中国科学: 数学 2024 年 第 54 卷 第 10 期: 1489～1508
SCIENTIA SINICA Mathematica
综 述
《中国科学》杂志社 SCIENCE CHINA PRESS

Finsler 几何中的体积比较定理

献给沈一兵教授 85 寿辰

程新跃*, 冯娅璐

重庆师范大学数学科学学院, 重庆 401331
E-mail: chengxy@cqnu.edu.cn, 2022010510005@stu.cqnu.edu.cn

收稿日期: 2022-12-21; 接受日期: 2023-04-16; 网络出版日期: 2023-11-13; * 通信作者
国家自然科学基金 (批准号: 11871126 和 12141101) 资助项目

摘要 本文着重介绍关于 Finsler 几何中的体积比较定理及其应用的重要研究进展. 首先, 介绍 Finsler 几何中关于距离函数的 Laplace 比较定理. 然后, 分别在 Ricci 曲率 Ric、加权 Ricci 曲率 Ric_N 和 Ric_∞ 有界的条件下介绍 Finsler 流形上的体积比较定理及其相关的重要应用. 本文的主要结果既有对 Riemann 几何中的体积比较定理的自然推广, 又有在 Finsler 几何中的创新发展, 对推进 Finsler 流形上的整体几何与分析的研究有着极为重要的价值.

关键词 Finsler 流形 体积比较定理 Ricci 曲率 加权 Ricci 曲率 距离函数

MSC (2020) 主题分类 53C60, 53B40

1 引言

提到比较定理, 人们自然会想到 Cheeger 和 Ebin [6] 在 1975 年出版的名著 *Comparison Theorems in Riemannian Geometry*. 他们在文献 [6] 中证明了 Rauch 比较定理, 同时, 作为第一 Rauch 比较定理的强有力的整体推广, 他们还证明了 Toponogov 定理. 作为上述比较定理的应用, Cheeger 和 Ebin 证明了关于完备 Riemann 流形的 Cartan-Hadamard 定理, 研究了闭测地线、球面定理及非负 (正) 曲率的完备流形等相关的重要问题. 他们在文献 [6] 的序言中写的第一句话也许很好地表明了研究比较定理的重要意义, 即 "通过发展将一个一般流形的几何与一个具有常数曲率 H 的单连通模型空间 M_H 的几何作比较的技巧来研究完备 Riemann 流形". 另外, 1964 年, Bishop 和 Crittenden [4] 出版了 *Geometry of Manifolds*. 该书在推广 Bonnet-Myers 定理的工作中, 在 Ricci 曲率有下界的条件下, 利用并发展了体积比较技巧. 1981 年, Gromov 等 [11] 在 Ricci 曲率条件下研究 Riemann 流形的几何与拓扑性质的工作中, 沿着 Bishop 的思路, 进一步发展了体积比较技巧, 从而形成了 Bishop-Gromov 体积比较. 这一类体积比较定理在研究 Riemann 几何中的 Gromov 预紧性定理、测地球的体积增长、郑

英文引用格式: Cheng X Y, Feng Y L. Volume comparison theorems in Finsler geometry (in Chinese). Sci Sin Math, 2024, 54: 1489–1508, doi: 10.1360/SSM-2022-0249

绍远最大直径定理、基本群及 Milnor 猜测等重要工作中扮演了极为重要的角色, 对促进 Riemann 流形上的整体微分几何的发展发挥了极为重要的作用.

Riemann-Finsler 几何 (简称 Finsler 几何) 是 Riemann 几何的自然拓广, 是 "没有二次型限制的 Riemann 几何" (参见文献 [8]). 因此, 研究和发展 Finsler 几何中的比较定理及相关理论对推进关于 Finsler 流形上的整体几何与分析的研究有着极为重要的意义和深刻的影响. 2000 年, Bao 等[3] 证明了 Finsler 几何中的 Rauch 第一比较定理, 作为应用, 他们刻画了旗曲率有上 (下) 界的 Finsler 流形上的 Jacobi 场的增长. 近年来, 人们又围绕 Finsler 几何中的体积比较定理及相关问题开展了一系列深入的研究, 取得了一系列非常丰富且深刻的研究成果, 为整体 Finsler 几何的发展提供了有力的支撑, 很好地展现了 Finsler 流形上的几何、分析与拓扑发展的风采. 需要特别指出的是, 在这一发展历程中, 沈一兵教授和他的学生夏巧玲、吴炳烨和赵唯等为发展 Finsler 体积比较理论作出了非常重要的贡献, 本文将在随后的介绍中逐一展现他们的工作.

本文着重介绍近年来围绕 Finsler 几何中的体积比较定理及相关的重要问题开展的研究所取得的重要进展, 以期对进一步深化关于这个方向的研究、推进整体 Finsler 几何的发展产生积极的影响. 本文余下内容的结构如下: 第 2 节介绍若干必要的基本概念、基本性质和记号. 第 3 节着重介绍关于 Finsler 距离函数的 Laplace 比较定理, 它们既是 Finsler 流形上的比较定理的重要组成部分, 又为后面的若干重要的体积比较定理及其应用提供保障. 第 4–6 节分别在 Ricci 曲率 Ric、加权 Ricci 曲率 Ric_N 和 Ric_∞ 有界的条件下介绍相应的体积比较定理及其重要的应用成果.

2 预备知识

设 $F=F(x,y)$ 是 n 维光滑流形 M 上的一个 Finsler 度量, 其中 $(x,y)\in TM$. Finsler 流形 (M,F) 的测地线由以下微分方程组确定:

$$\frac{d^2x^i}{dt^2}+2G^i\left(x(t),\frac{dx}{dt}\right)=0,$$

其中, G^i 表示 F 的测地系数, 其定义为

$$G^i:=\frac{1}{4}g^{il}\{[F^2]_{x^ky^l}y^k-[F^2]_{x^l}\}.$$

当 F 为 Riemann 度量时, $G^i=\frac{1}{2}\Gamma^i_{jk}(x)y^jy^k$, 其中 $\Gamma^i_{jk}(x)$ 表示 Riemann 度量的 Christoffel 记号.

对于任意的 $x\in M$ 和 $y\in T_xM\backslash\{0\}$, Finsler 流形 (M,F) 的 Riemann 曲率 $\boldsymbol{R}_y:=R^i{}_k\frac{\partial}{\partial x^i}\otimes dx^k$ 由下式定义:

$$R^i{}_k:=2\frac{\partial G^i}{\partial x^k}-\frac{\partial^2G^i}{\partial x^m\partial y^k}y^m+2G^m\frac{\partial^2G^i}{\partial y^m\partial y^k}-\frac{\partial G^i}{\partial y^m}\frac{\partial G^m}{\partial y^k}. \tag{2.1}$$

Riemann 曲率自然地来自于测地线的第二变分 (参见文献 [9]). 进一步地, F 的 Ricci 曲率定义为 Riemann 曲率的迹, 即

$$\mathrm{Ric}(x,y):=R^m{}_m(x,y),\quad y\in T_xM. \tag{2.2}$$

设 f 是 M 上的一个 C^2 函数, 则 f 的 Hessian 可定义为一个映射 $\mathrm{Hess}f:TM\to\mathbb{R}$, 定义如下:

$$\mathrm{Hess}f(y):=\frac{d^2}{ds^2}(f\circ c)\bigg|_{s=0},\quad y\in T_xM, \tag{2.3}$$

其中 $c:(-\varepsilon,\varepsilon)\to M$ 表示满足 $c(0)=x$ 和 $\dot{c}(0)=y\in T_xM$ 的测地线. 易见, 在局部坐标系下,

$$\mathrm{Hess}f(y)=\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^i\partial x^j}(x)-\frac{\partial f}{\partial x^m}\Gamma^m_{ij}(x,y)\right)y^iy^j, \tag{2.4}$$

其中, $\Gamma^k_{ij}(x,y)$ 表示 F 的 Chern 联络系数, 它通常要依赖于切向量 $y\in T_xM$ (参见文献 [23]).

