中国科学: 数学 2025 年 第 55 卷 第 3 期: 753 ～ 778
SCIENTIA SINICA Mathematica
《中国科学》杂志社
SCIENCE CHINA PRESS
CrossMark
click for updates
综 述

航空发动机中的流固耦合动力学模型: 建模与分析

献给肖玲教授 85 寿辰

王术[1*], 沈林[2], 江松[3]

1. 北京工业大学数学统计学与力学学院, 北京 100124;
2. 黄淮学院数学与统计学院, 驻马店 463000;
3. 北京应用物理与计算数学研究所, 北京 100088
E-mail: wangshu@bjut.edu.cn, shenlin@huanghuai.edu.cn, jiang@iapcm.ac.cn

收稿日期: 2024-01-31; 接受日期: 2024-06-05; 网络出版日期: 2024-09-24; * 通信作者
国家自然科学基金 (批准号: 11831003 和 12171111)、北京市自然科学基金 (批准号: KZ202110005011)、河南省自然科学基金 (批准号: 242300421392)、河南省青年骨干教师 (批准号: 2021GGJS158) 和河南省高等学校重点科研 (批准号: 23B110012) 资助项目

摘要 本文综述航空发动机中的流固耦合动力学模型及其建模方法和理论分析结果. 首先, 基于振动力学中的旋转薄壁梁板壳叶片振动的非线性动力学模型、发动机叶片的实际几何结构以及在高压绕流场中的高速旋转等实际应用特征, 基于 Hamilton 原理与热力学第二定律, 推导并重构一些航空发动机旋转叶片振动动力学非线性流固耦合偏微分方程模型. 然后, 给出具有移动界面的一类非线性不可压流固耦合模型的一些理论分析结果.

关键词 航空发动机 旋转叶片振动 非线性流固耦合动力学模型 移动界面

MSC (2020) 主题分类 35Q30, 74F10, 76D03, 76D05, 35M10

1 引言

航空发动机被誉为 "工业皇冠上的明珠", 是飞机的核心部件和动力装置, 也是航空技术发展的重要推手和国家综合实力体现的重要标志之一. 现今, 航空飞行器主要以装配涡轮发动机为主, 涡轮发动机又分为涡轮喷气发动机、涡轮风扇发动机、涡轮螺旋桨发动机和涡轮轴发动机 (参见文献 [67]). 在这 4 种发动机中, 涡轮喷气发动机是现今应用最为广泛的航空发动机. 在涡轮喷气发动机中, 空气经过进气管整流后进入压气机, 压气机经过高速旋转的叶片对空气做功压缩以提高空气的压力, 高压气体在燃烧室与燃油混合燃烧, 形成高温高压的燃气, 燃气通过涡轮旋转带动压气机并高速喷出产生推力. 在涡轮喷气发动机中, 叶片根据功能不同可分为风扇叶片、压气机叶片和涡轮叶片, 其中风扇叶片、压气机叶片作为前端叶片由于不受到高温影响属于冷端部件, 一般由钛合金和高温合金等材料制成, 而涡轮叶片处于燃烧室后端属于热端部件, 一般由高温合金、钛铝合金或定向结晶和单晶材料制

英文引用格式: Wang S, Shen L, Jiang S. Modeling and mathematical theory on fluid structure interaction models in aircraft engines (in Chinese). Sci Sin Math, 2025, 55: 753–778, doi: 10.1360/SSM-2024-0028

成. 风扇叶片将进入发动机的空气进行初步压缩, 压缩后的气体分为两路, 一路进入内涵道进行继续压缩, 另一路进入外涵道直接高速排出, 产生部分推力. 压气机叶片可分为转子叶片 (压气叶片) 和静子叶片 (整流叶片), 涡轮叶片可以分为涡轮工作叶片和涡轮导向叶片.

当前, 国家重大需求和经济社会建设中的应用基础研究已经越来越受到重视, 特别是国家安全中的许多应用基础问题已经成为国家重大战略研究计划中的关键科学问题. 国家的大飞机计划和空天发展计划作为国家重大战略研究计划之一, 其核心技术是航空发动机技术. 目前我国还缺少航空发动机这一领域的核心创新技术, 特别缺少自主知识产权的核心技术. 然而, 毫无疑问, 航空发动机技术在国防工业、航空航天、空间发展以及民用工业方面应用广泛. 例如, 我国的跨空域、跨速域的跨域变构智能飞行器即 "一小时左右全球抵达高速民航和航班化天地往返运输" 国家重大研发计划 1) 和中国的商用大飞机 C919-929 计划等航空航天领域内的重大革命性进展大多与发动机技术的进步与突破密切相关. 但由于发动机工程是一个系统的复杂工程, 理论技术研究相当困难. 目前, 研究新型大推重比、高转速、高负荷、高效率和轻量化的航空发动机是现代航空工业中大飞机计划的关键技术. 同时, 在航空发动机中, 作为重要核心部件的高速旋转叶片如风扇叶片、压气机叶片和涡轮叶片等在航空工程和机械工程中应用广泛, 而且发动机正是依靠着众多叶片完成气体的压缩和膨胀进而产生强大的推力. 根据调查结论 [67], 航空发动机中振动故障占发动机总故障的 60% 以上, 而叶片的振动故障占振动故障的 70% 以上, 因此, 叶片的抗疲劳性是材料科学和航空发动机科学关心的重要问题. 同时, 航空发动机压气机叶片工作环境复杂恶劣, 其经常会受到复杂气流的气动力、非线性冲击力和压力甚至高温梯度的影响, 如空客 380 装配的 TrentXWB 发动机中的涡轮工作温度可以高达 1700°C, 进而导致叶片的弹性变形. 由于高速旋转叶片严重的几何非线性气流分离特性, 被设计为带预扭转角和预安装角的叶型叶片几何结构极其复杂. 当航空航天飞行器高变速运行时会产生剧烈变化的风载荷, 在风载荷的作用下, 航空发动机中的叶片会随之发生变形和剧烈的振动, 同时叶片的形变和振动也会影响风载荷的分布和大小. 此外, 高速旋转叶片所受载荷表现为不稳定超音速气流和变转速情形下的高速旋转离心率, 产生亚谐和超谐共振、振幅跳跃甚至混沌运动等复杂的非线性动力学行为 (参见文献 [133]). 而大振幅的非线性共振和无规律的混沌运动极易引起叶片的疲劳和断裂等严重的失效行为, 导致飞行事故甚至机毁人亡重大事故. 因此, 建立合理的叶片振动形变动力学模型并能准确地预测其振动特性和其他复杂的非线性动力学现象, 准确地预测叶片的疲劳寿命, 精确地刻画众多数量的叶片所承受的气动力、热负荷、抗弯曲形变以及共振和颤振等载荷, 对现代高速航空飞行器的安全可靠性之重要性是不言而喻的. 正因如此, 此领域成为力学、热力学、航空学、材料、数学和计算流体力学等多学科研究的热点问题之一, 特别地, 此研究中出现了很多挑战性的理论和应用数学基础研究问题—流固耦合偏微分方程问题.

流固耦合问题主要研究可移动或可变形固体结构与内部或周围流体或气体的相互作用, 是最普遍和最具挑战性的多物理场耦合问题之一, 其应用广泛, 除了用于航空航天, 还应用于地质采油工程、海岸海洋工程、血液动力学以及人工心脏等 (参见文献 [74, 134, 138]). 它涉及流体模型和固体模型通过边界进行非线性动力学耦合, 特别是复杂的发动机叶片由于它们的复杂几何结构导致的非线性动力学混沌行为, 叶片周边的绕流如何与叶片表面进行非线性耦合或者说固体与流体的界面运动的条件如何刻画在力学上特别是对于一类新型的弹性叶片材料来说都是未知的. 这是推导模型时必须要解决的困难问题.

航空发动机技术中最重要的技术之一自然当属发动机叶片振动问题. 航空发动机叶片振动动力学

1) 2023–2024 年度国家自然科学基金项目指南.

问题是典型的非线性偏微分方程流固耦合模型问题. 目前该问题的研究已经成为国家的重大战略计划, 也是非线性发展偏微分方程领域理论研究与计算研究的核心问题之一.

航空发动机叶片振动动力学问题是典型的弹性材料在高压流体中的高速运转流固耦合模型, 是复杂的非线性偏微分方程模型问题[74], 它们通常是复杂的可压或不可压流体动力学方程[75,126,128,131,136]和弹性材料的振动力学方程[21,104,109]的耦合方程组, 其中涉及高温高压环境下高速运转与叶片的几何结构以及叶型扭转角安装问题. 其中的数学模型主要包括两类, 一类是带自由界面的流固耦合模型的自由界面运动问题, 另一类是连续的流固耦合偏微分方程相变模型. 由于叶片的复杂非线性混沌动力学行为和气流分离现象, 上述两类模型的构建非常复杂. 目前, 很多研究都进行了简化 (大多简化为一维问题, 特别高速运转下, 模型未考虑温度对叶片的影响等). 对于第一类流固耦合模型或者其简约模型, 已经有了一些进展, 目前主要集中在振动力学方程的理论研究 (参见文献 [72,93,102,122,123,125]), 以及力学领域中将叶片简化为 Euler-Bernoulli 旋转薄壁梁, 并基于活塞原理 (将气流对叶片的作用力通过活塞原理计算给出) 和 Hamilton 原理建立振动动力学模型进行数值计算与数值模拟, 进而分析相应的混沌分岔动力学现象 (参见文献 [7,9,30,35,40,62,83,86,120,129]). 对于三维板和壳固体在高温高压流体中的高速运转运动模型, 还没有任何理论研究结果, 甚至对于一些先进的新型材料, 不知道其物理背景及其相应数学模型的提法, 如界面运动的合理条件如何提, 导致模型构建上还没有任何结果. 对于相关的流体动力学模型的自由边值问题, 参见文献 [26,59,87,95,139] 及其引用的国内外相关参考文献.

本文针对力学领域高速旋转叶片在复杂环境下的运动问题, 运用偏微分方程理论进行理论、建模和应用分析, 即针对力学领域中高速旋转叶片在复杂的高压甚至高温环境下的非线性混沌振动动力学行为进行数学建模与理论分析, 为将来数值模型、高效仿真与可视化技术提供理论支撑. 本文在经典的流固耦合偏微分方程模型的研究基础上, 提出并总述一些合理的流固耦合偏微分方程模型进行模型重构, 开展理论分析并探索航空发动机中的应用问题. 特别地, 基于力学中叶片振动的梁模型使用热力学基本定律给出梁板壳与流体耦合的一些基本模型, 提出高速运转的三维几何体弹性叶片在高温高压流体中的运动模型, 探讨流体和固体如何在界面耦合的问题, 并从数学理论上提出界面运动的条件.

2　航空发动机旋转叶片振动物理问题与数学建模思想理论

2.1　物理问题与数学建模思想

针对高速旋转叶片在复杂环境下的动力学问题, 一个基本的物理问题是: 复杂环境下的弹性形变体叶片在高压、高温气体中高速旋转, 如何研究叶片的运动规律以及如何分析叶片的非线性振动动力学行为? 数学上, 我们归纳为流固耦合偏微分方程问题—研究高速运转的三维几何弹性体在非等熵流体中的运动规律. 这是一个流 (气) 固耦合问题或气热固耦合问题.

正像引言中介绍过的, 航空发动机叶片振动过程是复杂的, 叶片是飞行运动中的叶片且其周边环境复杂, 同时自身在高速旋转且发生弹性形变, 因此航空发动机叶片建模过程也是非常复杂的. 但本质上, 叶片数学建模的获得主要基于热力学第二定律、动量守恒原理和 Hamilton 原理. 下面介绍这种建模的基本思想.

2.1.1　基于质量守恒的一般弹性体模型

弹性体泛指在除去外力后能恢复原状的物体. 当航空航天飞行器变速飞行时, 发动机叶片会发生

相应的形变, 当飞行器静止后, 叶片慢慢恢复原状, 因此, 工程上大量利用弹性体模拟飞行器叶片形变的问题.

弹性力学的 5 个基本假设如下: 物质连续性假设、均匀性假设、力学特性各向同性假设、线弹性假设和小变形假设. 基于这 5 个假设, 通过动量守恒原理给出一般弹性体模型. 建立适当的直角坐标系 x, y 和 z, 记 z 轴与弹性体的交点为坐标原点 O. 假设 $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \sigma_{xy}, \sigma_{yz}$ 和 σ_{zx} 为弹性体内任一点的应力, η 表示弹性体内任一点的位移, $f=(f_x, f_y, f_z)$ 表示弹性体在任一点受到的外力, 由坐标轴 x, y 和 z 三方向受力平衡原理可构建如下三方向的平衡方程:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x}+\dfrac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y}+\dfrac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z}+f_x=0, \\ \dfrac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x}+\dfrac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y}+\dfrac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z}+f_y=0, \\ \dfrac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x}+\dfrac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y}+\dfrac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z}+f_z=0. \end{cases} \tag{2.1}$$

不妨引入应力应变张量

$$\sigma=\begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{zx} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{yz} & \sigma_{zz} \end{pmatrix},$$

于是弹性体平衡方程 (2.1) 可改写为

$$\nabla \cdot \sigma+f=0.$$

更进一步地, 可得发展型弹性体方程

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2}=\nabla \cdot \sigma+f. \tag{2.2}$$

注意应力本构方程依赖于材料的特性, 一般基于材料学的特性给出, 甚至为了做出新材料需要反演其应力应变本构矩阵. 对于经典的 St. Venant-Kirchhoff 材料, 其本构关系由一阶 Piola-Kirchhoff 应力张量

$$\sigma=2\mu F\varepsilon+\lambda(\mathrm{Tr}\varepsilon)F$$

给出, 其中 $F=I+\nabla\eta$ 是变形梯度张量, $\varepsilon=\frac{F^{\mathrm{T}}F-I}{2}$ 是 Green-Lagrange 型张力张量, μ 和 λ 是 Lamé 系数.

