independent of external parameters, resulting in scale-free, fractal-diffusive, and intermittent avalanches or energy releases with power-law distributions. Since its introduction in 1987, the concept of SOC has been widely used to explain the power-law frequency distributions of nonlinear dynamical systems. We review the observations and simulations of SOC phenomena in astrophysics, identify the roles of SOC and MHD turbulence in producing astrophysical instabilities, and discuss potential applications of SOC in space weather as well as some critical challenges that must be addressed in the future.

self-organized criticality, plasma turbulence, solar activity

PACS: 05.65.+b, 52.35.Ra, 96.60.Q-

doi: [10.1360/SSPMA-2021-0245](https://doi.org/10.1360/SSPMA-2021-0245)