记 Finsler 流形 (M,F) 的 Busemann-Hausdorff 体积形式为 $dm_{BH}=\sigma_{BH}(x)dx^1\wedge\cdots\wedge dx^n$, 其中体积系数 $\sigma_{BH}(x)$ 定义为 (参见文献 [9])

$$\sigma_{BH}(x):=\frac{\mathrm{Vol}(\boldsymbol{B}^n(1))}{\mathrm{Vol}\{(y^i)\in\mathbb{R}^n\mid F(x,y)<1\}},$$

这里, $\mathrm{Vol}(\cdot)$ 表示 Euclid 空间中区域的 Euclid 体积, $\mathrm{Vol}(\boldsymbol{B}^n(1))$ 表示 Euclid 空间中单位球体的体积. 当 $F(x,y)=\sqrt{a_{ij}(x)y^iy^j}$ 为 Riemann 度量时, $\sigma_{BH}(x)=\sqrt{\det(a_{ij}(x))}$, 从而 Riemann 度量的 Busemann-Hausdorff 体积形式正是标准的 Riemann 体积形式. 设 (M,F,m) 是一个具有一般体积形式 $dm=\sigma(x)dx^1\wedge\cdots\wedge dx^n$ 的可测的 Finsler 流形. 一般地, dm 可由 Busemann-Hausdorff 体积形式表示为

$$dm=\phi(x)dm_{BH}, \tag{2.5}$$

其中 $\phi=\phi(x)$ 是 M 上的一个正函数. 对于每一个切向量 $y\in T_xM\setminus\{0\}$, 几何量

$$\tau(x,y):=\ln\frac{\sqrt{\det(g_{ij}(x,y))}}{\sigma(x)} \tag{2.6}$$

称为 F 的畸变 (distortion). 进一步地, 令 $c=c(t)$ 是满足 $c(0)=x$ 和 $\dot{c}(0)=y$ 的测地线, 则 F 的 S-曲率 $\boldsymbol{S}$ 和它沿测地线 c 的变化率 $\dot{\boldsymbol{S}}$ 分别定义为

$$\boldsymbol{S}(x,y):=\frac{d}{dt}[\tau(c(t),\dot{c}(t))]\Big|_{t=0},\quad \dot{\boldsymbol{S}}(x,y):=\frac{d}{dt}[\boldsymbol{S}(c(t),\dot{c}(t))]\Big|_{t=0}. \tag{2.7}$$

事实上,

$$\boldsymbol{S}=\tau_{|m}(x,y)y^m,\quad \dot{\boldsymbol{S}}=\boldsymbol{S}_{|m}(x,y)y^m,$$

其中 “$|$” 表示关于 F 的 Chern 联络的水平协变导数.

也可从另一角度来理解 S- 曲率 $\boldsymbol{S}$ 和 $\dot{\boldsymbol{S}}$. 设 Y 是一个开子集 $U\subset M$ 上的 C^∞ 测地场, 即 Y 是 U 上满足 $D^Y_YY=0$ 的非零向量场 (其中 D 表示 Finsler 流形 (M,F) 上的 Chern 联络) (参见文献 [22]), 且令 $\hat{g}=g_Y$ 为由 Y 诱导的加权 Riemann 度量. 记

$$dm:=\mathrm{e}^{-\psi}dm_{\hat{g}},\quad dm_{\hat{g}}:=\sqrt{\det(g_{ij}(x,Y_x))}dx^1\wedge\cdots\wedge dx^n, \tag{2.8}$$

其中, $dm_{\hat{g}}$ 表示加权 Riemann 度量 $\hat{g}$ 的标准 Riemann 体积形式. 容易看出 ψ 由下式给出:

$$\psi(x)=\ln\frac{\sqrt{\det(g_{ij}(x,Y_x))}}{\sigma(x)}=\tau(x,Y_x).$$

显然, 它正是在点 $x\in M$ 处沿 Y_x 的畸变 (参见文献 [9]). 令 $y:=Y_x\in T_xM$ (即 Y 是 $y\in T_xM$ 的一个测地延拓). 根据 S- 曲率的定义及 (2.4), 有 (参见文献 [22,23])

$$\boldsymbol{S}(x,y)=Y[\tau(x,Y)]|_x=d\psi(y), \tag{2.9}$$

$$\dot{\boldsymbol{S}}(x,y)=Y[\boldsymbol{S}(x,Y)]|_x=y[Y(\psi)]=\mathrm{Hess}\psi(y). \tag{2.10}$$

在 Riemann 几何中, 一个 n 维完备 Riemann 度量空间 $(M,g,\mathrm{e}^{-f}dm_g)$ 上的 ∞-Bakry-Émery Ricci 曲率张量定义为

$$\mathrm{Ric}_\infty=\mathrm{Ric}+\mathrm{Hess}f, \tag{2.11}$$

其中, f 是 M 上的一个光滑实函数, dm_g 是 g 的标准 Riemann 体积形式. 方程 $\mathrm{Ric}_\infty=\lambda g$ 正是在 Ricci 流理论中扮演着重要角色的梯度 Ricci 孤立子方程. 更一般地, 对于 $N\in\mathbb{R}\backslash\{n\}$, 关于体积测度 $dm=\mathrm{e}^{-f}dm_g$ 的 N- 加权 Ricci 曲率张量定义为

$$\mathrm{Ric}_N=\mathrm{Ric}+\mathrm{Hess}f-\frac{df\otimes df}{N-n}. \tag{2.12}$$

不像 Riemann 几何中的情形, Finsler 流形上不存在所谓的标准体积形式. 因此, 选择一个测地场 Y, 并以 Y 所诱导的加权 Riemann 度量的体积形式为参照体积形式是自然的. 由此, Finsler 几何中的加权 Ricci 曲率作为 Ricci 曲率与 S- 曲率的结合体可被定义出来. 具体地, 设 (M,F,m) 是一个具有体积形式 $dm=\sigma(x)dx^1\wedge\cdots\wedge dx^n$ 的 n 维可测的 Finsler 流形, Y 是开子集 $U\subset M$ 上的一个光滑的测地场. 令 $\hat{g}=g_Y$. 如上所述, 可记 $dm=\mathrm{e}^{-\psi}dm_{\hat{g}}$. 再记 $y=Y_x\in T_xM$. 则对于 $N\in\mathbb{R}\backslash\{n\}$, 定义 Finsler 几何中的 N- 加权 Ricci 曲率为 (参见文献 [7])

$$\mathrm{Ric}_N(y):=\mathrm{Ric}(y)+\mathrm{Hess}\psi(y)-\frac{d\psi(y)^2}{N-n}. \tag{2.13}$$

当 $N\to\infty$ 时, 作为极限, 定义 Finsler 几何中的 ∞- 加权 Ricci 曲率为

$$\mathrm{Ric}_\infty(y):=\mathrm{Ric}(y)+\mathrm{Hess}\psi(y). \tag{2.14}$$

由 (2.9) 和 (2.10) 可知, (2.13) 和 (2.14) 正是日本几何学家 Ohta [15] 定义的加权 Ricci 曲率

$$\mathrm{Ric}_N(y)=\mathrm{Ric}(y)+\dot{\boldsymbol{S}}-\frac{1}{N-n}\boldsymbol{S}^2, \tag{2.15}$$

$$\mathrm{Ric}_\infty(y)=\mathrm{Ric}(y)+\dot{\boldsymbol{S}}. \tag{2.16}$$

事实上, Finsler 几何中的加权 Ricci 曲率由 Ohta [15] 在 2009 年首次引入, 并已在研究 Finsler 流形上的整体几何与分析的工作中扮演了十分重要的角色. 通常, 用 $\mathrm{Ric}_N\geqslant K$ (或 $\mathrm{Ric}_\infty\geqslant K$) 表示对于任意的 $x\in M$ 和 $y\in T_xM$, 总有 $\mathrm{Ric}_N(y)\geqslant KF^2(x,y)$ (或 $\mathrm{Ric}_\infty(y)\geqslant KF^2(x,y)$), 其中 $K\in\mathbb{R}$.