模型 (2.2) 能够描述发动机静子叶片的变形, 但对于旋转转子叶片还需对其修正以体现旋转因素 (参见文献 [130]). 为了简单起见, 下面假设应力应变张量 $\sigma=F\varepsilon$, 弹性体沿 z 轴以旋转角速度 $R(\theta(t))$ 旋转, 此时旋转矩阵为

$$R(\theta)=\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

弹性体上任一点 x 的位移 η 包含形变位移 η_s 和旋转位移, 两者之间的关系如下:

$$\eta=R(x+\eta_s)-x=(R-I)x+R\eta_s,$$

其中

$$\eta_s = R^{\mathrm{T}}\eta - (I - R^{\mathrm{T}})x. \tag{2.3}$$

此时, 变形梯度矩阵 $F = R(I + \nabla\eta_s)$. 由于变形梯度矩阵 $\nabla\eta_s$ 非常小, 可取线性部分近似表示应力张量

$$\begin{aligned}\sigma &= \frac{1}{2}F(F^{\mathrm{T}}F - I)\\ &= \frac{1}{2}R(I + \nabla\eta_s)((I + \nabla\eta_s)^{\mathrm{T}}R^{\mathrm{T}}R(I + \nabla\eta_s) - I)\\ &= \frac{1}{2}R(I + \nabla\eta_s)((I + \nabla\eta_s)^{\mathrm{T}}(I + \nabla\eta_s) - I)\\ &\approx \frac{1}{2}R(\nabla\eta_s + (\nabla\eta_s)^{\mathrm{T}}).\end{aligned} \tag{2.4}$$

记 $\epsilon(\eta) = \frac{1}{2}(\nabla\eta + \nabla(\eta)^{\mathrm{T}})$, 并将 (2.3) 代入方程 (2.4), 可得

$$\sigma = R\epsilon(R^{\mathrm{T}}\eta) + R\epsilon((I - R^{\mathrm{T}})x). \tag{2.5}$$

将 (2.5) 代入方程 (2.2), 可得旋转弹性体方程为

$$\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2} = \nabla\cdot(R\epsilon(R^{\mathrm{T}}\eta)) + \nabla\cdot(R\epsilon((I - R^{\mathrm{T}})x)) + f. \tag{2.6}$$

2.1.2 基于 Hamilton 原理的非线性 Euler-Bernoulli 方程模型

基于弹性体方程可以建立发动机叶片的振动动力学模型. 目前力学研究者和工程人员多采用薄壁梁、薄板、薄壳来简化模拟叶片. 对薄壁梁振动的研究可以归纳为以下 3 种情形 (参见文献 [8]):

(1) 在某些先验横截面变形的假设条件下, 得到一维叶片振动控制方程;

(2) 利用叶片一维连续体理论, 获得叶片的横截面性质, 进而得到叶片振动控制方程 [65];

(3) 从三维弹性理论出发, 得到严格简化的薄壁梁控制方程.

虽然第一种研究方法有一定的缺陷 (仅考虑叶片横截面上的振动), 但它仍然是现阶段最广泛的研究手段 (参见文献 [137]). 为了便于理解, 在此仅以横截面上一个方向上振动为例, 推导薄壁梁方程, 以此描述发动机中静子叶片的振动.

假设两端固定的薄壁梁长度为 l, h 为梁的壁厚, 梁截面长和宽分别为 a_1 和 b_1, 预扭角和预安装角为 $\theta(x)$, u, v 和 w 分别表示横截面上 z, y 和 x 方向上的位移. 并假设 (1) 梁是各向同性的, 它的横截面是矩形且所有几何平面尺寸保持不变; (2) h 远远小于曲率半径 r; (3) 忽略截面的横向剪切效应; (4) 在应变 - 位移关系中, 忽略位移 v 和 w 的影响.

根据 Hamilton 原理可推导出静子叶片梁方程

$$\int_{t_1}^{t_2}(\delta K - \delta U + \delta W)dt = 0, \quad \delta u = 0 \quad 在\ t = t_1, t_2, \tag{2.7}$$

其中 K 和 U 分别表示动能和应变能, W 为外力做的功, δ 为变分算子.

动能

$$\delta K = \int_\tau \rho u_t\delta u_t d\tau = -\rho A\int_0^l u_{tt}\delta u dx, \tag{2.8}$$

其中 ρ 为梁的密度, A 为截面的面积, $d\tau$ 为面积元.

外力做功 由一阶活塞原理 [3] 可推导出压力满足

$$P = C_\infty \rho_\infty \left(\frac{\partial u^p}{\partial t} + U_{z^p} \frac{\partial u^p}{\partial x} \right), \tag{2.9}$$

其中 $U_{z_p} = U_\infty \sin\theta$, U_∞ 表示自由气流的速度, ρ_∞ 和 C_∞ 分别表示密度和声速, $u^p = u\cos\theta$. 进而得到单位轴向外力

$$p(u) = -a_1 P\cos\theta = -C_\infty \rho_\infty a_1 \cos^2\theta (u_t + U_\infty \sin\theta u_x). \tag{2.10}$$

最终, 受扰气体压力的功为

$$\delta W = \int_0^l p(u)\delta u dx. \tag{2.11}$$

应变能 利用假设 (4), 位移场 [92] 描述为

$$D_x = -u_x \left(y(s) + n\frac{dz}{ds} \right), \quad D_y = u(x,t), \quad D_z = v(x,t), \tag{2.12}$$

其中 (x,n,s) 为梁截面的曲线坐标系.

基于假设 (4), 位移 - 应变关系可表示

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial D_y}{\partial x} \right)^2 = \frac{1}{2}u_x^2 - u_{xx}y(s) + nu_{xx}\frac{dz}{ds}. \tag{2.13}$$

借助热弹性本构律, 轴向应力为 $\sigma_{xx} = E\varepsilon_{xx}$, 其中 E 为杨氏模量.

最终, 推导出

$$\begin{aligned}
\delta U &= E\int_0^l \oint \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \varepsilon_{xx}\delta\varepsilon_{xx} dnds\mathrm{d}x \\
&= \rho A\left\{ \int_0^l (-b(u_x^3)_x + (au_{xx})_{xx})dx \right\}\delta u + \rho\bar{A}au_{xx}\delta u_x|_0^l + \rho\bar{A}\{bu_x^3 - (au_{xx})_x\delta u\}|_0^l,
\end{aligned} \tag{2.14}$$

其中

$$a = a(x) = \frac{Eh}{\bar{A}\rho}\oint \left(\frac{h^2}{12}\left(\frac{dz}{ds} \right)^2 + y^2 \right) ds, \quad b = \frac{E}{2\rho}.$$

将 (2.8)、(2.11) 和 (2.14) 代入 (2.7), 可得如下固支边界条件下的梁方程:

$$u_{tt} + (a(x)u_{xx})_{xx} - b(u_x^3)_x = p(u), \quad (x,t) \in (0,l)\times(0,T), \tag{2.15}$$

$$u(0,t) = u_x(0,t) = u(l,t) = u_x(l,t) = 0, \quad t\in(0,T), \tag{2.16}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad u_t(x,0) = u_1(x), \quad x\in(0,l). \tag{2.17}$$

方程 (2.15) 为非线性 Euler-Bernoulli 方程, 相关研究参见文献 [60,61].

力学上, Librescu 团队研究了零扭转角情形下薄壁梁的振动问题, 并推导出相应的控制方程 (参见文献 [4,93,102,108,118,119]). 例如, 文献 [108,118] 在假设截面在其自身平面内为刚性的情形下, 改进

和完善了截面为封闭或开放结构的薄壁梁理论, 并在考虑组成薄壁梁材料的各向异性以及横向剪切效应、一次和二次翘曲等情形下, 推导出了相应的控制方程. 文献 [119] 引入了旋转坐标系, 考虑了离心力和 Coriolis 力对叶片振动的影响. Kaya 和 Ozdemir Ozgumus [76] 在假设叶片恒定转速和零扭转角的条件下, 对闭合截面的复合 Timoshenko 梁的自由振动进行了分析, 推导了其控制方程, 并通过数值方法研究了不同长细比对固有频率的影响. Sina 等 [117] 利用 Librescu 的研究方法推导了旋转锥形薄壁复合 Timoshenko 横梁的控制方程, 通过数值方法讨论了锥度和长细比对固有频率和振型的影响. Li 等 [91] 在 Euler-Bernoulli 梁理论、各向同性材料和考虑了翘曲刚度影响的前提下, 研究了开放、单对称截面薄壁梁的动力行为, 以及轴向力和翘曲刚度对耦合弯曲扭转及固有频率的影响. Arvin 和 Bakhtiari-Nejad [2] 对非线性旋转薄壁梁进行了研究, 采用多时间尺度法、非线性理论以及 Von-Karmans 应变位移原理, 建立了 Timoshenko 横梁的旋转模型. Ghorashi [51] 利用文献 [24] 中所阐述的变分渐近方法, 建立了旋转薄壁 Euler-Bernoulli 梁的非线性模型. 对于有一定预扭转角和安装角的叶片振动问题, 文献 [85] 推导了旋转梁的自由振动控制方程, 研究了叶片预扭转角和安装角对系统前两个固有频率的影响; 文献 [50] 利用 Hamilton 原理推导出了一种旋转 Timoshenko 梁的运动方程, 其控制方程是耦合的非线性偏微分方程组. 目前国内研究具有预扭转角和安装角的非线性旋转薄壁梁的研究成果可参见文献 [133, 140–142]. 在模型分析的基础上, 很多科研工作者也采用有限元方法对薄壁梁进行了研究. 例如, 文献 [1] 利用有限元方法研究了开口截面和闭口截面的薄壁梁, 拓展了薄壁梁的广义 Vlasov 理论; Stoykov 和 Ribeiro [121] 采用 P 型有限元方法研究了旋转薄壁梁的几何非线性三维模型; 其他利用有限元方法研究旋转薄壁梁的研究成果可参见文献 [71, 97, 104, 105, 135].

2.1.3 基于质量守恒、动量守恒和热力学第二定律的流固耦合模型

一般而言, 航空发动机内叶片周边的绕流环境是非常复杂的, 叶片所处的流场可以用基本的流体力学方程组或燃烧模型来模拟. 这里假设叶片周边是通常的流体或燃烧气体. 这一假设至少对民用飞机发动机而言是合理的. 基于经典流体力学理论和经典流体模型的推导过程可知, 不可压 Navier-Stokes/Euler/Boussinesq/MHD (magnetohydrodynamics) 方程、等熵或非等熵可压 Navier-Stokes/Euler /MHD 方程等基本的流体模型可以被用来模拟旋转叶片尤其是低速旋转叶片的振动问题, 例如, 不可压 Boussinesq-MHD 方程 [127]

$$\begin{cases} u_t + u \cdot \nabla u - \Delta u + \nabla p = B \cdot \nabla B + \rho e, \\ \rho_t + \nabla \cdot u \cdot \nabla \rho = \nu \Delta \rho, \\ B_t + u \cdot \nabla B = B \cdot \nabla u, \\ \nabla \cdot B = 0, \end{cases} \tag{2.18}$$

其中 u, p 和 ρ 分布表示流体的速度、压力和密度, B 表示磁场强度. 模型 (2.18) 刻画磁性材料叶片在非均匀流场及地球磁场影响下的振动问题. 由于这些模型是经典的, 我们不再一一列出. 我们也指出, 燃烧气体目前研究相对较少, 需要考虑多相流多尺度燃烧问题和湍流模型, 几乎没有相关的燃烧数学模型来刻画叶片在高压燃气中的振动问题. 这是我们现在正在考虑的建模问题. 当然, 这里也涉及其他不与固体耦合的燃烧数学模型, 如出气口气流的两相流模型、点火燃油的雾化蒸发与掺混数学模型和航空燃煤的化学反应动力学模型等.

作为应用之一, 我们推导一个在非等熵流体中旋转的薄壁板的振动动力学模型. 由于叶片界面上绕流的复杂性, 为了简单, 假设作用在叶片上的流体用非等熵的带热扩散的可压 Euler 方程 (使用

Euler 坐标系) 来刻画, 叶片使用带厚度的薄壁板方程 (使用 Lagrange 坐标系) 来刻画, 基于总能量 $W(t)=W^f(t)+W^s(t)$ 来推导这一流固耦合模型, 这里 $W^f(t)$ 和 $W^s(t)$ 分别是流体的总能量和弹性叶片的总能量 (动能、势能和热能):

$$W^f(t)=\int_{\Omega^f(t)}\left[\frac{1}{2}\rho^f|u^f|^2+R(1-\rho^f+\rho^f\ln\rho^f)+c_v\rho^f(\theta^f-\ln\theta^f-1)\right](t,\hat{x})d\hat{x}$$

和

$$\begin{aligned}W^s(t)=&\int_{\Omega_0^s}\frac{1}{2}[|\eta_t^s|^2+\alpha R_1\nabla_x\eta_t^s:\nabla_x\eta_t^s\\&+|\mathrm{div}(R_2\nabla_x(\eta^s-\eta_0^s))|^2+\omega R_3\nabla_x\eta^s:\nabla_x\eta^s](t,x)dx\\&+\int_{\Omega_0^s}(\theta^s-\ln\theta^s-1)(t,x)dx.\end{aligned}$$

使用 Hamilton 原理和热力学第二定律可推导出下面的非线性流固耦合模型:

$$\begin{cases}\eta_{tt}^s-\alpha\mathrm{div}_x\cdot(R_1\nabla_x\eta_{tt}^s)+\mathrm{div}_x\cdot(R_2\nabla_x(\mathrm{div}_x\cdot(R_2\nabla_x(\eta^s-\eta_0^s))))\\\quad-\omega\nabla_x\cdot(R_3\nabla_x\eta^s)+\beta\eta_t^s=F_1^s, & (t,x)\in(0,T)\times\Omega_0^s,\\\theta_t^f-\kappa_1\Delta\theta^f=0, & (t,\hat{x})\in Q_T,\\\rho_t^f+u^f\cdot\nabla_{\hat{x}}\rho^f+\rho^f\mathrm{div}_{\hat{x}}(u^f)=0, & (t,\hat{x})\in Q_T,\\\rho^f(u_t^f+u^f\cdot\nabla_{\hat{x}}u^f)+\nabla_{\hat{x}}p=0, & (t,\hat{x})\in Q_T,\\\partial_t\left(\rho^f\left(c_v\theta^f+\frac{1}{2}|u^f|^2\right)\right)+u^f\cdot\nabla_{\hat{x}}\left(\rho^f\left(c_v\theta^f+\frac{1}{2}|u^f|^2\right)\right)\\\quad+\left(\rho^f\left(c_v\theta^f+\frac{1}{2}|u^f|^2\right)\right)\mathrm{div}_{\hat{x}}(u^f)\\\quad+\mathrm{div}_{\hat{x}}(pu^f-\kappa_2\nabla_{\hat{x}}\theta^f)=0, & (t,\hat{x})\in Q_T,\\\eta_t^f=u^f\circ\eta^f, & (t,x)\in(0,T)\times\Omega_0^f.\end{cases}\tag{2.19}$$

相应的界面运动条件、边界条件和初始条件为

$$\begin{cases}u^f\circ\eta^f\ \mathrm{cof}\ \nabla_x\eta^f n^{\mathrm{T}}=\eta_t^s\cdot n,\quad \eta_t^s\times n=0, & (t,x)\in(0,T)\times\Gamma_0,\\\dfrac{\partial\eta_t^s}{\partial n}=0\ \text{或}\ \mathrm{div}_x\cdot(R_2\nabla_x(\eta^s-\eta_0^s))=\omega H_1(t,x), & (t,x)\in(0,T)\times\Gamma_0,\\(R-p)\circ\eta^f=n(R_2\nabla_x(\mathrm{div}_x\cdot(R_2\nabla_x(\eta^s-\eta_0^s)))\\\qquad\qquad-\alpha R_1\nabla_x\eta_{tt}^s-\omega R_3\nabla_x\eta^s)n^{\mathrm{T}}, & (t,x)\in(0,T)\times\Gamma_0,\\\theta^f\circ\eta^f=\theta^s,\quad \kappa_2\nabla_{\hat{x}}\theta^f\circ\eta^f\ \mathrm{cof}\ \nabla_x\eta^f n^{\mathrm{T}}=\kappa_1\dfrac{\partial\theta^s}{\partial n}, & (t,x)\in(0,T)\times\Gamma_0,\\\eta_t^s=0,\quad \dfrac{\partial\eta_t^s}{\partial n_1}=\omega H_2(t,x), & (t,x)\in(0,T)\times\Gamma_1,\\u^f=G(t,x), & (t,x)\in(0,T)\times\Gamma_2,\\\eta^f=\eta_0^f(x),\quad u^f=u_0^f(x),\quad \theta^f=\theta_0^f(x), & (t,x)\in\{t=0\}\times\Omega_0^f,\\\eta^s=\eta_0^s(x),\quad \eta_t^s=u_0^s(x),\quad \theta^s=\theta_0(x), & (t,x)\in\{t=0\}\times\overline{\Omega}_0^s,\end{cases}\tag{2.20}$$

这里 $Q_T=\bigcup_{0\leqslant t\leqslant T}\{t\}\times\Omega^f(t)$, η^s, θ^f, u^f, ρ^f 和 p 分别表示薄壁板的振动位移、流体的熵、速度、密度和压力, R_1, R_2 和 R_3 是对称旋转矩阵, $p=R\rho^f\theta^f$, $c_v=\frac{R}{\gamma-1}$, ω 是旋转强度. H_0, H_1, H_2 和 G 是定

义在边界上的给定函数. $\operatorname{cof} \nabla_x \eta^f = JA$ 是矩阵 $A = (\nabla_x \eta^f)^{-1}$ 的伴随矩阵, $J = \det (\nabla_x \eta^f)$. 注意模型 (2.20) 满足基本的能量耗散率

$$\frac{d}{dt}W(t) + D(t) = \int_{\Omega_0^s} F^s \eta_t^s dx + \int_{\Gamma_1} \omega \mathrm{div}(R_2 \nabla_x(\eta^s - \eta_0^s))H_2(t,x)d\Gamma + \int_{\Gamma_0} \omega H_1(t,x)\frac{\partial \eta_t^s}{\partial n}d\Gamma,$$

这里

$$D(t) = \int_{\Omega_0^s}\left[\kappa_1 \frac{|\nabla_x \theta^s|^2}{|\theta^s|^2} + \beta|\eta_t^s|^2\right]dx + \int_{\Omega^f(t)} \kappa_2 \left[\frac{|\nabla_{\hat{x}} \theta^f|^2}{|\theta^f|^2}\right](t,\hat{x})d\hat{x}.$$

应该指出, 在 (2.19) 和 (2.20) 中自由界面运动条件的意义表示为: 界面是悬臂的、振动的方向是法向的而且在法方向上界面两侧运动的速度及应力大小相同、界面两侧温度自身和热流量是相同的, 有待力学的实验验证. 更符合航空发动机叶片振动规律实际的高速旋转的壳型叶片界面自由运动的条件或界面上的能量如何定义有待实验上和理论方面进一步深入研究.

2.2 航空发动机旋转叶片的薄壁悬臂梁模型及梁板壳方程

基于上面的 Hamilton 原理, 我们引入力学领域研究航空发动机旋转叶片的一个基本的非线性振动动力学薄壁悬臂梁模型 (参见文献 [133, 140–142]). 该模型主要用来研究旋转叶片的非线性动力学混沌、极限环振动、共振和分岔现象.

假设长度为 l 的单体叶片固定在半径为 R_0 的刚体上, 叶片的旋转角速度为 $\omega(t)$, 叶片的预安装角与预扭转角之和为 $\theta(x)$, 叶片在 t 时刻沿 x 轴横截面的振动位移分别为 $u(x,t)$ 和 $v(x,t)$, 其中 u 为 y 方向的振动位移, v 为 z 方向的振动位移. 此外, 假设叶片上的压力满足一阶活塞原理. 文献 [133, 140–142] 使用 Hamilton 原理建立了如下旋转叶片固支梁和薄壁悬臂梁方程:

$$\begin{cases} u_{tt} + (a_1 u_{xx})_{xx} - (a_2 v_{xx})_{xx} - \dfrac{1}{2}((u_x^2 + v_x^2)u_x)_x - \omega^2(Ru_x)_x - p_1 = 0, \\ v_{tt} - (a_2 u_{xx})_{xx} + (a_3 v_{xx})_{xx} - \dfrac{1}{2}((u_x^2 + v_x^2)v_x)_x - \omega^2(Rv_x)_x - p_2 = 0, \end{cases} \tag{2.21}$$

其中 $p_1 = f_1(u_x, v_x, u_t, v_t, u, v, \theta)$ 和 $p_2 = f_2(u_x, v_x, u_t, v_t, u, v, \theta)$ 分别为 y 和 z 方向上的压力, $R(x) = R_0(l-x) + \frac{1}{2}(l^2 - x^2)$ 表示旋转强度, 系数 $a_i(x)$, $i = 1,2,3$ 通过

$$\begin{aligned} a_1(x) &= \frac{Eh}{\bar{A}\rho}\oint\left(\frac{h^2}{12}\left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + z^2\right)ds, \\ a_2(x) &= \frac{Eh}{\bar{A}\rho}\oint\left(\frac{h^2}{12}\frac{dy}{ds}\frac{dz}{ds} - yz\right)ds, \\ a_3(x) &= \frac{Eh}{\bar{A}\rho}\oint\left(\frac{h^2}{12}\left(\frac{dz}{ds}\right)^2 + y^2\right)ds \end{aligned} \tag{2.22}$$

计算给出, 满足正定型条件

$$a_1 a_3 - a_2^2 > 0, \quad 0 < x < l,$$

这里 E 为杨氏模量, h 为叶片壁厚, $\bar{A}$ 为横截面面积, ρ 为叶片密度.

同时, 梁方程 (2.21) 对应以下两种边界条件:

(1) 固支边界

$$u, u_x = 0, \quad v, v_x = 0, \quad x = 0, l;$$

(2) 固支 - 自由 (悬臂) 边界

$$
\begin{aligned}
&u, u_x = 0, \quad v, v_x = 0, \quad x = 0, \\
&a_3 u_{xx} - a_2 v_{xx} = 0, \quad x = l, \\
&a_1 v_{xx} - a_2 u_{xx} = 0, \quad x = l, \\
&\frac{1}{2}(u_x^2 + v_x^2) u_x - (a_1 u_{xx} - a_2 v_{xx})_x - b_1 u - e_1 v = 0, \quad x = l, \\
&\frac{1}{2}(u_x^2 + v_x^2) v_x - (a_3 v_{xx} - a_2 u_{xx})_x - b_2 u - e_2 v = 0, \quad x = l,
\end{aligned}
$$

其中 b_1 和 e_1 分别为 p_1 中 u_x 和 v_x 的系数, b_2 和 e_2 分别为 p_2 中 u_x 和 v_x 的系数.

注意, 根据叶片的特性, 梁方程可以细分为不同的梁方程. 例如, 当叶片长细比大于 100 时, 模型

$$
\eta_{tt} + \eta_{xxxx} = f
$$

称为 Euler-Bernoulli 梁方程, 该模型的构建可参见文献 [76, 102, 108, 117–119, 132].

更进一步地, 当叶片长细比小于 10 或叶片内部中空时, 可构建下面的板方程或壳方程来研究旋转叶片的振动动力学行为:

(1) 经典板方程为

$$
\rho_s \eta_{tt} - \beta \eta_{xx} + \alpha \eta_{xxxx} - \gamma \eta_{txx} = \Phi(u, p, \eta);
$$

(2) 带有旋转的板方程为

$$
\eta_{tt}^s - \alpha \Delta_x \eta_{tt}^s + \Delta_x^2 \eta^s - \omega \nabla \cdot (R \nabla \eta^s) + \eta_t^s = f^s;
$$

(3) Marguerre-Von-Karmans 薄壳方程为

$$
u_{tt} - \mathrm{div} \sigma = f_1, \quad w_{tt} - \alpha \Delta w_{tt} + \Delta^2 w - \mathrm{div}[\sigma \nabla(\theta + w)] = f_2,
$$

其中 $\sigma = \sigma[e(u)]$ 为应力张量.

应该指出, 力学上叶片振动模型的推导主要基于 Hamilton 原理, 但都作一个基本的假设, 即作用在叶片上的气动力采用活塞原理去计算, 这样振动动力学方程组就简化成了仅有固体的梁或板的方程.

3 航空发动机中的流固耦合偏微分方程模型

由于发动机叶片分为风扇叶片、压气机叶片和涡轮叶片, 其所处的工作环境不同, 需要使用不同的流 (气) 固模型去刻画, 因此本节建议一些不同的流固、气固或气热固耦合模型. 这些模型能像第 2 节一样基于 Hamilton 原理和热力学第二定律建立. 我们也介绍它们的数学理论研究进展.

3.1 固定边界情形

当发动机叶片形变较小时, 叶片与空气的耦合可视为固定边界的流固耦合问题. 基于旋转悬臂梁模型 (2.22), 文献 [114] 提出并研究了一个板型叶片满足的四阶双曲方程与不可压缩黏性 Navier-Stokes

方程流固耦合系统

$$
\begin{cases}
\eta_{tt}+\nabla\cdot\sigma=0, & x\in\Omega_s\times(0,T),\\
u_t+v\cdot\nabla u-\Delta u+\nabla p=0, & x\in\Omega_f\times(0,T),\\
u=0, & x\in\Gamma_{\text{out}}\times(0,T),\\
\eta_t=u(x), & x\in\Gamma\times(0,T),\\
\nabla\eta\cdot n=0, & x\in\Gamma\times(0,T),\\
-\sigma n=\dfrac{1}{2}v\cdot nuv-n\cdot\nabla u+pn, & x\in\Gamma\times(0,T),\\
\eta(x,0)=u_0,\quad \eta_t(x,0)=u_1, & x\in\Omega_s,\\
u(x,0)=v_0, & x\in\Omega_f,
\end{cases}
\tag{3.1}
$$

这里 $\sigma=\nabla(a(x)\Delta\eta)-\frac{1}{2}|\nabla\eta|^2\nabla u$, η 是弹性叶片固体的振动位移, u 和 p 分别是不可压流体的速度和压力, 在耦合边界速度与应力匹配界面运动条件的基础上, 对固体添加了 Neumann 边界条件, 利用著作 [94] 中的方法证明了所构造弱解的整体存在性. 模型 (3.1) 描述了板在不可压流体中的运动或潜水物在水中的运动问题, 与经典的 Lions 流固耦合模型密切相关. 事实上, 在地质采油工程或血液流动医学中的流固耦合模型的研究历史悠久, 早在 1969 年, Lions [94] 对流体在固体中流动问题进行了研究, 在其著作中研究了如下固定边界的流固耦合模型:

$$
\begin{cases}
\eta_{tt}-\Delta\eta=0, & x\in\Omega_s\times(0,T),\\
u_t+u\cdot\nabla u-\Delta u+\nabla p=0, & x\in\Omega_f\times(0,T),\\
\nabla\cdot u=0, & x\in\Omega_f\times(0,T),\\
\eta=0, & x\in\Gamma_{\text{out}}\times(0,T),\\
\eta_t=u, & x\in\Gamma\times(0,T),\\
\dfrac{\partial\eta}{\partial n}=\dfrac{\partial u}{\partial n}-pn-\dfrac{1}{2}(u\cdot n)u, & x\in\Gamma\times(0,T),\\
\eta(x,0)=\eta_0,\quad \eta_t(x,0)=\eta_1, & x\in\Omega_s,\\
u(x,0)=u_0, & x\in\Omega_f,
\end{cases}
\tag{3.2}
$$

其中 η 表示固体的振动位移, 占据区域为 Ω_s; u 和 p 分别表示流体的速度和压力, 占据区域为 Ω_f. 流体与固体的耦合边界为 Γ, n 为 Γ 上指向固体的单位法向量, 固体的外边界为 Γ_{out}. 在耦合边界 Γ 上, 边界条件设定为速度相等和法方向上的应力相等, 同时在流体法方向应力上加入了 $\frac{1}{2}(u\cdot n)u$ 以抵消对流项的影响.