给定一个具有体积形式 $dm=\sigma(x)dx^1\wedge\cdots\wedge dx^n$ 的 n 维可测的 Finsler 流形 (M,F,m), d_F 为 F 诱导的距离函数. 取点 $p\in M$, 令 $S_p(r)$ 和 $B_p(r)$ 分别表示以 p 点为中心、以 r 为半径的测地球面和测地球. 众所周知, 关于测度 m 的小测地球面及小测地球的体积为

$$m(S_p(r))=\phi(p)\omega_{n-1}r^{n-1}\{1+o(1)\}, \tag{2.17}$$

$$m(B_p(r))=\phi(p)\frac{\omega_{n-1}}{n}r^n\{1+o(1)\}, \tag{2.18}$$

其中, $\omega_{n-1}=\mathrm{Vol}(S^{n-1}(1))$ 表示 Euclid 空间中 $n-1$ 维单位球面的体积, $\phi=\phi(x)$ 由 (2.5) 确定 (参见文献 [23]). 令 Ω_p 表示点 p 处的割区域, 即由点 p 处的割迹 $\mathrm{Cut}(p)$ 所包围的开区域. 对于 $t>0$, $\tilde{S}_p(t):=S_p(t)\cap\Omega_p$ 是 M 的一个光滑超曲面. 自然地, 体积形式 dm 诱导了 $\tilde{S}_p(t)$ 上的一个体积形式 dA_t. 另一方面, 当将切空间 T_pM 视为一个流形时, 体积形式 $dm=\sigma(x)dx^1\wedge\cdots\wedge dx^n$ 自然地确定了 T_pM

上的一个体积形式 $dm_p=\sigma(p)dy^1\wedge\cdots dy^n$. 进一步地, dm_p 又诱导了 $S_pM:=\{y\in T_pM\mid F(p,y)=1\}$ 上的一个体积形式 dA_p. 定义 $\varphi_t:S_pM\to M$ 为

$$\varphi_t(y):=\exp_p(ty),\quad y\in S_pM. \tag{2.19}$$

再令 $S_p^rM:=\{y\in S_pM\mid i_y>r\}$, 其中 i_y 表示 y 的割值, 则 φ_t 诱导了 S_p^tM 到 $\tilde{S}_p(t)$ 的一个微分同胚, 从而可记

$$(\varphi_t)^*dA_t:=\eta_t(y)dA_p. \tag{2.20}$$

函数 $\eta_t(y)$ 对所有的 $0<t<i_y$ 都是正函数. 更重要的是, 距离函数 $\rho(x):=d_F(p,x)$ 在 $\Omega_p\setminus\{p\}$ 上是光滑的, 且距离函数 $\rho(x)$ 关于 F 和 dm 的 Laplace 可表示为

$$\Delta\rho|_{\varphi_t(y)}=\frac{d}{dt}[\ln\eta_t(y)]. \tag{2.21}$$

事实上, $\Delta\rho|_{\varphi_t(y)}$ 表示的恰好是 $\tilde{S}_p(t)$ 在点 $x=\exp_p(ty)$ 处的平均曲率 (参见文献 [23]). (2.21) 建立起了测地球 $S_p(r)$ 的体积与距离函数的 Laplace $\Delta\rho(x)$ 之间的联系 (参见文献 [23, 命题 14.3.1, (16.6)]), 在关于 $m(\tilde{S}_p(r))$ 及 $m(B_p(R))$ 的估计中扮演了一个重要角色. 此外, $\tilde{S}_p(r)$ 和 $B_p(R)\backslash B_p(r)$ 的体积可由关于 $\eta_r(y)$ 的如下积分表示 (参见文献 [23]):

$$\begin{aligned}
m(\tilde{S}_p(r))&=\int_{\tilde{S}_p(r)}dA_r=\int_{S_p^rM}\varphi_r^*dA_r=\int_{S_p^rM}\eta_r(y)dA_p,\\
m(B_p(R)\backslash B_p(r))&=\int_r^R m(\tilde{S}_p(t))dt=\int_r^R\int_{S^tM}\eta_t(y)dA_pdt.
\end{aligned}$$

3 距离函数的 Laplace 比较定理

对于任意的 $0\leqslant\rho_o<t_o\leqslant\infty$, 令 $\chi:(\rho_o,t_o)\to(0,\infty)$ 是一个光滑函数, 使得当 $\rho_o=0$ 时有 $\lim_{t\to0^+}\chi(t)=0$, 而当 $t_o<\infty$ 时有 $\lim_{t\to t_o^-}\chi(t)=0$. 典型的例子如 $\chi(t)=\sin^{n-1}(t)$ 或 $\chi(t)=t^{n-1}$. 定义

$$s_c(t):=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{c}}\sin(\sqrt{c}t), & c>0,\\ t, & c=0,\\ \dfrac{1}{\sqrt{-c}}\sinh(\sqrt{-c}t), & c<0.\end{cases} \tag{3.1}$$

注意到 $s_c(t)$ 事实上是下列微分方程的解:

$$f''+cf=0,\quad f(0)=0,\quad f'(0)=1.$$

进一步地, 定义

$$ct_c(t):=\frac{s_c'(t)}{s_c(t)}=\begin{cases}\sqrt{c}\cdot\operatorname{cotan}(\sqrt{c}t), & c>0,\\ \dfrac{1}{t}, & c=0,\\ \sqrt{-c}\cdot\operatorname{cotanh}(\sqrt{-c}t), & c<0.\end{cases} \tag{3.2}$$

为推导出所需要的 Finsler 流形上的关于距离函数的 Laplace 比较定理, 首先介绍几个相关的 Riemann 几何中的比较定理. 给定一个 n 维完备 Riemann 度量空间 $(M,g,dm=\mathrm{e}^{-f}dm_g)$, 令 Δ 表示

关于 (g, dm_g) 的 Laplace 算子, 而 Δ_f 表示关于 $(g, dm = \mathrm{e}^{-f} dm_g)$ 的 Laplace 算子, 即对于 M 上的任意一个光滑函数 u, 有 (参见文献 [25])

$$\Delta_f u = \mathrm{div}_{dm}(\nabla u) = \Delta u - df(\nabla u).$$

任意取定一点 $p \in M$, 令 $\rho(x) := d(p, x)$ 是从点 p 出发的距离函数. 显然, 对于任意的单位切向量 $y \in T_pM$, $c_y(t) = \exp_p(ty)$ 是 $[0, i_y]$ 上的一条极小测地线. 注意 $c'_y(t) = \nabla\rho_{c_y(t)}$.

2021 年, 沈忠民在一定的 Ricci 曲率下界的条件下得到了以下结果.

引理3.1 [24] 设 $(M, g, dm = \mathrm{e}^{-f} dm_g)$ 是一个完备 Riemann 流形, $p \in M$. 对于任意的一点 $x \in M$, 距离函数定义为 $\rho(x) := d_F(p, x)$. 假若 Ricci 曲率满足

$$\mathrm{Ric}(x, \nabla\rho_x) \geqslant (n-1)c, \quad df(\nabla\rho_x) \geqslant -\delta,$$

则

$$\Delta_f \rho(x) \leqslant \frac{d}{dt}[\ln \chi(t)]\bigg|_{t=\rho(x)},$$

其中, $\chi(t) = s_c(t)^{n-1}\mathrm{e}^{\delta t}$, $0 < t < d_p$ 且 $d_p := \sup_{x \in M} d(p, x)$.

另外, Wei 和 Wylie [25] 在加权 Ricci 曲率条件下得到了如下的距离函数的 Laplace 比较定理.

引理3.2 [25] 设 $(M, g, dm = \mathrm{e}^{-f} dm_g)$ 是一个完备 Riemann 流形, $p \in M$. 对于任意的一点 $x \in M$, 距离函数为 $\rho(x) := d_F(p, x)$. 假若加权 Ricci 曲率满足

$$\mathrm{Ric}_f^\infty(x, \nabla\rho_x) \geqslant (n-1)K, \tag{3.3}$$

则在 $\rho(x) > \rho_o$ 的条件下, 有

$$\Delta_f \rho \leqslant \frac{d}{dt}[\ln \chi(t)]\bigg|_{t=\rho(x)}, \tag{3.4}$$

其中, $\chi(t) = \mathrm{e}^{m_o(t-\rho_o) - \frac{1}{2}(n-1)K(t-\rho_o)^2}$, $\rho_o < t < \infty$ 且 $m_o := \sup_{\rho(x)=\rho_o} \Delta_f \rho(x)$.

在文献 [25] 中, $\Delta_f \rho|_{c_y(t)} := m_f(t)$ 称为测地球面 $S_p(t)$ 在点 $c_y(t)$ 处的平均曲率, 且 (3.3) 中的加权 Ricci 曲率 $\mathrm{Ric}_f^\infty(x, \nabla\rho_x)$ 由 Riemann 流形 $(M, g, \mathrm{e}^{-f} dm_g)$ 上的 ∞-Bakry-Émery Ricci 曲率张量 (参见 (2.11)) 定义为

$$\mathrm{Ric}_f^\infty(x, \nabla\rho_x) := \mathrm{Ric}_\infty(\nabla\rho_x, \nabla\rho_x). \tag{3.5}$$

进一步地, 他们证明了以下的 Laplace 比较定理.

引理3.3 [25] 设 $(M, g, dm = \mathrm{e}^{-f} dm_g)$ 是一个完备 Riemann 流形, $p \in M$. 对于任意的一点 $x \in M$, 距离函数定义为 $\rho(x) := d_F(p, x)$. 假若加权 Ricci 曲率满足

$$\mathrm{Ric}_f^\infty(x, \nabla\rho_x) \geqslant (n-1)c, \quad df_x(\nabla\rho_x) \geqslant -\delta,$$

则在 Ω_p 中, 有

$$\Delta_f \rho \leqslant \frac{d}{dt}[\ln \chi(t)]\bigg|_{t=\rho(x)},$$

其中, $\chi(t) = [s_c(t)]^{n-1}\mathrm{e}^{\delta t}$. 当 $c > 0$ 时, 上述估计在 $\rho(x) \leqslant \pi/(2\sqrt{c})$ 的范围内成立.

作为引理 3.2 和 3.3 的应用, Wei 和 Wylie [25] 得到了一个重要的体积比较定理 (参见定理 6.1). 与之不同的是, Qian [19] 在关于 N- 加权 Ricci 曲率的条件下, 得到了如下的 Laplace 比较定理.

引理3.4 [19] 设 $(M, g, dm = \mathrm{e}^{-f}dm_g)$ 是一个完备 Riemann 流形, $p \in M$. 对于任意的一点 $x \in M$, 距离函数定义为 $\rho(x) := d_F(p, x)$. 假若加权 Ricci 曲率满足

$$\mathrm{Ric}_f^N(x, \nabla\rho_x) \geqslant (N-1)K,$$

则在 Ω_p 上总有

$$\Delta_f\rho(x) \leqslant \frac{d}{dt}[\ln\chi(t)]\bigg|_{t=\rho(x)},$$

其中, $\chi(t) := [s_K(t)]^{N-1}$, $0 < t < r_o$. 当 $K > 0$ 时, $r_o = \pi/\sqrt{K}$.

需要指出的是, 在引理 3.4 中出现的加权 Ricci 曲率 $\mathrm{Ric}_f^N(x, \nabla\rho)$ 由 Riemann 流形 $(M, g, \mathrm{e}^{-f}dm_g)$ 上的 N- 加权 Ricci 曲率张量 (参见 (2.12)) 定义为

$$\mathrm{Ric}_f^N(x, \nabla\rho) := \mathrm{Ric}_N(\nabla\rho_x, \nabla\rho_x).$$

值得注意的是, 上述引理中关于 Ricci 曲率和加权 Ricci 曲率等几何量的条件只要求在距离函数的梯度向量 $\nabla\rho$ 的方向满足即可. 这为将这些 Riemann 几何中的比较定理推广到 Finsler 流形上提供了一条简洁的路径. 回顾具有体积形式 $dm = \sigma(x)dx^1\wedge\cdots\wedge dx^n$ 的 n 维可测的 Finsler 流形 (M, F, m). 令 $p \in M$, $\rho(x) = d_F(p, x)$ 是距离函数. 已知 $\nabla\rho$ 是 $\Omega_p = M\backslash\{\mathrm{Cut}(p)\}$ 上的一个测地场 (参见文献 [23]). 令 $\hat{g} := g_{\nabla\rho}$ 是由 $\nabla\rho$ 诱导的 Riemann 度量, 则可记 $dm = \mathrm{e}^{-f}dm_{\hat{g}}$, 其中 $f(x) = \tau(x, \nabla\rho_x)$ 是 (M, F, m) 沿方向 $\nabla\rho_x$ 的畸变. 易见, 函数 $\rho(x) = d_F(p, x)$ 也是 $\hat{g}$ 的距离函数, 且 $\nabla\rho = \hat{\nabla}\rho$ (参见文献 [23]). 这里及下文中, 均用带 $\hat{}$ 的记号表示关于 Riemann 流形 $(M, \hat{g}, dm = \mathrm{e}^{-f}dm_{\hat{g}})$ 的相关几何量. 利用测地场的性质容易证明: Finsler 流形 $(M, F, dm = \mathrm{e}^{-f}dm_{\hat{g}})$ 与 Riemann 流形 $(M, \hat{g}, dm = \mathrm{e}^{-f}dm_{\hat{g}})$ 的相应几何量之间有如下关系 (参见文献 [7, 23, 24]):

$$\mathrm{Ric}(x, \nabla\rho_x) = \widehat{\mathrm{Ric}}(x, \hat{\nabla}\rho_x), \quad \mathrm{Hess}f(\nabla\rho_x) = \widehat{\mathrm{Hess}}f(\hat{\nabla}\rho_x), \tag{3.6}$$

$$\boldsymbol{S}(x, \nabla\rho_x) = df_x(\hat{\nabla}\rho_x), \quad \dot{\boldsymbol{S}}(\nabla\rho) = \mathrm{Hess}(f)(\nabla\rho) = \widehat{\mathrm{Hess}}(f)(\hat{\nabla}\rho), \tag{3.7}$$

$$\Delta\rho = \hat{\Delta}_f\rho. \tag{3.8}$$

从而进一步可由 (2.13) 和 (2.14) 得到

$$\begin{aligned}\mathrm{Ric}_\infty(x, \nabla\rho_x) &= \mathrm{Ric}(x, \nabla\rho_x) + \mathrm{Hess}f(\nabla\rho_x)\\ &= \widehat{\mathrm{Ric}}(x, \hat{\nabla}\rho_x) + \widehat{\mathrm{Hess}}f(\hat{\nabla}\rho_x) = \widehat{\mathrm{Ric}}_f^\infty(x, \hat{\nabla}\rho_x),\end{aligned} \tag{3.9}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Ric}_N(x, \nabla\rho_x) &= \mathrm{Ric}(x, \nabla\rho_x) + \mathrm{Hess}f(\nabla\rho_x) - \frac{[df_x(\nabla\rho_x)]^2}{N-n}\\ &= \widehat{\mathrm{Ric}}(x, \hat{\nabla}\rho_x) + \widehat{\mathrm{Hess}}f(\hat{\nabla}\rho_x) - \frac{[df_x(\hat{\nabla}\rho_x)]^2}{N-n}\\ &= \widehat{\mathrm{Ric}}_f^N(x, \hat{\nabla}\rho_x).\end{aligned} \tag{3.10}$$

利用 (3.6)–(3.10), 很容易将前述 Riemann 几何中的几个 Laplace 比较定理推广到 Finsler 流形上. 首先, 由引理 3.1 不难得到关于距离函数的以下结果.

定理3.5 [23, 24, 29] 令 (M, F, m) 是一个 n 维向前完备的 Finsler 度量测度空间. 对于任意取定的一个点 $p \in M$, 距离函数定义为 $\rho(x) := d_F(p, x)$. 假若 Ricci 曲率满足以下条件:

$$\mathrm{Ric}(x, \nabla\rho_x) \geqslant (n-1)c, \quad \boldsymbol{S}(x, \nabla\rho_x) \geqslant -\delta,$$

则 $\rho(x)$ 在 Ω_p 上满足

$$\Delta\rho \leqslant \frac{d}{dt}[\ln\chi(t)]\Big|_{t=\rho(x)}, \tag{3.11}$$

其中, $\chi(t)=s_c(t)^{n-1}\mathrm{e}^{\delta t}$, $0<t<d_p$ 且 $d_p:=\sup_{x\in M} d_F(p,x)$.

定理 3.5 首先由 Shen[23] 证明. 之后, Wu 和 Xin[29] 用不同的方法也得到了类似结果.

其次, 由引理 3.2, 有如下定理.