Lions 首先引入了模型 (3.2) 的弱解的定义, 在借助 Galerkin 方法构造近似解的基础上, 利用紧致法证明了该流固耦合模型二维和三维情形下整体弱解的存在性以及二维情形下整体弱解的唯一性. 之后, 文献 [41] 研究了由不可压缩黏性 Navier-Stokes 方程和具有 St.Venant-Kirchhoff 弹性的动力学方程组成的流固耦合模型, 证明了其模型整体弱解和强解的存在唯一性, 并得到了 L^2 可积压力场的存在性. 文献 [6] 研究了模型 (3.2) 的能量弱解的整体存在性. 文献 [6] 研究了模型 (3.2) 三维情形弱解的局部正则性, 获得了局部强解的存在性. 文献 [113] 在初值光滑的假设下证明了模型 (3.2) 二维情形其整体弱解的光滑性. 文献 [116] 研究了具有涡度的不可压缩黏性流体与弹性体耦合模型整体弱解的

存在性. 最近, 脚注 2) 研究了下面的不可压缩 Boussinesq 方程与弹性体的耦合模型:

$$
\begin{cases}
u_t + u\cdot\nabla u + \nabla p = \epsilon\Delta u + \rho e + f_0, & x\in\Omega_1,\quad t>0,\\
\mathrm{div} u = 0,\quad \rho_t + u\cdot\nabla\rho = \kappa_1\Delta\rho + f_1, & x\in\Omega_1,\quad t>0,\\
\eta_{tt} = \mu\Delta\eta + f_2,\quad T_t = \kappa_2\Delta T + f_3, & x\in\Omega_2,\quad t>0,\\
\epsilon\dfrac{\partial u}{\partial n} - pn - \dfrac{1}{2}|u|^2 n = \mu\dfrac{\partial w}{\partial n} + k_0 u + g_0, & x\in\Gamma_1,\quad t>0,\\
\eta_t = u, & x\in\Gamma_1,\quad t>0,\\
\rho = T,\quad \kappa\dfrac{\partial\rho}{\partial n} - \dfrac{1}{2}\rho u\cdot n = \kappa_2\dfrac{\partial T}{\partial n} + k_1\rho + g_1, & x\in\Gamma_1,\quad t>0,\\
\eta = 0,\quad \dfrac{\partial T}{\partial N} = 0, & x\in\Gamma_2,\quad t>0,\\
(u,\rho)(0,x) = (u_0,\rho_0)(x), & x\in\Omega_1,\\
(\eta,\eta_t,T)(0,x) = (\eta_0,\eta_1,T_0)(x), & x\in\Omega_2,
\end{cases}
$$

证明了该模型整体弱解的存在性和唯一性. 在二维情形及适当的高阶相容性条件假设下, 也获得了整体强解 (甚至光滑解) 的存在唯一性.

3.2 移动边界情形

3.2.1 刚体耦合不可压 Navier-Stokes 模型

当飞行器低速或匀速飞行时, 发动机中前端风扇和压气机中前端静子叶片与空气的耦合系统可用刚体在不可压黏性流体中的运动进行描述, 一般可利用如下流固耦合模型进行建模:

$$
\begin{cases}
\rho^f(u^f_t + u^f\cdot\nabla u^f) - \nabla\cdot\ \sigma^f + \nabla p = \rho^f g, & (t,\hat{x})\in(0,T)\times\Omega^f(t),\\
\nabla\cdot u^f = 0, & (t,\hat{x})\in(0,T)\times\Omega^f(t),\\
\rho^f_t + \mathrm{div}(\rho^f u^f) = 0, & (t,\hat{x})\in(0,T)\times\Omega^f(t),\\
u^f = 0, & (t,\hat{x})\in(0,T)\times\partial\Omega,\\
u^f = h_i' + \omega_i\wedge(\hat{x}-h_i),\quad i=1,\dots,N, & (t,\hat{x})\in(0,T)\times\partial S^i(t),\\
M_i h_i'' = -\displaystyle\int_{\partial S^i(t)}(\sigma^f - pI)nd\partial S^i(t) + \int_{S^i(t)}\rho^s g d\hat{x},\quad i=1,\dots,N, & t\in[0,T],\\
J_i\dfrac{d\omega_i}{dt} = -\displaystyle\int_{\partial S^i(t)}(\hat{x}-h_i)\wedge((\sigma^f - pI)n)d\partial S^i(t) & \\
\qquad\qquad + \displaystyle\int_{S^i(t)}\rho^s(\hat{x}-h_i)\wedge g d\hat{x},\quad i=1,\dots,N, & t\in[0,T],\\
u(\hat{x},0) = u^0(\hat{x}),\quad \rho^f(\hat{x},0) = \rho^{f,0}(\hat{x}), & \hat{x}\in\Omega^f(0),\\
\rho^s(\hat{x},0) = \rho^{s,0}(\hat{x}), & \hat{x}\in\Omega\setminus\bar{\Omega}^f(0),\\
S^i(0) = S^{i,0},\quad h_i(0) = h_i^0, & \\
h_i'(0) = h_i^1,\quad \omega_i(0) = \omega_i^0, &
\end{cases}
\tag{3.3}
$$

其中 Ω 是流体与刚体占据的总区域, $\Omega^f(t)$ 是流体区域, $S^i(t), i=1,\dots,N$ 是第 i 个刚体占据的区域, ρ^f 和 u^f 分别表示流体的密度与 Euler 速度, ρ^s 表示刚体的密度, M_i, J_i, $h_i(t)$ 和 $\omega_i(t)$ 分别表示第 i 个

2) Zhang J, Wang S, Shen L. Global well-posedness of a nonlinear Boussinesq-structure interaction problem. Preprint, 2024

刚体的质量、惯性矩阵 (惯性矩)、质心所在的位置和旋转向量 (角速度). n 表示边界 $\partial\Omega^f(t)$ 的单位外法向量, g 表示单位质量流体所受到的外力, $\sigma^f=\frac{1}{2}\nu(\nabla u^f+(\nabla u^f)^{\mathrm{T}})$ 表示流体的 Cauchy 应力张量, ν 表示流体的黏性系数, I 表示与空间维数一致的单位矩阵, 上标 T 表示矩阵的转置, h_i' 和 h_i'' 分别表示 h_i 对时间 t 的一阶和二阶导数. 假设 $\hat{x},\hat{y}\in\Omega$, 当 $\Omega\subseteq\mathbb{R}^3$ 时, $\hat{x}\wedge\hat{y}=(\hat{x}_2\hat{y}_3-\hat{x}_3\hat{y}_2,\hat{x}_3\hat{y}_1-\hat{x}_1\hat{y}_3,\hat{x}_1\hat{y}_2-\hat{x}_2\hat{y}_1)$. 当 $\Omega\subseteq\mathbb{R}^2$ 时, $\hat{x}\wedge\hat{y}=\hat{x}_2\hat{y}_1-\hat{x}_1\hat{y}_2$, 此时需要注意 J_i 和 ω_i 是标量函数, $\omega_i\wedge\hat{x}$ 的定义为 $\omega_i(\hat{x}_2,-\hat{x}_1)$.

文献 [73,112] 研究了在 $\Omega=\mathbb{R}^3$, $\rho^f=1$, $i=1$ 情形下, 模型 (3.3) 整体解的存在性. 当 $i>1$ 或者 Ω 为有界区域时, 刚体与刚体之间, 刚体与 Ω 外边界之间有可能发生碰撞, 此时会给解的存在性研究带来很大困难. 在 ρ^f 为常数且刚体与刚体、刚体与 Ω 外边界不发生碰撞的情形下, 文献 [38] 研究了模型 (3.3) 二维和三维两种情形下整体解的存在性, 这里需要注意的是三维整体解的存在性需要小初值假设; 在 Ω 为有界区域且 $\rho^f=1$ 情形下, 文献 [56] 借助 Lagrange 变量改写流体方程 (此时刚体与流体的自由边界问题转化为固定边界问题), 并在此基础上证明了模型 (3.3) 存在唯一局部强解; 文献 [55] 研究了模型 (3.3) 局部强解的存在性. 在碰撞可能发生的情形下, 文献 [111] 在文献 [55] 的基础上运用惩罚方法、DiPerna 和 Lions 的一些经典理论、紧性方法证明了二维情形下模型 (3.3) 整体解的存在性. 时至今日, 在碰撞可能发生的情形下, 模型 (3.3) 的三维整体解的存在性仍是一个公开问题. 相关不可压缩黏性流体与刚体耦合问题的研究参见文献 [27,31,32,44,47–49,52,58,66,82,111], 可压缩黏性流体与刚体耦合问题的相关研究参见文献 [39,42,43,45,57,63,77].

3.2.2　弹性体耦合不可压 Navier-Stokes 模型

当飞行器加速或减速飞行时, 发动机中前端风扇和压气机中前端静子叶片与空气的耦合系统可用弹性体在不可压黏性流体中的运动进行建模, 模型如下:

$$\begin{cases}u_t^f+u^f\cdot\nabla_{\hat{x}}u^f-\nabla_{\hat{x}}\cdot\sigma^f+\nabla p=F^f, & (t,\hat{x})\in(0,T)\times\Omega^f(t),\\ \nabla_{\hat{x}}\cdot u^f=0, & (t,\hat{x})\in(0,T)\times\Omega^f(t),\\ \eta_t^f=u^f\circ\eta^f, & (t,x)\in(0,T)\times\Omega_0^f,\\ \eta_{tt}^s-\nabla_x\cdot\sigma^s=f^s, & (t,x)\in(0,T)\times\Omega_0^s,\\ \eta^f=\eta^s,\quad(\sigma^f\circ\eta^f-pI)((\nabla_x\eta^f)^{-1}n)=\sigma^s n, & (t,x)\in(0,T)\times\Gamma_0,\\ u^f=0, & (t,x)\in(0,T)\times\partial\Omega,\\ u=u_0(x),\quad\eta=x, & (t,x)\in\{t=0\}\times\Omega_0,\end{cases}\tag{3.4}$$

其中 η^f 和 η^s 分别表示流体和弹性体的粒子路径, $\hat{x}=\eta^f=x+\int_0^t u^f(t,\hat{x})\circ\eta^f d\tau$ 表示粒子 x 在 t 时刻时所在的位置, $\Omega^s(t)$ 表示弹性体所占据的区域, 特别地, $\Omega_0^s:=\Omega^s(0)$ 表示零时刻弹性体区域, Γ_0 表示 Ω_0^s 的边界, n 表示 Γ_0 的单位外法向量, σ^s 表示弹性体的 Cauchy 应力张量. $F^f(t,\hat{x})$ 和 $f^s(t,x)$ 分别表示流体和弹性体所受的外力. 同时, $\eta=\eta^f$, $x\in\Omega_0^f$; $\eta=\eta^s$, $x\in\Omega_0^s$; $u_0=u_0^f(t,x)$, $x\in\Omega_0^f$; $u_0=u_0^s(t,x)$, $x\in\Omega_0^s$.

当 $\sigma^s=\lambda\mathrm{Trace}(\nabla_x\eta^s-I)I+\mu(\nabla_x\eta^s+(\nabla_x\eta^s)^{\mathrm{T}}-2I)$, 其中 λ 和 μ 表示弹性体的 Lamé 系数, 此时方程 $(3.4)_4$ 称为线性 Kirchhoff 方程 [33], Coutand 和 Shkoller [33] 在 Lagrange 坐标系下利用惩罚、磨光、区域拉平、线性化等技术和 Tychonoff 不动点定理, 首次证明了模型 (3.4) (弹性体用线性 Kirchhoff 方程描述) 局部强解的存在性和唯一性. 随后, 文献 [68,79,80] 研究了相同的模型, 并在初值具有更低光滑性的条件下, 得到了与文献 [33] 相同的结论. 当弹性体方程为带有阻尼的线性波动方程时, 文献 [69,70] 研究了小初值条件下模型 (3.4) 整体强解的存在性和衰减性.

当 σ^s 为 St. Venant-Kirchhoff 材料的第一 Piola-Kirchhoff 应力张量, 即

$$\sigma^s = \frac{\lambda}{2}\operatorname{Trace}((\nabla\eta^s)^{\mathrm{T}}\nabla\eta^s - I)I + \mu((\nabla\eta^s)^{\mathrm{T}}\nabla\eta^s - I)$$

时, 文献 [34] 在 Lagrange 坐标系下研究了模型 (3.4) 局部强解的适定性. 当 σ^s 为第二 Piola-Kirchhoff 应力张量时, 文献 [12,13] 首先对模型进行了线性化处理, 并研究了线性化模型的适定性. 其他弹性体在不可压流体中运动的相关研究参见文献 [11,14,16,19,81,84,100,103,106,107,110].