定理3.6 [24, 25, 32] 令 (M,F,m) 是一个 n 维向前完备的 Finsler 度量测度空间. 对于任意取定的一个点 $p\in M$, 距离函数定义为 $\rho(x):=d_F(p,x)$. 假若加权 Ricci 曲率满足 $\mathrm{Ric}_\infty(x,\nabla\rho_x)\geqslant K$, 则距离函数 $\rho(x)$ 在 $\Omega_p\setminus B_p(\rho_0)$ 上满足

$$\Delta\rho \leqslant \frac{d}{dt}[\ln\chi(t)]\Big|_{t=\rho(x)}, \tag{3.12}$$

其中, $\chi(t)=\mathrm{e}^{m_o(t-\rho_o)-\frac{1}{2}K(t-\rho_o)^2}$, $\rho_o<t<\infty$, $m_o:=\sup_{x\in\rho^{-1}(\rho_o)}\Delta\rho(x)$.

定理 3.6 首先由 Yin[32] 得到. 下面, 进一步介绍两个重要的定理. 由引理 3.3 容易证明以下定理.

定理3.7 [24, 25, 32] 令 (M,F,m) 是一个 n 维向前完备的 Finsler 度量测度空间. 对于任意取定的一个点 $p\in M$, 距离函数定义为 $\rho(x):=d_F(p,x)$. 假若加权 Ricci 曲率满足 $\mathrm{Ric}_\infty(x,\nabla\rho_x)\geqslant (n-1)c$, 则下述结论成立.

(1) 如果 $\boldsymbol{S}(x,\nabla\rho_x)\geqslant -\delta$, 则在 $\Omega_p\cap B_p(r_o)$ 上, 距离函数 $\rho(x)$ 满足

$$\Delta\rho \leqslant \frac{d}{dt}[\ln\chi(t)]\Big|_{t=\rho(x)},$$

其中, $\chi(t)=[s_c(t)]^{n-1}\mathrm{e}^{\delta t}$, $0<t<r_o$. 这里, 当 $c\leqslant 0$ 时, $r_o=+\infty$; 而当 $c>0$ 时, $r_o=\frac{\pi}{2\sqrt{c}}$.

(2) 如果畸变 τ 满足 $|\tau(x,\nabla\rho_x)|\leqslant k$, 则在 $\Omega_p\cap B_p(r_o)$ 上有

$$\Delta\rho \leqslant \frac{d}{dt}[\ln\chi(t)]\Big|_{t=\rho(x)},$$

其中, $\chi(t):=[s_c(t)]^{n+4k-1}$, $0<t<r_o$. 这里, 当 $c\leqslant 0$ 时, $r_o=+\infty$; 而当 $c>0$ 时, $r_o=\pi/(4\sqrt{c})$.

当 Finsler 度量 F 是 Riemann 度量时, 定理 3.7 即为文献 [25, 定理 1.1]. 在 Finsler 几何情形, 该定理首先由 Yin[32] 得到. 最后, 由引理 3.4 不难得到以下定理.

定理3.8 [17, 24] 令 (M,F,m) 是一个 n 维向前完备的 Finsler 度量测度空间. 对于任意取定的一个点 $p\in M$, 距离函数定义为 $\rho(x):=d_F(p,x)$. 假若加权 Ricci 曲率满足 $\mathrm{Ric}_N(x,\nabla\rho_x)\geqslant (N-1)K$, 这里 $K\in\mathbb{R}$ 且 $N\in[n,\infty)$, 则距离函数 $\rho(x)$ 在 Ω_p 上满足

$$\Delta\rho(x) \leqslant \frac{d}{dt}[\ln\chi(t)]\Big|_{t=\rho(x)}, \tag{3.13}$$

其中, $\chi(t):=[s_K(t)]^{N-1}$, $0<t<r_o$. 这里, 当 $K>0$ 时, $r_o=\pi/\sqrt{K}$.

定理 3.8 首先由 Ohta 和 Sturm[17] 得到. 利用定理 3.7 和 3.8, 在 $\mathrm{Ric}_\infty\geqslant K>0$ 的条件下可证明向前完备的 Finsler 流形必然具有有限的体积 (参见定理 6.4).

4 Ricci 曲率 Ric 条件下的体积比较定理

1955 年, Auslander[1] 最早开始了与 Finsler 流形上的整体比较几何相关的研究. 他证明了如果一个 n 维完备的 Finsler 流形 (M,F) 满足 $\mathrm{Ric}\geqslant n-1$, 则直径 $\mathrm{Diam}(M)\leqslant\pi$. 特别地, 基本群 π_1 是有

限的. 这是一个 Bonnet-Myers 型定理. 进一步地, 他证明了如果一个完备 Finsler 流形 (M,F) 有非正旗曲率, 则指数映射 $\exp_x : T_xM \to M$ 是一个局部 C^1- 微分同胚. 当 F 是 Riemann 度量时, 这就是 Cartan-Hadamard 定理.

在 Riemann 几何中, Bishop-Gromov 体积比较定理在 Riemann 流形的整体微分几何中扮演了一个非常重要的角色. 它的一个应用是针对 $\mathfrak{C}(n,\lambda,d)$ 得到了关于 Gromov-Hausdorff 距离 d_{GH} 的 Gromov 预紧性定理 (precompactness theorem), 其中 $\mathfrak{C}(n,\lambda,d)$ 表示所有满足 $\mathrm{Ric} \geqslant (n-1)\lambda$ 且 $\mathrm{Diam}(M) \leqslant d$ 的 n 维 Riemann 流形 (M,g) 的集合. 对于 $\varepsilon > 0$ 和 $R \geqslant 1$, 令 $\mathfrak{C}_{\varepsilon,R}(n,\lambda,d)$ 表示 $\mathfrak{C}(n,\lambda,d)$ 的一个子类, 其由 $\mathfrak{C}(n,\lambda,d)$ 中满足任意 ε- 球 $B_x(\varepsilon)$ 都在 $B_x(R\varepsilon) \subset M$ 中可缩的 Riemann 流形 (M,g) 构成. 可以证明, 如果 $\mathfrak{C}_{\varepsilon,R}(n,\lambda,d)$ 中的两个流形 M_0 和 M_1 关于 d_{GH} 是充分接近的, 则它们必然同伦等价. 这个结果与 $\mathfrak{C}(n,\lambda,d)$ 的准紧性相结合, 即可得出 $\mathfrak{C}_{\varepsilon,R}(n,\lambda,d)$ 中只有有限多个同伦型的结论 (参见文献 [18]). 这是 Cheeger 的有限性定理及 Grove-Petersen 的有限性定理的一个推广版本.

在 Finsler 几何情形, Shen[20] 引进了一个新的、现在已被证明是极为重要的几何量—S- 曲率 $\boldsymbol{S}$ (最初称作平均变分 (mean covariant)) (参见 (2.7)), 建立了 Finsler 流形上的一个 Bishop-Gromov 型的体积比较定理, 并在此基础上得到了关于 Finsler 流形的预紧性定理和有限性定理. 具体地, 给定一个具有 Busemann-Hausdorff 体积形式 dm_{BH} 的 n 维 Finsler 度量测度空间 (M,F,m_{BH}). 对于常数 $\lambda \in \mathbb{R}$ 和 $\mu \geqslant 0$, 令

$$V_{\lambda,\mu}(r) := \mathrm{Vol}(S^{n-1}(1)) \int_0^r \mathrm{e}^{\mu t} s_\lambda(t)^{n-1} dt, \tag{4.1}$$

其中 $s_\lambda(t)$ 由 (3.1) 定义. 注意到当 $r \to 0^+$ 时, $V_{\lambda,\mu}(r) = \mathrm{Vol}(\boldsymbol{B}^n(r))(1+o(r))$, 可以证明: 当 $r \to 0^+$ 时, $m(B_p(r)) = \mathrm{Vol}(\boldsymbol{B}^n(r))(1+o(r))$ (参见文献 [20]). 于是,

$$\lim_{r\to 0^+} \frac{m(B_p(r))}{V_{\lambda,\mu}(r)} = 1.$$

我们约定 $|\boldsymbol{S}| \leqslant \mu$ 意指对于任意的 $x \in M$ 及 $y \in T_xM$, 总有 $|\boldsymbol{S}(x,y)| \leqslant \mu F(x,y)$. 利用 Busemann-Hausdorff 体积形式, Shen[20] 得到了 Finsler 流形上的下述 Bishop-Gromov 体积比较定理.