3.2.3 弹性体耦合可压 Navier-Stokes 模型

在压气机后端, 空气在固定气腔中逐步被压缩, 使其密度增大, 此时可利用可压缩 Navier-Stokes (NS) 方程描述空气的运动. 在此情形下, 压气机后端静子叶片与空气的耦合可用弹性体与可压缩 NS 方程耦合系统描述, 耦合模型如下:

$$\begin{cases} \rho_t + \nabla\cdot(\rho u^f) = 0, & (t,\hat{x}) \in (0,T)\times\Omega^f(t), \\ \rho u_t^f + \rho u\cdot\nabla u - \nabla\cdot\sigma^f + \nabla p = 0, & (t,\hat{x}) \in (0,T)\times\Omega^f(t), \\ \eta_t^f = u^f\circ\eta^f, & (t,x)\in(0,T)\times\Omega_0^f, \\ \eta_{tt}^s - \nabla_x\cdot\sigma^s = f^s, & (t,x)\in(0,T)\times\Omega_0^s, \\ \eta^f = \eta^s, \quad (\sigma^f\circ\eta^f - p\mathrm{Id})((\nabla_x\eta^f)^{-1}n) = \sigma^s n, & (t,x)\in(0,T)\times\Gamma_0, \\ u^f = 0, & (t,x)\in(0,T)\times\partial\Omega, \\ u = u_0(x), \quad \eta = x, & (t,x)\in\{t=0\}\times\Omega_0. \end{cases} \tag{3.5}$$

当 Cauchy 应力张量 σ^s 为第一 Piola-Kirchhoff 时, 文献 [18] 证明了弱解的正则解的存在唯一性. 当 Cauchy 应力张量 σ^s 为第二 Piola-Kirchhoff 时, 文献 [15] 在不存在碰撞、固体位移场满足不相互渗透和保持方向的假设下, 在 Euler 坐标系下证明了弱解的存在性. 当应力张量 $\sigma^s = 2\mu\varepsilon(\eta) + \lambda(\nabla\cdot\eta)\mathrm{Id}$ 时, 文献 [17] 证明了模型 (3.5) 的局部时间存在性和正则解的唯一性. 在其基础上, 文献 [78] 证明了流体当初始密度、速度和固体速度分别属于 $H^{\frac{3}{2}+r}, H^3, H^{\frac{3}{2}+r}, r>0$ 时唯一局部强解的存在性.

3.2.4 梁、板、壳耦合不可压 NS 模型

在这些耦合的动力学系统中, 一般以具有弹性的梁 (板、壳) 作为流体的边界 (或一部分边界) 来研究. 对于弹性材料作为边界与流体的耦合, 可以用下面模型来描述:

$$\begin{cases} u_t^f + u^f\cdot\nabla_{\hat{x}}u^f - \nabla_{\hat{x}}\cdot\sigma^f = F^f, & (t,\hat{x})\in(0,T)\times\Omega^f(t), \\ \nabla_{\hat{x}}\cdot u^f = 0, & (t,\hat{x})\in(0,T)\times\Omega^f(t), \\ \eta_{tt}^s + A\Delta_x^2\eta^s + B\Delta_x^2\eta_t^s - C\Delta_x\eta_t^s - D\Delta_x\eta^s + E\eta^s = g + \Phi\cdot n, & (t,x)\in(0,T)\times M_0, \\ u^f(t,\hat{x})\circ\phi(t,x) = \eta_t^s n, & (t,x)\in(0,T)\times M_0, \\ u^f = 0, & (t,x)\in(0,T)\times\Gamma, \\ \eta^s = \eta_0(x), \quad \eta_t^s = \eta_1(x), & (t,x)\in\{t=0\}\times M_0, \\ u^f = u_0(x), & (t,x)\in\{t=0\}\times\Omega_0^f, \end{cases} \tag{3.6}$$

其中 $\Omega^f(t)\subset\mathbb{R}^d$, $d=2,3$ 为流体区域, 其边界由刚性边界 Γ 和薄弹性材料边界 $M(t)$ 两部分构成, $\Omega_0^f := \Omega^f(0)$. $M_0 := M(0)$, $\phi(t,x)$ 为 M_0 到 $M(t)$ 的映射. n 和 n_t 分别表示边界 M_0 和 $M(t)$ 的单位

外法向量, η^s 为薄弹性材料在 n 方向上的位移, F^f 和 g 分别表示流体和薄弹性材料所受的外力. Φ 是流体对弹性材料的表面力, $\Phi(t,x)$ 的具体表达式为 $\Phi(t,x)=-(\sigma^f(t,\hat{x})n_t)\circ\phi(t,x)|\det\nabla_x\phi(t,x)|$ (参见文献 [26,87,88]). 这里 A, B, C, D 和 E 均为大于等于零的常数.

当 $\hat{x}=(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $x\in\mathbb{R}$ 时, 模型 (3.6) 可视为薄壁梁与不可压黏性流体的耦合. 文献 [10] 在 $B=0$ 和周期边界 ($\eta^s(t,x)=\eta^s(t,x+L), u^f(t,x,y)=u^f(t,x+L,y)$) 假设下, 首次证明了模型 (3.6) 局部强解的存在性. 文献 [89] 在 $B=E=0$ 和周期边界假设下, 证明了模型 (3.6) 局部强解的存在性以及小初值条件下整体强解的存在性. 文献 [90] 在 $A=B=E=0$ 和周期边界假设下, 证明了模型 (3.6) 局部强解的存在性以及小初值条件下整体强解的存在性. 文献 [5] 在 $B=C=E=0$ 和周期边界假设下, 证明了模型 (3.6) 局部强解的存在性和唯一性, 并证明了小初值条件下整体强解的存在性. 文献 [54,64] 在 $B=E=0$ 和周期边界假设下, 证明了模型 (3.6) 存在唯一整体强解.

当 $\hat{x}\in\mathbb{R}^3$, $x\in\mathbb{R}^2$ 时, 模型 (3.6) 可视为薄板与不可压黏性流体的耦合. 文献 [26,53] 在 $B=C=D=0$ 和 $\eta^s=\frac{\partial\eta^s}{\partial n}=0$, $x\in\partial M_0$ 边界条件下, 证明了模型 (3.6) 至少存在一个局部解. 文献 [124] 在 $B=C=D=E=0$ 和 $\eta^s=\frac{\partial\eta^s}{\partial n}=0$, $x\in\partial M_0$ 边界条件下, 在板方程中引入了非线性弹性力, 并证明了模型 (3.6) 至少存在一个局部解. 有关薄板耦合不可压黏性流体的其他相关研究可以参见文献 [36,37,99].

当 $\hat{x}\in\mathbb{R}^3$, $x\in\mathbb{R}^3$ 时, 模型 (3.6) 可视为薄壳与不可压黏性流体的耦合. 文献 [87,88] 在 $B=C=D=0$ 和 $\eta^s=\nabla\eta^s=0$, $x\in\partial M_0$ 边界条件下, 证明了模型 (3.6) 局部弱解的存在性以及小初值条件下整体弱解的存在性. 文献 [101] 研究了圆筒 Koiter 壳体与不可压黏性流体的耦合, 在假设圆筒壁不发生碰撞和 $\eta^s=\nabla\eta^s=0$, $x\in\partial M_0$ 边界条件下, 证明了耦合系统整体弱解的存在性. 其他薄壳耦合不可压黏性流体的相关研究参见文献 [22,23,25,28,29,96].

3.2.5　梁、板、壳耦合可压 NS 模型

近年来, 也有一些梁、板、壳作为边界与可压流体耦合的研究文献 [20,98]. 主要研究模型可写为

$$\begin{cases}\rho_t+\nabla\cdot(\rho u)=0, & (t,\hat{x})\in(0,T)\times\Omega^f(t),\\ u^f_t+u^f\cdot\nabla_{\hat{x}}u^f-\nabla_{\hat{x}}\cdot\sigma^f+\nabla p=F^f, & (t,\hat{x})\in(0,T)\times\Omega^f(t),\\ \eta^s_{tt}+A\Delta_x^2\eta^s+B\Delta_x^2\eta^s_t-C\Delta_x\eta^s_t-D\Delta_x\eta^s+E\eta^s & \\ \quad=g+\Phi\cdot n, & (t,x)\in(0,T)\times M_0,\\ u^f(t,\hat{x})\circ\phi(t,x)=\eta^s_t n, & (t,x)\in(0,T)\times M_0,\\ u^f=0,\quad \rho=\rho_0, & (t,x)\in(0,T)\times\Gamma,\\ \eta^s=\eta_0(x),\quad \eta^s_t=\eta_1(x), & (t,x)\in\{t=0\}\times M_0,\\ u^f=u_0(x), & (t,x)\in\{t=0\}\times\Omega^f_0.\end{cases}\tag{3.7}$$

文献 [98] 研究了二维可压缩黏性流体与一维薄壁阻尼梁耦合模型, 以及当 $B=E=0$ 时模型局部强解的存在性. 文献 [20] 研究了三维可压缩黏性流体与 Koiter 型软壳耦合模型, 在假设 $p(\rho)=a\rho^\gamma$ 和边界不发生碰撞的前提下证明了当绝热系数 $\gamma>\frac{12}{7}$ (二维情形 $\gamma>1$) 时弱解的存在性. 文献 [46] 研究了三维可压缩黏性流体与二维板耦合模型, 当 $C=D=E=0$ 时证明了其弱解的整体存在性.

3.2.6　磁流体流固耦合模型

当空气中掺杂磁性物质或遭遇极端天气时, 空气具有一定的顺磁性, 此时, 非磁性叶片在地球磁

场中运动可用下面模型描述:

$$\begin{cases} \eta^s_{tt} - \Delta_x \eta^s = f_s, & (t,x) \in (0,T) \times \Omega^s_0, \\ u^f_t + u^f \cdot \nabla_{\hat{x}} u^f - \Delta_{\hat{x}} u^f + \nabla_{\hat{x}} p = B \cdot \nabla_{\hat{x}} B + F_f, & \hat{x} \in \Omega^f(t), \quad t \in (0,T), \\ B_t + u \cdot \nabla_{\hat{x}} B = B \cdot \nabla_{\hat{x}} u, & \hat{x} \in \Omega^f(t), \quad t \in (0,T), \\ \nabla_{\hat{x}} \cdot u^f = 0, \quad \nabla_{\hat{x}} \cdot B = 0, & \hat{x} \in \Omega^f(t), \quad t \in (0,T), \\ \eta^f_t = u^f \circ \eta^f, & (t,x) \in (0,T) \times \Omega^f_0, \\ \eta^f = \eta^s, & (t,x) \in (0,T) \times \Gamma_0, \\ ((\nabla_{\hat{x}} u^f - pI) \circ \eta^f)((\nabla_x \eta^f)^{-1})^{\mathrm{T}} n = \nabla_x \eta^s n, & (t,x) \in (0,T) \times \Gamma_0, \\ B \cdot N = 0, & \hat{x} \in \Gamma_t, \quad t \in (0,T), \\ B \cdot \tilde{n} = 0, \quad u^f = 0, & (t,x) \in (0,T) \times \partial\Omega, \\ u = u_0(x), \quad \eta = x, \quad B = B_0(x), & t = 0. \end{cases} \tag{3.8}$$

文献 [115] 证明了模型 (3.8) 局部强解的存在性.

3.2.7 旋转悬臂板耦合不可压 NS 方程

若叶片在 3 个空间坐标上都有振动位移, 则带有旋转的叶片与流体耦合系统可构建如下耦合模型:

$$\begin{cases} \eta^s_{tt} - \alpha \Delta_x \eta^s_{tt} + \Delta^2_x \eta^s - \omega \nabla_x \cdot (R \nabla_x \eta^s) + \eta^s_t = f^s, & (t,x) \in (0,T) \times \Omega^s, \\ u^f_t + u^f \cdot \nabla_{\hat{x}} u^f + \nabla_{\hat{x}} p = \varepsilon \Delta_{\hat{x}} u^f + F^f, & \hat{x} \in \Omega^f(t), \quad t \in (0,T), \\ \nabla_{\hat{x}} \cdot u^f = 0, & \hat{x} \in \Omega^f(t), \quad t \in (0,T), \\ \eta^f_t = u^f \circ \eta^f, & (t,x) \in (0,T) \times \Omega^f_0, \\ \eta^f = \eta^s, \quad \dfrac{\partial \eta^s_t}{\partial n} = 0 \quad \text{或} \quad \Delta_x \eta^s = 0, & (t,x) \in (0,T) \times \Gamma_0, \\ ((\varepsilon \nabla_{\hat{x}} u^f - pI) \circ \eta^f)((\nabla_x \eta^f)^{-1})^{\mathrm{T}} N & \\ \quad = (-\nabla \Delta_x \eta^s + \alpha \nabla_x \eta^s_{tt} + \omega R \nabla_x \eta^s) N, & (t,x) \in (0,T) \times \Gamma_0, \\ \eta^s = \dfrac{\partial \eta^s}{\partial n} = 0, & (t,x) \in (0,T) \times \Gamma_1, \\ u^f = 0, & (t,x) \in (0,T) \times \partial\Omega, \\ \eta^f = x, \quad u^f = u^f_0, & (t,x) \in \{t=0\} \times \Omega^f_0, \\ \eta^s = x, \quad \eta^s_t = u^s_0, & (t,x) \in \{t=0\} \times \overline{\Omega}^s_0. \end{cases} \tag{3.9}$$

该模型在耦合边界上仍沿用位移 (或速度) 和法方向上应力的匹配, 但为了保持系统的适定性, 在耦合边界上对于固体而言, 还需要添加边界条件 $\frac{\partial \eta^s_t}{\partial n} = 0$ 或 $\Delta_x \eta^s = 0$. 脚注 3) 研究了模型 (3.9) 局部强解的存在性.

3) Shen L, Wang S. Existence of strong solutions for the motion of elastic structure governed by the fourth order hyperbolic equations in an incompressible viscous fluid. Preprint, 2023

4　主要数学理论与研究方法

4.1　旋转板与不可压 NS 方程耦合的流固耦合模型及主要结果

我们以滚柱支撑板叶片振动流固耦合模型 1) 为例来介绍这类问题的理论研究方法, 悬臂板 (界面运动的条件不同) 叶片振动流固耦合模型有完全类似的结论. 考虑下面的流固耦合问题:

$$\begin{cases} \eta^s_{tt} + \Delta_x^2(\eta^s - \eta^s_0) = f_s, & (t,x) \in (0,T) \times \Omega^s_0, \\ u^f_t + u^f \cdot \nabla_{\hat{x}} u^f - \Delta_{\hat{x}} u^f + \nabla_{\hat{x}} p = F_f, & \hat{x} \in \Omega^f(t), \quad t \in (0,T), \\ \nabla_{\hat{x}} \cdot u^f = 0, & \hat{x} \in \Omega^f(t), \quad t \in (0,T), \\ \eta^f_t = u^f \circ \eta^f, & (t,x) \in (0,T) \times \Omega^f_0, \\ \eta^f = \eta^s, \quad \dfrac{\partial \eta^s_t}{\partial n} = 0, & (t,x) \in (0,T) \times \Gamma_0, \\ ((\nabla_{\hat{x}} u^f - pI) \circ \eta^f)((\nabla_x \eta^f)^{-1})^{\mathrm{T}} n = \nabla_x(\Delta_x(\eta^s - \eta^s_0))n, & (t,x) \in (0,T) \times \Gamma_0, \\ u^f = 0, & (t,x) \in (0,T) \times \partial\Omega, \\ (\eta^s, \eta^s_t)(t=0,x) = (\eta^s_0(x), u^s_0(x)), & x \in \Omega^s_0, \\ (\eta^f, u^f)(t=0,x) = (x, u^f_0(x)), & x \in \Omega^f_0. \end{cases} \tag{4.1}$$

令

$$\begin{aligned} &a = a(x,t) = (\nabla_x \eta^f(t,x))^{-1}, \quad x \in \Omega^f_0, \\ &q(t,x) = p(t,\hat{x}) \circ \eta^f = p(t, \eta^f(t,x)), \quad x \in \Omega^f_0, \\ &f^f = F^f(t, \eta^f(t,x)), \quad x \in \Omega^f_0, \end{aligned}$$

使用 Lagrange 坐标系将模型 (4.1) 转化为

$$\begin{cases} v^s_t + \Delta^2 \displaystyle\int_0^t v^s d\tau = f^s, & (t,x) \in (0,T) \times \Omega^s_0, \\ v^f_t - \nabla \cdot (\nabla v^f a a^{\mathrm{T}}) + \nabla \cdot (q a^{\mathrm{T}}) = f^f, & (t,x) \in (0,T) \times \Omega^f_0, \\ \nabla v^f : a = 0, & (t,x) \in (0,T) \times \Omega^f_0, \\ \eta^f_t = v^f, & (t,x) \in (0,T) \times \Omega^f_0, \\ v^f = v^s, \quad \dfrac{\partial v^s}{\partial n} = 0, & (t,x) \in (0,T) \times \Gamma_0, \\ (\nabla v^f a - qI) a^{\mathrm{T}} n = \nabla \left(\displaystyle\int_0^t \Delta v^s d\tau \right) n, & (t,x) \in (0,T) \times \Gamma_0, \\ \eta = x, \quad v = u_0(x), & (t,x) \in \{t=0\} \times \Omega. \end{cases} \tag{4.2}$$

记

$$v(t,x) = \begin{cases} v^f(t,x) = u^f(t, \eta^f(t,x)), & x \in \Omega^f_0, \\ v^s(t,x) = \eta^s_t(t,x), & x \in \Omega^s_0, \end{cases} \quad \eta_t(t,x) = v(t,x).$$

为了陈述主要结果, 先定义如下背景空间:

$$V^f_1(T) = \bigcap_{i=0}^{2} H^i(0,T; H^{3-i}(\Omega^f_0)),$$

$$
\begin{aligned}
&V_2^f(T)=\bigcap_{i=0}^{2} W^{j,\infty}(0,T;H^{3-j}(\Omega_0^f)),\\
&V_1^s(T)=\bigcap_{i=0}^{2} H^{i}(0,T;H^{4-i}(\Omega_0^s)),\\
&V_2^s(T)=\bigcap_{i=0}^{2} W^{j,\infty}(0,T;H^{4-i}(\Omega_0^s)),\\
&V=\left\{\phi\in H_0^1(\Omega_0)\cap H^2(\Omega_0^s)\;\middle|\;\nabla\phi:a=0\text{ 在 }\Omega_0^f\text{ 内},\frac{\partial\phi}{\partial n}=0\text{ 在 }\Gamma_0\text{ 上}\right\},\\
&V_T=\left\{w\in L^\infty(0,T;L^2(\Omega_0))\;\middle|\;\int_0^t wd\tau\in L^\infty(0,T;H^2(\Omega_0^s)),w\in L^2(0,T;H^1(\Omega_0^f)),\right.\\
&\qquad\left.\nabla w:a=0\text{ 在 }(0,T)\times\Omega_0^f\text{ 内},w=0\text{ 在 }\partial\Omega_0\text{ 上},\frac{\partial w^s}{\partial n}=0\text{ 在 }\Gamma_0\text{ 上}\right\},\\
&W=\left\{\phi\in H_0^1(\Omega_0)\cap H^2(\Omega_0^s)\;\middle|\;\frac{\partial\phi}{\partial n}=0\text{ 在 }\Gamma_0\text{ 上}\right\},\\
&W_T=\left\{w\in L^\infty(0,T;L^2(\Omega_0))\;\middle|\;\int_0^t wd\tau\in L^\infty(0,T;H^2(\Omega_0^s)),\right.\\
&\qquad\left.w\in L^2(0,T;H^1(\Omega_0^f)),w=0\text{ 在 }\partial\Omega_0\text{ 上},\frac{\partial w^s}{\partial n}=0\text{ 在 }\Gamma_0\text{ 上}\right\},\\
&X_T=\left\{v\in L^2(0,T;H_0^1(\Omega_0))\;\middle|\;\left(v^f,\int_0^t v^sd\tau\right)\in V_1^f(T)\times V_1^s(T)\right\},\\
&Y_T=\left\{v\in X_T\;\middle|\;v_{tt}\in L^\infty(0,T;L^2(\Omega_0)),\left(v^f,\int_0^t v^sd\tau\right)\in V_2^f(T)\times V_2^s(T)\right\},\\
&Z_T=\{(v,q)\in Y_T\times L^\infty(0,T;H^2(\Omega_0^f))\mid q_t\in L^\infty(0,T;H^1(\Omega_0^f))\}.
\end{aligned}
$$

定义投影算子 $\Pi=\mathrm{Id}-n\otimes n$ 和工作空间

$$C_T(M)=\{v\in Y_T\mid \|v\|_{Y_T}^2\leqslant M,v(0,x)=u_0,v_t(0,x)=w_1,x\in\Omega_0\},$$

其中 $(w_1,q_0)(x)=(v_t,q)$ $(t=0,x)$ 可由模型 (4.1) 在 $t=0$ 解得.

令 $\overline{T}$ 为某一固定时间, 系统 (4.1) 初值和非齐次项 f 满足

$$
\begin{cases}
u_0\in H^5(\Omega_0^f)\cap H^4(\Omega_0^s)\cap H_0^1(\Omega),\\
f\in L^2(0,\overline{T};H^2(\Omega)),\quad f_t\in L^2(0,\overline{T};H^1(\Omega)),\\
f_{tt}\in L^2(0,\overline{T};L^2(\Omega)),\quad f(0,x)\in H^4(\Omega).
\end{cases}\tag{4.3}
$$

现在我们能陈述主要结果如下:

定理 4.1 [3]　设 Ω 为 $\mathbb{R}^3$ 空间中的 C^4 光滑有界开区域, Ω_0^s 为 Ω 中 H^5 型开区域. 若初值 u_0 和外力项 f 满足条件 (4.3) 和相容性条件

$$
\begin{cases}
\nabla\cdot u_0=0, & x\in\Omega_0^f,\\
\Pi(\nabla u_0n)=0,\quad \Delta u_0-\nabla q_0=0, & x\in\Gamma_0,\\
\Pi((\nabla w_1^f+\nabla u_0^f(aa^{\mathrm{T}})_t(0)-q_0a_t(0)+\nabla\Delta u_0^s)n)=0, & x\in\Gamma_0,
\end{cases}\tag{4.4}
$$

则存在仅依赖于 u_0, f 和 Ω_0^f 的 $T\in(0,\overline{T})$, 使得系统 (4.1) 在 $[0,T]$ 内存在解 $(v,q,\eta^f)\in Z_T$, 而且 $\eta\in C([0,T];H^4(\Omega_0^f)\cap H^6(\Omega_0^s)\cap H^1(\Omega))$.

令 v 为 $C_T(M)$ 中任一已知函数, 记 $v^f=v$, $x\in\Omega^f$, $\eta^f(x,t)=x+\int_0^t v^f(x,\tau)d\tau$, $a=a(x,t)=(\nabla\eta^f)^{-1}(x,t)$, $J=\det\nabla\eta^f$. 为了证明定理 4.1, 引入线性化系统

$$\begin{cases} w_t^s+\Delta^2\displaystyle\int_0^t w^s d\tau=f^s, & (t,x)\in(0,T)\times\Omega_0^s,\\ w_t^f-\nabla\cdot(J\nabla w^f aa^{\mathrm{T}})+\nabla\cdot(Jqa^{\mathrm{T}})=f^f, & (t,x)\in(0,T)\times\Omega_0^f,\\ \nabla w^f:a=0, & (t,x)\in(0,T)\times\Omega_0^f,\\ w^f=w^s,\quad \dfrac{\partial w^s}{\partial n}=0, & (t,x)\in(0,T)\times\Gamma_0,\\ J(\nabla w^f a-qI)a^{\mathrm{T}}n=\displaystyle\int_0^t\nabla\Delta w^s d\tau n, & (t,x)\in(0,T)\times\Gamma_0,\\ w^f=0, & (t,x)\in(0,T)\times\partial\Omega(t),\\ w=u_0(x), & (t,x)\in\{t=0\}\times\Omega_0. \end{cases}\tag{4.5}$$

易知系统 (4.5) 的不动点 $w=v$ 为非线性方程 (4.1) 的解. 对于线性化系统 (4.5), 引入弱解的定义如下:

定义 4.1　若 $w\in V_T$, $w_t\in V'$ 满足

$$\begin{aligned} &\text{(i)}\quad (w_t,\phi)+(J\nabla wa,\nabla\phi a)_f+\left(\int_0^t\Delta w d\tau,\Delta\phi\right)_s=(f,\phi),\\ &\text{(ii)}\quad w=u_0,\quad t=0, \end{aligned}$$

对于任意的 $\phi\in V$ 和几乎处处的 $0\leqslant t\leqslant T$ 均成立, 则称 w 为系统 (4.5) 的弱解.

对于系统 (4.5), 有下面的定理.

定理 4.2 [3)]　设 u_0, f 和 Ω 满足定理 4.1 的假设, 则存在 $M>0$, $T>0$ 使得对任何 $v\in C_T(M)$, 系统 (4.5) 存在唯一的解 $(w,q)\in Z_T$, 而且 $w\in C_T(M)$.

由于线性化系统并不是不可压的, 为了得到压力的估计, 引入惩罚问题.

定义 4.2　令 $\varepsilon>0$. 记 $q_\varepsilon=q_0+tq_1-\frac{1}{\varepsilon}\nabla w_\varepsilon:a(x)$. 若 $w_\varepsilon\in W_T$ 对于任意的 $\phi\in W$ 和几乎处处的 $0\leqslant t\leqslant T$ 满足

$$\begin{aligned} &(w_{\varepsilon t},\phi)+(J\nabla w_\varepsilon a,\nabla\phi a)_f+\left(\int_0^t\Delta w_\varepsilon d\tau,\Delta\phi\right)_s-(q_\varepsilon,J\nabla\phi:a)_f=(f,\phi),\\ &w_\varepsilon=u_0,\quad t=0, \end{aligned}\tag{4.6}$$

则称 w_ε 为惩罚问题 (4.6) 的解.

定理 4.1 和 4.2 证明的关键点是, 黏性的影响使得固体部分的正则性改变了流体在边界上的正则性, 从而改进了流体在区域上的正则性. 证明思路是, 从系统 (4.6) 出发, 使用 Galerkin 方法构造近似解、获得先验估计与解的正则性估计、组建关于惩罚参数的一致先验估计、根据方程的特点抬高所需要的工作空间内的一致先验估计、使用紧性结论组建线性问题解的存在唯一性, 最后使用不动点定理获得非线性问题解的存在性.

4.2 移动界面的流固耦合问题证明的基本思想与步骤

对于移动边界的流固耦合问题, 下面的理论分析 [33] 处理方法是基本的.

(1) 利用 Lagrange 变化将流体方程从 Euler 坐标系变为 Lagrange 坐标系, 以此保证流体与固体的自变量在同一坐标系下. 此外, 通过变换也将移动边界问题变为固定边界问题.

(2) 坐标变化后, 流体的黏性项会具有非常强的非线性, 因此, 需要先进行线性化处理. 此时, 线性化问题的不动点即为非线性问题 (原流固耦合模型) 的解.

(3) 直接通过线性问题研究无法获得压力的估计, 同时也无法获得流体的不可压性质. 因此, 在构建线性化问题弱解时, 需要加入惩罚项并对背景速度场进行磨光处理, 处理后的方程称为惩罚问题.

(4) 利用 Faedo-Galerkin 方法构造惩罚问题的近似解.

(5) 利用能量方法获得近似解的估计以及近似解关于时间 t 一阶导数和二阶导数的估计, 注意此时的估计依赖于惩罚参数.