定理4.1[20]　令 (M,F,m_{BH}) 是一个具有 Busemann-Hausdorff 体积形式的 n 维完备 Finsler 度量测度空间, $p \in M$ 是任意取定的一点. 如果

$$\mathrm{Ric} \geqslant (n-1)\lambda, \quad |\boldsymbol{S}| \leqslant \mu, \tag{4.2}$$

则对于任意的 $0 < r < R$, 都有

$$\frac{m(B_p(R))}{V_{\lambda,\mu}(R)} \leqslant \frac{m(B_p(r))}{V_{\lambda,\mu}(r)}. \tag{4.3}$$

特别地,

$$m(B_p(r)) \leqslant V_{\lambda,\mu}(r).$$

给定 n、λ 和 μ $(\geqslant 0)$, 令 $\mathfrak{M}(n,\lambda,\mu)$ 表示所有满足 (4.2) 的 n 维带基点的 (pointed) 完备 Finsler 流形 (M,p,F) 的集合. 作为定理 4.1 的一个直接结果, 可证明以下的预紧性定理.

推论4.2[20]　$\mathfrak{M}(n,\lambda,\mu)$ 在带基点的 Gromov-Hausdorff 拓扑中是预紧的.

进一步地, 如果一个函数 $\rho : [0,r) \to [0,\infty)$ 满足: (i) $\rho(0) = 0$; (ii) $\rho(\varepsilon) \geqslant \varepsilon$; (iii) 当 $\varepsilon \to 0$ 时, $\rho(\varepsilon) \to 0$; (iv) ρ 是不减函数, 则称它是一个收缩函数. 给定一个收缩函数 ρ 和一个度量空间 X, 如果对于任意的 $\varepsilon \in [0,r)$ 和 $x \in X$, 球 $B_x(\varepsilon)$ 在 $B_x(\rho(\varepsilon))$ 中是可缩的, 则称 X 是 $\mathrm{LGC}(\rho)$ 空间. 对于一

个数 $r>0$, 如果对于任意的 $x\in X$ 和 $0<\varepsilon<r$, 每一个球 $B_x(\varepsilon)$ 在 $B_x(\varepsilon)$ 内都是可缩的, 即 X 对于 $\rho(\varepsilon)=\varepsilon:[0,r)\to[0,r)$ 是 LGC(ρ) 空间, 则称 X 有收缩半径 $c(X)\geqslant r$. 给定 n、λ、μ、ρ 和 d, 令 $\mathfrak{M}(n,\lambda,\mu,d,\rho)$ 表示满足

$$\mathrm{Ric}\geqslant(n-1)\lambda,\quad |\boldsymbol{S}|\leqslant\mu,\quad \mathrm{Diam}(M)\leqslant d$$

的 n 维紧致 LGC(ρ) Finsler 流形构成的集合, 则由定理 4.1 可以证明以下结论成立.

推论4.3 [20] $\mathfrak{M}(n,\lambda,\mu,d,\rho)$ 只包含有限多个同伦型.

Green [10] 曾证明: 如果一个 n 维闭 Riemann 流形的数量曲率满足 $\boldsymbol{r}\geqslant n(n-1)$, 则 M 的共轭半径满足 $\mathrm{ConjRad}(M)\leqslant\pi$, 等号成立的充分必要条件是 M 等距于标准单位球面 $S^n(1)$. 有例子表明, 存在完备非紧的具有正数量曲率的 Riemann 空间. 所以, 一个自然的问题是, Green 的定理是否在非紧情形仍然成立? 利用定理 4.1, Shen [21] 在完备的 Finsler 流形上研究了这个问题并证明了以下结果.

定理4.4 [21] 设 (M,F,m_{BH}) 是一个具有 Busemann-Hausdorff 体积形式且满足 $\boldsymbol{S}=0$ 的 n 维完备 Finsler 度量测度空间. 假若 F 的数量曲率满足 $\boldsymbol{r}\geqslant n(n-1)$, $\inf\mathrm{Ric}>-\infty$, 度量球的体积不按指数增长, 则 M 的共轭半径满足

$$\mathrm{ConjRad}(M)\leqslant\pi.$$

这里, 我们说度量球的体积按指数增长, 意指存在常数 $A>1$ 和 $C>0$, 使得

$$\frac{m(B_p(R))}{m(B_p(r))}\geqslant C\cdot A^{R-r},\quad \forall\, R\geqslant r>0.$$

需要说明的是, Finsler 几何中的数量曲率并没有一个统一的定义. 在定理 4.4 中, 在点 $x\in M$ 处的数量曲率 $\boldsymbol{r}(x)$ 定义如下:

$$\boldsymbol{r}(x):=\frac{n+2}{\mathrm{Vol}(\boldsymbol{B}^n(1))}\int_{B_x}\mathrm{Ric}(x,y)dm_x,$$

其中, $B_x:=\{y\in T_xM\mid F(x,y)<1\}$, $dm_x=\sigma_{\mathrm{BH}}(x)dy^1\wedge\cdots\wedge dy^n$ 是 T_xM 上由 Busemann-Hausdorff 体积形式 dm_{BH} 诱导的体积形式 (参见文献 [21]).

对于一个具有一般体积形式 dm 的 n 维 Finsler 度量测度空间 (M,F,m), Wu 和 Xin [29] 利用距离函数的 Laplace 比较定理得到了一个与定理 4.1 一致的结果.

定理4.5 [29] 令 (M,F,m) 是一个具有体积形式 dm 的 n 维完备 Finsler 度量测度空间, $p\in M$ 是任意取定的一点. 如果

$$\mathrm{Ric}\geqslant(n-1)\lambda,\quad |\boldsymbol{S}|\leqslant\mu,\tag{4.4}$$

则对于任意的 $0<r<R$, 有

$$\frac{m(B_p(R))}{V_{\lambda,\mu}(R)}\leqslant\frac{m(B_p(r))}{V_{\lambda,\mu}(r)}.\tag{4.5}$$

特别地, 当 $dm=dm_{\mathrm{BH}}$ 时,

$$m(B_p(r))\leqslant V_{\lambda,\mu}(r).$$

另外, 当 Ricci 曲率具有负上界时, 他们利用距离函数的 Laplace 比较定理得到了以下的体积比较定理.

定理4.6 [29] 令 (M,F,m) 是一个具有体积形式 dm 的 n 维完备单连通 Finsler 度量测度空间, $p\in M$ 是任意取定的一点. 如果 F 的旗曲率 $\boldsymbol{K}$ 小于等于 0, 且满足

$$\mathrm{Ric}\leqslant\lambda<0,\quad |\boldsymbol{S}|\leqslant\mu,\tag{4.6}$$

则函数 $\frac{m(B_p(r))}{V_{\lambda,-\mu,2}(r)}$ 是单调递增的. 特别地, 当 $dm=d_{\rm BH}$ 时,

$$m(B_p(r))\geqslant \frac{\mathrm{Vol}(\boldsymbol{B}^n(1))}{\mathrm{Vol}(\boldsymbol{B}^2(1))}V_{\lambda,-\mu,2}(r),$$

其中 $V_{\lambda,-\mu,2}(r):=\mathrm{Vol}(S^1(1))\int_0^r \mathrm{e}^{-\mu t}s_\lambda(t)dt$.

作为上述定理的应用, 他们将 Milnor 的关于紧致 Riemann 流形的基本群的增长定理推广到了紧致 Finsler 流形上 (参见文献 [29, 定理 8.2]).

2011 年, Wu [26] 引入了 Finsler 流形上的极值体积形式, 包括极大体积形式 $dV_{\max}$ 和极小体积形式 $dV_{\min}$. 具体定义为

$$dV_{\max}=\sigma_{\max}(x)dx^1\wedge\cdots\wedge dx^n,\quad dV_{\min}=\sigma_{\min}(x)dx^1\wedge\cdots\wedge dx^n,$$

其中,

$$\sigma_{\max}(x):=\max_{y\in T_xM\backslash\{0\}}\sqrt{\det(g_{ij}(x,y))},\quad \sigma_{\min}(x):=\min_{y\in T_xM\backslash\{0\}}\sqrt{\det(g_{ij}(x,y))}.$$

利用极值体积形式, Wu [26] 在去掉上述定理中关于 S- 曲率的条件之后, 得到了以下体积比较定理.

定理4.7 [26]　令 (M,F) 是一个 n 维完备 Finsler 流形, $p\in M$ 是任意取定的一点.