(6) 利用紧性原理获得惩罚问题解的存在性.

(7) 再次利用能量方法证明惩罚问题解与惩罚参数无关的一致估计, 由此得到依赖于磨光参数 n 的惩罚问题解的存在性.

(8) 证明惩罚问题解与磨光参数 n 无关的一致估计 (关于时间 t 的).

(9) 利用区域拉平、截断的技巧、迹定理和 Stokes 方程的正则性原理证明惩罚问题解与磨光参数 n 相关的一致估计 (关于空间 x 的).

(10) 在背景空间下, 给出惩罚问题解的封闭性证明, 获得线性问题的解.

(11) 利用 Tychonoff 不动点定理证明非线性问题解的存在性, 即获得原流固耦合问题解的存在性.

(12) 抬高初值的正则性, 利用存在性的证明步骤, 得到解的唯一性.

目前的方法有一定的局限性, 黏性或耗散结构起很重要的作用, 它不能被用来处理无黏流和固体耦合的流固耦合问题. 关于这些模型的理论和应用研究都属于起步阶段, 急需新理论和新方法处理叶片的几何结构与几何边界的复杂性. 因此, 如何构建旋转叶片的颤振模型和研究其非线性动力学特性及一般的气动弹性稳定性等问题 (特别是数值方法的研究) 将十分有意义.

参考文献

1 Altenbach J, Altenbach H, Matzdorf V. A generalized Vlasov theory for thin-walled composite beam structures. Mech Compos Mater, 1994, 30: 43–54

2 Arvin H, Bakhtiari-Nejad F. Nonlinear free vibration analysis of rotating composite Timoshenko beams. Compos Struct, 2013, 96: 29–43

3 Ashley H, Zartarian G. Piston theory—a new aerodynamic tool for the aeroelastician. J Aeronautical Sci, 1956, 23: 1109–1118

4 Avramov K V, Pierre C, Shyriaieva N V. Nonlinear equations of flexural-flexural-torsional oscillations of rotating beamswith arbitrary cross-section. Internat Appl Mech, 2008, 44: 582–589

5 Badra M, Takahashi T. Gevrey regularity for a system coupling the Navier-Stokes system with a beam equation. SIAM J Math Anal, 2019, 51: 4776–4814

6 Barbu V, Grujic Z, Lasiecka I, et al. Existence of the energy-level weak solutions for a nonlinear fluid-structure interaction model. In: Fluids and Waves. Contemporary Mathematics, vol. 440. Providence: Amer Math Soc, 2007, 55–82

7 Barker A T, Cai X C. Scalable parallel methods for monolithic coupling in fluid-structure interaction with application to blood flow modeling. J Comput Phys, 2010, 229: 642–659

8 Bauchau O A, Hong C H. Nonlinear composite beam theory. J Appl Mech, 1988, 55: 156–163

9 Bazilevs Y, Calo V M, Hughes T J R, et al. Isogeometric fluid-structure interaction: Theory, algorithms, and computations. Comput Mech, 2008, 43: 3–37
10 Beirão da Veiga H. On the existence of strong solutions to a coupled fluid-structure evolution problem. J Math Fluid Mech, 2004, 6: 21–52
11 Bociu L, Castle L, Lasiecka I, et al. Minimizing drag in a moving boundary fluid-elasticity interaction. Nonlinear Anal, 2020, 197: 111837–111881
12 Bociu L, Toundykov D, Zolésio J P. Well-posedness analysis for a linearization of a fluid-elasticity interaction. SIAM J Math Anal, 2015, 47: 1958–2000
13 Bociu L, Zolésio J P. Sensitivity analysis for a free boundary fluid-elasticity interaction. Evol Equ Control Theory, 2013, 2: 55–79
14 Boulakia M. Existence of weak solutions for the motion of an elastic structure in an incompressible viscous fluid. C R Math Acad Sci Paris, 2003, 336: 985–990
15 Boulakia M. Existence of weak solutions for an interaction problem between an elastic structure and a compressible viscous fluid. J Math Pures Appl (9), 2005, 84: 1515–1554
16 Boulakia M. Existence of weak solutions for the three-dimensional motion of an elastic structure in an incompressible fluid. J Math Fluid Mech, 2007, 9: 262–294
17 Boulakia M, Guerrero S. Regular solutions of a problem coupling a compressible fluid and an elastic structure. J Math Pures Appl (9), 2010, 94: 341–365
18 Boulakia M, Guerrero S. On the interaction problem between a compressible fluid and a Saint-Venant Kirchhoff elastic structure. Adv Difference Equ, 2017, 22: 1–48
19 Boulakia M, Guerrero S, Takahashi T. Well-posedness for the coupling between a viscous incompressible fluid and an elastic structure. Nonlinearity, 2019, 32: 3548–3592
20 Breit D, Schwarzacher S. Compressible fluids interacting with a linear-elastic shell. Arch Ration Mech Anal, 2018, 228: 495–562
21 Brézis H, Coron J M, Nirenberg L. Free vibrations for a nonlinear wave equation and a theorem of P. Rabinowitz. Comm Pure Appl Math, 1980, 33: 667–684
22 Bukac M, Muha B. Stability and convergence analysis of the extensions of the kinematically coupled scheme for the fluid-structure interaction. SIAM J Numer Anal, 2016, 54: 3032–3061
23 Čanić S, Galić M, Muha B. Analysis of a 3D nonlinear, moving boundary problem describing fluid-mesh-shell interaction. Trans Amer Math Soc, 2020, 373: 6621–6681
24 Cesnik C E S, Hodges D H. VABS: A new concept for composite rotor blade cross-sectional modeling. J Am Helicopter Soc, 1997, 42: 27–38
25 Chacón Rebollo T, Girault V, Murat F, et al. Analysis of a coupled fluid-structure model with applications to hemodynamics. SIAM J Numer Anal, 2016, 54: 994–1019
26 Chambolle A, Desjardins B, Esteban M J, et al. Existence of weak solutions for the unsteady interaction of a viscous fluid with an elastic plate. J Math Fluid Mech, 2005, 7: 368–404
27 Chemetov N V, Nečasová Š. The motion of the rigid body in the viscous fluid including collisions. Global solvability result. Nonlinear Anal Real World Appl, 2017, 34: 416–445
28 Cheng C H A, Coutand D, Shkoller S. Navier-Stokes equations interacting with a nonlinear elastic biofluid shell. SIAM J Math Anal, 2007, 39: 742–800
29 Cheng C H A, Shkoller S. The interaction of the 3D Navier-Stokes equations with a moving nonlinear Koiter elastic shell. SIAM J Math Anal, 2010, 42: 1094–1155
30 Codina R, Houzeaux G, Coppola-Owen H, et al. The fixed-mesh ALE approach for the numerical approximation of flows in moving domains. J Comput Phys, 2009, 228: 1591–1611
31 Conca C, San Martín H J, Tucsnak M. Motion of a rigid body in a viscous fluid. C R Acad Sci Paris Sér I Math, 1999, 328: 473–478
32 Court S. Existence of 3D strong solutions for a system modeling a deformable solid inside a viscous incompressible fluid. J Dynam Differential Equations, 2017, 29: 737–782
33 Coutand D, Shkoller S. Motion of an elastic solid inside an incompressible viscous fluid. Arch Ration Mech Anal, 2005, 176: 25–102
34 Coutand D, Shkoller S. The interaction between quasilinear elastodynamics and the Navier-Stokes equations. Arch Ration Mech Anal, 2006, 179: 303–352
35 Coutand D, Shkoller S. Well-posedness of the free-surface incompressible Euler equations with or without surface

tension. J Amer Math Soc, 2007, 20: 829–930
36 Ćurković A, Marušić-Paloka E. Existence and uniqueness of solution for fluid-plate interaction problem. Appl Anal, 2016, 95: 715–730
37 Ćurković A, Marušić-Paloka E. Asymptotic analysis of a thin fluid layer-elastic plate interaction problem. Appl Anal, 2019, 98: 2118–2143
38 Desjardins B, Esteban M J. Existence of weak solutions for the motion of rigid bodies in a viscous fluid. Arch Ration Mech Anal, 1999, 146: 59–71
39 Desjardins B, Esteban M J. On weak solutions for fluid-rigid structure interaction: Compressible and incompressible models. Comm Partial Differential Equations, 1999, 25: 263–285
40 Donea J, Giuliani S, Halleux J P. An arbitrary Lagrangian-Eulerian finite element method for transient dynamic fluid-structure interactions. Comput Methods Appl Mech Engrg, 1982, 33: 689–723
41 Du Q, Gunzburger M D, Hou L S, et al. Analysis of a linear fluid-structure interaction problem. Discrete Contin Dyn Syst, 2003, 9: 633–650
42 Ducomet B, Necasova S. On the motion of rigid bodies in a compressible viscous fluid under the action of gravitational forces. Discrete Contin Dyn Syst Ser S, 2013, 6: 1193–1213
43 Feireisl E. On the motion of rigid bodies in a viscous compressible fluid. Arch Ration Mech Anal, 2003, 167: 281–308
44 Feireisl E. On the motion of rigid bodies in a viscous incompressible fluid. J Evol Equ, 2003, 3: 419–441
45 Feireisl E, Jin B J, Novotný A. Relative entropies, suitable weak solutions, and weak-strong uniqueness for the compressible Navier-Stokes system. J Math Fluid Mech, 2012, 14: 717–730
46 Flori F, Orenga P. Fluid-structure interaction: Analysis of a 3-D compressible model. Ann Inst H Poincaré Anal Non Linéaire, 2000, 17: 753–777
47 Galdi G P. On the motion of a rigid body in a viscous liquid: A mathematical analysis with applications. In: Handbook of Mathematical Fluid Dynamics, Volume I. Amsterdam: Elsevier, 2002, 653, 655–791
48 Galdi G P. Mathematical problems in classical and non-Newtonian fluid mechanics. In: Hemodynamical Flows. Oberwolfach Seminars, vol. 37. Basel: Birkhäuser, 2008, 121–273
49 Galdi G P, Silvestre A. Existence of time-periodic solutions to the Navier-Stokes equations around a moving body. Pacific J Math, 2006, 223: 251–267
50 Georgiades F, Latalski J, Warminski J. Equations of motion of rotating composite beam with a nonconstant rotation speed and an arbitrary preset angle. Meccanica, 2014, 49: 1833–1858
51 Ghorashi M. Nonlinear analysis of the dynamics of articulated composite rotor blades. Nonlinear Dynam, 2012, 67: 227–249
52 Glass O, Sueur F. Uniqueness results for weak solutions of two-dimensional fluid-solid systems. Arch Ration Mech Anal, 2015, 218: 907–944
53 Grandmont C. Existence of weak solutions for the unsteady interaction of a viscous fluid with an elastic plate. SIAM J Math Anal, 2008, 40: 716–737
54 Grandmont C, Hillairet M. Existence of global strong solutions to a beam-fluid interaction system. Arch Ration Mech Anal, 2016, 220: 1283–1333
55 Grandmont C, Maday Y. Existence de solutions d'un problème de couplage fluide-structure bidimensionnel instationnaire. C R Acad Sci Paris Sér I Math, 1998, 326: 525–530
56 Grandmont C, Maday Y. Existence for an unsteady fluid-structure interaction problem. ESAIM Math Model Numer Anal, 2000, 34: 609–636
57 Guerrero S, Boulakia M. A regularity result for a solid-fluid system associated to the compressible Navier-Stokes equations. Ann Inst H Poincaré Anal Non Linéaire, 2009, 26: 777–813
58 Gunzburger M D, Lee H C, Seregin G A. Global existence of weak solutions for viscous incompressible flows around a moving rigid body in three dimensions. J Math Fluid Mech, 2000, 2: 219–266
59 Hao C, Luo T. A priori estimates for free boundary problem of incompressible inviscid magnetohydrodynamic flows. Arch Ration Mech Anal, 2014, 212: 805–847
60 Hasanov A, Itou H. A priori estimates for the general dynamic Euler-Bernoulli beam equation: Supported and cantilever beams. Appl Math Lett, 2019, 87: 141–146
61 Hegarty G, Taylor S. Classical solutions of nonlinear beam equations: Existence and stabilization. SIAM J Control Optim, 2012, 50: 703–719
62 Heil M. An efficient solver for the fully coupled solution of large-displacement fluid-structure interaction problems. Comput Methods Appl Mech Engrg, 2004, 193: 1–23

63 Hieber M, Murata M. The L^p-approach to the fluid-rigid body interaction problem for compressible fluids. Evol Equ Control Theory, 2017, 4: 69–87

64 Hillairet M, Lequeurre J, Grandmont C. Existence of local strong solutions to fluid-beam and fluid-rod interaction systems. Ann Inst H Poincaré Anal Non Linéaire, 2019, 36: 1105–1149

65 Hodges D H. A mixed variational formulation based on exact intrinsic equations for dynamics of moving beams. Int J Solids Struct, 1990, 26: 1253–1273

66 Hoffmann K H, Starovoitov V N. On a motion of a solid body in a viscous fluid. Two-dimensional case. Adv Math Sci Appl, 1999, 9: 633–648

67 Huang Y X, Qu H C. Principle and Structure of Aeroengine (in Chinese). Beijing: Aviation Industry Press, 2015 [黄燕晓, 瞿红春. 航空发动机原理与结构. 北京: 航空工业出版社, 2015]

68 Ignatova M, Kukavica I, Lasiecka I, et al. On well-posedness for a free boundary fluid-structure model. J Math Phys, 2012, 53: 115624

69 Ignatova M, Kukavica I, Lasiecka I, et al. On well-posedness and small data global existence for an interface damped free boundary fluid-structure model. Nonlinearity, 2014, 27: 467–499

70 Ignatova M, Kukavica I, Lasiecka I, et al. Small data global existence for a fluid-structure model. Nonlinearity, 2017, 30: 848–898