(1) 如果 M 是单连通的, F 的旗曲率满足 $\boldsymbol{K}\leqslant 0$ 且 Ricci 曲率满足 $\mathrm{Ric}\leqslant c<0$, 则对于任意的 $R\geqslant 1$, 都有

$$\mathrm{Vol}_{\max}(B_p(R))\geqslant \frac{m_{\tilde g}(B_p(1))}{\mathrm{Vol}(\mathbb{B}_c^2(1))}\mathrm{Vol}(\mathbb{B}_c^2(R)),$$

其中, $\tilde g:=g_{\nabla\rho}$ 表示由距离函数 ρ 的梯度向量场诱导的 Riemann 度量, $m_{\tilde g}(\cdot)$ 表示关于 $\tilde g$ 的 Riemann 体积.

(2) 如果 (M,F) 的 Ricci 曲率满足 $\mathrm{Ric}\geqslant(n-1)c$, 则

$$\mathrm{Vol}_{\min}(B_p(R))\leqslant \mu(p)^{\frac{n}{2}}\cdot\mathrm{Vol}(\mathbb{B}_c^n(R)),$$

其中, $\mathrm{Vol}_{\max}$ 和 $\mathrm{Vol}_{\min}$ 分别表示关于 $dV_{\max}$ 和 $dV_{\min}$ 的体积, $\mu(p)$ 表示 Finsler 流形在点 p 处的一致常数, 其定义为

$$\mu(p):=\max_{y,z,u\in T_pM\backslash\{0\}}\frac{\boldsymbol{g}_y(u,u)}{\boldsymbol{g}_z(u,u)}.$$

此外, $\mathrm{Vol}(\mathbb{B}_c^n(R))$ 表示具有常数截面曲率 c 的 n 维 Riemann 空间形式中半径为 R 的测地球的体积.

吴炳烨在后续的研究工作中, 利用极值体积形式得到了若干 Finsler 流形上的体积比较定理及相关的应用结果. 例如, 在 Finsler 流形的积分 Ricci 曲率有界的条件下, 他建立了一个关于 Finsler 流形的极小体积的相对体积比较定理, 证明了一个 Finsler 流形的准紧性定理, 刻画了 Finsler 流形的第一 Betti 数 (参见文献 [27]). 他也在一定的 Ricci 曲率条件下, 证明了任何一个具有有限一致常数的完备非紧 Finsler 流形的极值体积必然具有次数大于等于 1 的多项式增长 (参见文献 [28]).

Zhao 和 Shen [35] 研究了 Finsler 几何中体积测度对 Finsler 流形几何的影响. 设 (M,F) 是一个 n 维向前完备的 Finsler 流形, $p\in M$. 令 (x^i) 是 p 的某一个坐标邻域中的局部坐标, 则 Finsler 度量 F 在切空间 $T_pM\backslash\{0\}$ 上诱导了一个 Riemann 度量

$$g_p(y):=g_{ij}(p,y)dy^i\otimes dy^j,$$

其中 $y=y^i\frac{\partial}{\partial x^i}$. 令 $\dot{g}_p$ 和 $d\nu_p$ 分别表示 g_p 在 $S_pM=\{y\in T_pM \mid F(p,y)=1\}$ 上诱导的 Riemann 度量和 Riemann 体积形式, 则

$$d\nu_p(y)=\sqrt{\det(g_{ij}(p,y))}\bigg(\sum_{i=1}^n(-1)^{i-1}y^idy^1\wedge\cdots\wedge\widehat{dy^i}\wedge\cdots\wedge dy^n\bigg).$$

对于任意的一点 $x\in\Omega_p$, 可以选取中心在点 p 的测地极坐标 (r,θ), 使得 $r(x)=F(v)$ 且 $\theta^\alpha(x)=\theta^\alpha(\frac{v}{F(v)})$, 其中 $v=\exp_p^{-1}(x)\in T_p(M)\backslash\{0\}$. 由 Gauss 引理 (参见文献 [3, 引理 6.1.1]) 可知, 单位径向坐标向量 $\frac{\partial}{\partial r}$ 与坐标向量 $\frac{\partial}{\partial\theta^\alpha}$ $(1\leqslant\alpha\leqslant n-1)$ 关于 $g_{\frac{\partial}{\partial r}}$ 正交. 因此, 可以简单地记为 $d\nu_p=\sqrt{\det\dot{g}_p}d\Theta$, 其中 $d\Theta=d\theta^1\wedge\cdots\wedge d\theta^{n-1}$. 进一步地, 对于 M 上任意给定的一个体积形式 dm, 可以简单地记为 $dm|_{\exp_p(rv)}=\sigma(p,r,\theta)dr\wedge d\Theta$, 其中, $v\in S_pM$, θ 表示 v 在 S_pM 上的坐标, $x=\exp_p(rv)$. 则

$$\begin{aligned}dm|_{\exp_p(rv)}&=\bigg(\frac{\sigma(p,r,\theta)}{\sqrt{\det\dot{g}_p(v)}}\bigg)dr\wedge(\sqrt{\det\dot{g}_p(v)}d\Theta)\\&=\bigg(\frac{\sigma(p,r,\theta)}{\sqrt{\det\dot{g}_p(v)}}\bigg)dr\wedge d\nu_p(v)\\&=:\widehat{\sigma}(p,r,\theta)dr\wedge d\nu_p(v).\end{aligned}$$

下列引理对于文献 [35] 中的主要定理 (即下述的定理 4.9) 的证明极为重要.

引理4.8 [35] 给定一个具有体积形式 dm 的 n 维完备 Finsler 度量测度空间 (M,F,m), 则

$$\lim_{r\to0^+}\frac{\widehat{\sigma}(p,r,\theta)}{r^{n-1}}=\mathrm{e}^{-\tau(x,v)},$$

其中 $x=\exp_p(rv)$.

对于任意的 $v\in S_pM$, 令 $\gamma_v(t)$ 表示满足 $\gamma_v(0)=p$ 和 $\dot{\gamma}_v(0)=v$ 的单位速度测地线. 定义

$$\mathcal{V}_{p,\lambda,n}(r):=\bigg(\int_{S_pM}d\nu_p(v)\bigg)\cdot\bigg(\int_0^r\mathrm{e}^{-\tau(\gamma_v(t),\dot{\gamma}_v(t))}s_\lambda^{n-1}(t)dt\bigg).\tag{4.7}$$

注意到 $\mathcal{V}_{p,\lambda,n}(r)$ 比 (4.1) 中定义的 $V_{\lambda,\mu}(r)$ 更一般化. 进一步地, 令

$$\mathcal{F}(r,v)=\mathrm{e}^{\tau(\gamma_v(t),\dot{\gamma}_v(r))}\widehat{\sigma}(p,r,\theta).$$

Zhao 和 Shen [35] 建立了如下的 Finsler 流形上的万有体积比较定理.

定理4.9 [35] 令 (M,F,m) 是一个具有体积形式 dm 的 n 维向前完备 Finsler 度量测度空间. 如果 F 的 Ricci 曲率有下界, $\mathrm{Ric}\geqslant(n-1)\lambda$, 则以下函数关于 r 是单调递减的:

$$\mathcal{P}(r)=\frac{\mathcal{F}(r,v)}{s_\lambda^{n-1}(r)},$$

且当 $r\to0^+$ 时, $\mathcal{P}(r)$ 收敛于 1. 因此, 对于任意的 $r>0$, 都有

$$m(B_p(r))\leqslant\mathcal{V}_{p,\lambda,n}(r),$$

且存在 $r_0>0$, 使得等号成立当且仅当 F 的旗曲率对于任意的 $v\in S_pM$ 都满足

$$\boldsymbol{K}(\dot{\gamma}_v(t);\cdot)\equiv\lambda,\quad 0\leqslant t\leqslant r_0\leqslant\mathfrak{i}_p,$$

其中 $\mathfrak{i}_p$ 表示点 p 的单射半径.

不难验证, 在 Ricci 曲率有下界的条件下, 通常的 Bishop-Gromov 体积比较定理、定理 4.1 及文献 [26, 定理 5.4] 均可由定理 4.9 推导出来. 进一步地, 根据定理 4.9 和文献 [5,29] 中的讨论, 可得到下列相对体积比较定理.