71 Jarrar F S M, Hamdan M N. Nonlinear vibrations and buckling of a flexible rotating beam: A prescribed torque approach. Mech Mach Theory, 2007, 42: 919–939

72 Ji S, Li Y. Time periodic solutions to the one-dimensional nonlinear wave equation. Arch Ration Mech Anal, 2011, 199: 435–451

73 Judakov N V. The solvability of the problem of the motion of a rigid body in a viscous incompressible fluid. Dinamika Splošn Sredy, 1974, 18: 249–253

74 Kaltenbacher B. Mathematical Theory of Evolutionary Fluid-Flow Structure Interactions. Cham: Birkhäuser/Springer, 2018

75 Kawashima S, Nishibata S, Zhu P. Asymptotic stability of the stationary solution to the compressible Navier-Stokes equations in the half space. Comm Math Phys, 2003, 240: 483–500

76 Kaya M O, Ozdemir Ozgumus O. Flexural-torsional-coupled vibration analysis of axially loaded closed-section composite Timoshenko beam by using DTM. J Sound Vib, 2007, 306: 495–506

77 Kreml O, Nečasová Š, Piasecki T. Weak-strong uniqueness for the compressible fluid-rigid body interaction. J Differential Equations, 2020, 268: 4756–4785

78 Kukavica I, Tuffaha A. Well-posedness for the compressible Navier-Stokes-Lamé system with a free interface. Nonlinearity, 2010, 25: 3111–3137

79 Kukavica I, Tuffaha A. Solutions to a fluid-structure interaction free boundary problem. Discrete Contin Dyn Syst, 2012, 32: 1355–1389

80 Kukavica I, Tuffaha A. Solutions to a free boundary problem of fluid-structure interaction. Indiana Univ Math J, 2012, 61: 1817–1859

81 Kukavica I, Tuffaha A, Ziane M. Strong solutions to a nonlinear fluid structure interaction system. J Differential Equations, 2009, 247: 1452–1478

82 Lacave C, Takahashi T. Small moving rigid body into a viscous incompressible fluid. Arch Ration Mech Anal, 2017, 223: 1307–1335

83 Langer U, Yang H. Partitioned solution algorithms for fluid-structure interaction problems with hyperelastic models. J Comput Appl Math, 2015, 276: 47–61

84 Lasiecka I, Triggiani R, Zhang J. The fluid-structure interaction model with both control and disturbance at the interface: A game theory problem via an abstract approach. Appl Anal, 2011, 90: 971–1009

85 Lee S Y, Sheu J J. Free vibrations of a rotating inclined beam. J Appl Mech, 2007, 74: 406–414

86 Leng W, Zhang C S, Sun P T, et al. Numerical simulation of an immersed rotating structure in fluid for hemodynamic applications. J Comput Sci, 2019, 30: 79–89

87 Lengeler D. Weak solutions for an incompressible, generalized Newtonian fluid interacting with a linearly elastic Koiter type shell. SIAM J Math Anal, 2014, 46: 2614–2649

88 Lengeler D, Ružička M. Weak solutions for an incompressible Newtonian fluid interacting with a Koiter type shell. Arch Ration Mech Anal, 2014, 211: 205–255

89 Lequeurre J. Existence of strong solutions to a fluid-structure system. SIAM J Math Anal, 2011, 43: 389–410

90 Lequeurre J. Existence of strong solutions for a system coupling the Navier-Stokes equations and a damped wave

equation. J Math Fluid Mech, 2013, 15: 249–271
91 Li J, Shen R Y, Hua H X, et al. Coupled bending and torsional vibration of axially loaded Bernoulli-Euler beams including warping effects. Appl Acoust, 2004, 65: 153–170
92 Librescu L, Oh S Y, Song O. Thin-walled beams made of functionally graded materials and operating in a high temperature environment: Vibration and stability. J Thermal Stresses, 2005, 28: 649–712
93 Librescu L, Song O. Thin-Walled Composite Beams: Theory and Application. Dordrecht: Springer, 2006
94 Lions J L. Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires. Paris: Dunod, 1969
95 Luo T, Xin Z P, Zeng H H. Well-posedness for the motion of physical vacuum of the three-dimensional compressible Euler equations with or without self-gravitation. Arch Ration Mech Anal, 2014, 213: 763–831
96 Maity D, Raymond J P, Roy A. Maximal-in-time existence and uniqueness of strong solution of a 3D fluid-structure interaction model. SIAM J Math Anal, 2020, 52: 6338–6378
97 Martin Saravia C, Machado S P, Cortínez V H. A geometrically exact nonlinear finite element for composite closed section thin-walled beams. Comput Struct, 2011, 89: 2337–2351
98 Mitra S. Local existence of strong solutions of a fluid-structure interaction model. J Math Fluid Mech, 2020, 22: 60–98
99 Muha B, Canić S. Existence of a weak solution to a nonlinear fluid-structure interaction problem modeling the flow of an incompressible, viscous fluid in a cylinder with deformable walls. Arch Ration Mech Anal, 2013, 207: 919–968
100 Muha B, Čanić S. Existence of a solution to a fluid-multi-layered-structure interaction problem. J Differential Equations, 2014, 256: 658–706
101 Muha B, Čanić S. Fluid-structure interaction between an incompressible, viscous 3D fluid and an elastic shell with nonlinear Koiter membrane energy. Interfaces Free Bound, 2015, 17: 465–495
102 Oh S Y, Song O, Librescu L. Effects of pretwist and presetting on coupled bending vibrations of rotating thin-walled composite beams. Int J Solids Struct, 2003, 40: 1203–1224
103 Peralta G, Kunisch K. Analysis of a nonlinear fluid-structure interaction model with mechanical dissipation and delay. Nonlinearity, 2019, 32: 5110–5149
104 Piovan M T, Machado S P. Thermoelastic dynamic stability of thin-walled beams with graded material properties. Thin-Walled Struct, 2011, 49: 437–447
105 Piovan M T, Sampaio R. A study on the dynamics of rotating beams with functionally graded properties. J Sound Vib, 2009, 327: 134–143
106 Qin Y Z, Guo Y X, Yao P F. Energy decay and global smooth solutions for a free boundary fluid-nonlinear elastic structure interface model with boundary dissipation. Discrete Contin Dyn Syst, 2020, 40: 1555–1593
107 Qin Y Z, Yao P F. Energy decay and global solutions for a damped free boundary fluid-elastic structure interface model with variable coefficients in elasticity. Appl Anal, 2020, 99: 1953–1971
108 Qin Z, Librescu L. On a shear-deformable theory of anisotropic thin-walled beams: Further contribution and validations. Compos Struct, 2002, 56: 345–358
109 Rabinowitz P H. Free vibrations for a semilinear wave equation. Comm Pure Appl Math, 1978, 31: 31–68
110 Raymond J P, Vanninathan M. A fluid-structure model coupling the Navier-Stokes equations and the Lamé system. J Math Pures Appl (9), 2014, 102: 546–596
111 San Martín J A, Starovoitov V, Tucsnak M. Global weak solutions for the two-dimensional motion of several rigid bodies in an incompressible viscous fluid. Arch Ration Mech Anal, 2002, 161: 113–147
112 Serre D. Chute libre d'un solide dans un fluide visqueux incompressible. existence. Jpn J Appl Math, 1987, 4: 99–110
113 Shen L, Wang S. Note on the global wellposedness of two-dimensional incompressible Navier-Stokes fluid structure interaction model. Appl Math Lett, 2023, 140: 108564
114 Shen L, Wang S, Feng Y H. Existence of global weak solutions for the high frequency and small displacement oscillation fluid-structure interaction systems. Math Methods Appl Sci, 2021, 44: 3249–3259
115 Shen L, Wang S, Yang R. Existence of local strong solutions for the incompressible viscous and non-resistive MHD-structure interaction model. J Differential Equations, 2021, 272: 473–543
116 Shi W, Yang X G, Shen L. Well-posedness for incompressible fluid-solid interaction with vorticity. Commun Nonlinear Sci Numer Simul, 2023, 119: 107113
117 Sina S A, Ashrafi M J, Haddadpour H, et al. Flexural-torsional vibrations of rotating tapered thin-walled composite beams. Proc Inst Mech Eng Part G J Aerosp Eng, 2011, 225: 387–402
118 Song O, Librescu L. Free vibration of anisotropic composite thin-walled beams of closed cross-section contour. J Sound Vib, 1993, 167: 129–147

119 Song O, Librescu L. Structural modeling and free vibration analysis of rotating composite thin-walled beams. J Am Helicopter Soc, 1997, 42: 358–369

120 Stein K, Tezduyar T, Benney R. Mesh moving techniques for fluid-structure interactions with large displacements. J Appl Mech, 2003, 70: 58–63

121 Stoykov S, Ribeiro P. Nonlinear forced vibrations and static deformations of 3D beams with rectangular cross section: The influence of warping, shear deformation and longitudinal displacements. Int J Mech Sci, 2010, 52: 1505–1521

122 Sun P T, Xu J C, Zhang L. Full Eulerian finite element method of a phase field model for fluid-structure interaction problem. Comput & Fluids, 2014, 90: 1–8

123 Sun P T, Zhang L, Liu C, et al. The central-upwind finite-volume method for atmospheric numerical modeling. Contemp Math, 2013, 586: 351–363

124 Trifunović S, Wang Y G. Existence of a weak solution to the fluid-structure interaction problem in 3D. J Differential Equations, 2020, 268: 1495–1531

125 Turhan Ö, Bulut G. Dynamic stability of rotating blades (beams) eccentrically clamped to a shaft with fluctuating speed. J Sound Vib, 2005, 280: 945–964

126 Turkalj G, Brnic J, Prpic-Orsic J. Large rotation analysis of elastic thin-walled beam-type structures using ESA approach. Comput Struct, 2003, 81: 1851–1864

127 Wang S, Sun R. Global well-posedness of the initial-boundary value problem on incompressible MHD-Boussinesq equations with nonlinear boundary conditions. Chinese Q J Math, 2023, 38: 290–310

128 Xin Z P, Yan W. On blowup of classical solutions to the compressible Navier-Stokes equations. Comm Math Phys, 2013, 321: 529–541

129 Xu L, Zhang P, Zhang Z F. Global solvability of a free boundary three-dimensional incompressible viscoelastic fluid system with surface tension. Arch Ration Mech Anal, 2013, 208: 753–803

130 Yang K, Sun P T, Wang L, et al. Modeling and simulations for fluid and rotating structure interactions. Comput Methods Appl Mech Engrg, 2016, 311: 788–814

131 Yang T, Zhu C J. Compressible Navier-Stokes equations with degenerate viscosity coefficient and vacuum. Comm Math Phys, 2002, 230: 329–363

132 Yao M H, Chen Y P, Zhang W. Nonlinear vibrations of blade with varying rotating speed. Nonlinear Dynam, 2012, 68: 487–504

133 Yao M H, Zhang W. Multipulse Shilnikov orbits and chaotic dynamics for nonlinear nonplanar motion of a cantilever beam. Internat J Bifur Chaos, 2014, 15: 3923–3952

134 Ye Z Y, Wang G, Zhang W W. Fundamentals and Applications of Fluid-Structure Coupling Mechanics, 2nd ed (in Chinese). Harbin: Harbin Inst Tech Press, 2016 [叶正寅, 王刚, 张伟伟. 流固耦合力学基础及其应用 (第 2 版). 哈尔滨: 哈尔滨工业大学出版社, 2016]

135 Younesian D, Esmailzadeh E. Non-linear vibration of variable speed rotating viscoelastic beams. Nonlinear Dynam, 2009, 60: 193–205

136 Younesian D, Esmailzadeh E, Sedaghati R. Existence of periodic solutions for the generalized form of Mathieu equation. Nonlinear Dynam, 2005, 39: 335–348

137 Yu W, Volovoi V V, Hodges D H, et al. Validation of the variational asymptotic beam sectional analysis. AIAA J, 2012, 40: 2105–2112

138 Zhang A M, Dai S S. Fluid-Structure Coupling Dynamics (in Chinese). Beijing: National Defense Industry Press, 2011 [张阿漫, 戴绍仕. 流固耦合动力学. 北京: 国防工业出版社, 2011]

139 Zhang P, Zhang Z F. On the free boundary problem of three-dimensional incompressible Euler equations. Comm Pure Appl Math, 2008, 61: 877–940

140 Zhang W. Chaotic motion and its control for nonlinear nonplanar oscillations of a parametrically excited cantilever beam. Chaos Solitons Fractals, 2005, 26: 731–745

141 Zhang W, Yao M H. Theories of multi-pulse global bifurcations for high-dimensional systems and application to cantilever beam. Internat J Modern Phys B, 2008, 22: 4089–4141

142 Zhang W, Yao M H, Zhang J H. Using the extended Melnikov method to study the multi-pulse global bifurcations and chaos of a cantilever beam. J Sound Vib, 2009, 319: 541–569

Modeling and mathematical theory on fluid structure interaction models in aircraft engines

Shu Wang, Lin Shen & Song Jiang

Abstract In this paper, we study some nonlinear fluid structure interaction (FSI) models in aircraft engines. Firstly, based on the existing nonlinear dynamic model of blade vibration of the rotating thin-walled beam, plate, or shell in vibration mechanics, and combined with the geometric structure of blade devices in aircraft engines and the practical application characteristics such as high-speed rotation and high pressure in the transonic flow field, the nonlinear FSI dynamic mathematical models of blade vibration in aircraft engines are proposed by Hamilton theory and reviewed. Then, some theoretical analysis results obtained recently on some FSI models of incompressible fluid are given.

Keywords aircraft engine, vibration of rotating blades, nonlinear fluid structure interaction models, moving interface

MSC(2020) 35Q30, 74F10, 76D03, 76D05, 35M10

doi: 10.1360/SSM-2024-0028