(i) 假若 $\mathrm{Ric} \geqslant (n-1)\lambda$ 且 $\boldsymbol{S} \geqslant (n-1)h$, 则以下函数关于 r 是单调递减的:

$$\mathscr{P}_1(r) = \frac{m(B_p^+(r))}{\mathscr{V}_{p,\lambda,h,n}(r)},$$

且当 $r \to 0^+$ 时, $\mathscr{P}_1(r)$ 收敛于 1. 这里,

$$\mathscr{V}_{p,\lambda,h,n}(r) = \int_{S_pM} \mathrm{e}^{-\tau(p,v)} d\nu_p(v) \int_0^r (\mathrm{e}^{-ht} s_\lambda(t))^{n-1} dt.$$

(ii) 假若 $\mathrm{Ric} \geqslant (n-1)\lambda$ 且 $a \leqslant \tau \leqslant b$, 则对于任意的 $0 < r \leqslant R$, 都有

$$\frac{m(B_p^+(r))}{m(B_p^+(R))} \geqslant \mathrm{e}^{a-b} \frac{\int_0^r s_\lambda^{n-1}(t)dt}{\int_0^R s_\lambda^{n-1}(t)dt}.$$

作为上述讨论的进一步应用, Zhao 和 Shen [35] 给出了 Finsler 几何中的 Berger-Kazdan 不等式和 Santaló 公式, 并在此基础上, 推导出了 Finsler 流形上的 Berger-Kazdan 型比较定理和一个 Croke 型等周不等式.

5 加权 Ricci 曲率 $\mathrm{Ric_N}$ 条件下的体积比较定理

在流形的比较几何及几何分析中, 加权 Ricci 曲率扮演着非常关键的角色. 加权 Ricci 曲率 Ric_N 包含了一个实参数 N. 对于 $N \in [\dim M, +\infty]$, 如果 Ric_N 以一个实数 K 为下界, 则正如在 Ricci 曲率 $\geqslant K$ 且维数 $\leqslant N$ 的情形那样, 度量测度空间就会具有丰富多彩的性质. 最近的一个标志性成果是 $\mathrm{Ric}_N \geqslant K$ 等价于曲率 - 维数条件 $\mathrm{CD}(K,N)$ (参见文献 [15,16]).

给定一个具有体积形式 dm 的 n 维 Finsler 度量测度空间 (M,F,m), 分别用

$$B_x^+(r) := \{z \in M \mid d(x,z) < r\} \quad \text{和} \quad B_x^-(r) := \{z \in M \mid d(z,x) < r\}$$

表示中心在 $x \in M$、半径为 $r > 0$ 的向前和向后的开测地球. Ohta [15,16] 在加权 Ricci 曲率 $\mathrm{Ric_N}$ 有下界的条件下, 建立了如下的 Finsler 几何中的 Bishop-Gromov 体积比较.

定理5.1 [15,16] 令 (M,F,m) 是一个向前或向后完备的 Finsler 度量测度空间. 假若 $\mathrm{Ric}_N \geqslant K$, 其中 $K \in \mathbb{R}$, $N \in [n,\infty)$, 则对于任意的 $x \in M$ 和 $0 < r < R$, 都有

$$\max\left\{\frac{m(B_x^+(R))}{m(B_x^+(r))}, \frac{m(B_x^-(R))}{m(B_x^-(r))}\right\} \leqslant \frac{\int_0^R s_{K/(N-1)}(t)^{N-1}dt}{\int_0^r s_{K/(N-1)}(t)^{N-1}dt}.$$

当 $K > 0$ 时, $R \leqslant \pi\sqrt{(N-1)/K}$.

Finsler 几何中经典的 Bonnet-Myers 定理指出, 如果一个向前或向后完备的 Finsler 流形 (M,F) 满足 $\mathrm{Ric} \geqslant (n-1)K > 0$, 则 M 事实上是紧致的, 而且 $\mathrm{Diam}(M) \leqslant \frac{\pi}{\sqrt{K}}$ (参见文献 [3, 定理 7.7.1]). 作为定理 5.1 的一个推论, 在 $K > 0$ 的情形, 可得到 Bonnet-Myers 定理的一个加权版本.

推论5.2 [15, 16] 令 (M,F,m) 是一个向前或向后完备的 Finsler 度量测度空间. 假若 $\mathrm{Ric}_N \geqslant K$, 其中, $K>0$, $N\in[n,\infty)$, 则有

$$\mathrm{Diam}(M)\leqslant \pi\sqrt{\frac{N-1}{K}}.$$

特别地, M 是紧致的.

为证明 (p,q)-Sobolev 不等式, 进而推导出紧致 Finsler 流形上 Finsler Laplace 第一特征值的最优下界估计, 借助在第 4 节中定义的测地极坐标, Xia [30] 给出了一个体积比较定理, 即如下定理.

定理5.3 [30] 令 (M,F,m) 是一个向前完备的 Finsler 度量测度空间. 假若 $\mathrm{Ric}_N \geqslant K$, 其中, $N\in[n,\infty)$, $K\in\mathbb{R}$, 则沿任意一条从 $x\in B_x^+(R)$ 出发的极小测地线, 不等式

$$\frac{\sigma(x,r_2,\theta)}{\sigma(x,r_1,\theta)}\leqslant\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^{N-1}\mathrm{e}^{r_2\sqrt{(N-1)|K|}}$$

对于任意的 $0<r_1<r_2<R$ 都成立. 当 $K>0$ 时, 由 Bonnet-Myers 定理知 $R\leqslant\pi\sqrt{(N-1)/K}$. 进一步地, 对于任意的 $0<r_1<r_2<R$, 以下不等式成立:

$$\frac{m(B_x^+(r_2))}{m(B_x^+(r_1))}\leqslant\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^{N}\mathrm{e}^{r_2\sqrt{(N-1)|K|}}\leqslant\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^{N}\mathrm{e}^{R\sqrt{(N-1)|K|}}. \tag{5.1}$$

这里, (r,θ) 表示以 x 为中心的测地极坐标.

体积比较 (5.1) 意味着体积加倍性质 (doubling property), 即存在一个一致常数 D_0, 使得对于任意的 $x\in B_x^+(R)$ 和 $0<r<\frac{R}{2}$, 总有 $m(B_x^+(2r))\leqslant D_0 m(B_x^+(r))$.

基于定理 5.3 和同在文献 [30] 中得到的一个局部 1-Poincaré 不等式, Xia [30] 首先得到了以下不等式.

定理5.4 [30] 令 (M,F,m) 是一个 n 维紧致无边的 Finsler 流形. 假若 $\mathrm{Ric}_N\geqslant K$, 其中 $N\in[n,\infty)$, $K\in\mathbb{R}$, 且 $m_0:=m(M)>0$. 则对于任意的 $\nu=\nu(N)\geqslant N$ 和 $u\in W^{1,q}(M)$ $(1\leqslant q<\nu)$, 存在正常数 $c_i=c_i(\Lambda,N,K,m_0,d)$ $(i=4,5)$, 使得以下不等式成立:

$$\left(\int_M|u|^p dm\right)^{\frac{1}{p}}\leqslant c_4\left(\int_M|u|^q dm\right)^{\frac{1}{q}}+c_5\left(\int_M[F^*(du)]^q dm\right)^{\frac{1}{q}},$$

其中, d 是 M 的直径, 且 p 与 q 满足 $\frac{1}{p}=\frac{1}{q}-\frac{1}{\nu}$.

在此基础上, Xia [30] 在 $\mathrm{Ric}_N\geqslant K$ 的条件下进一步证明了紧致 Finsler 流形上两类优化的 (p,q)-Sobolev 不等式的存在性, 其中, $N\in[n,\infty)$, $K\in\mathbb{R}$. 特别地, 当 $K>0$ 时, 她在 $2\leqslant p\leqslant 2N/(N-2)$ 的情形下建立了最优的 $(p,2)$-Sobolev 不等式. 据此, 她进一步得到了 Finsler Laplace 第一特征值 λ_1 的最优下界估计, 并刻画了当 λ_1 达到最小值时流形的结构, 推广了著名的 Lichnerowicz-Obata 的结果 (参见文献 [30]).

经典的 Liouville 定理指出, 每一个 $\mathbb{R}^n$ 上的非负 (或有界) 的调和函数必然是常数. 自 20 世纪 70 年代以来, 关于完备 Riemann 流形上的上调和 (或次调和) 函数的各种 Liouville 定理得到了广泛的关注和研究, 这些 Liouville 定理又在研究流形的几何性质的工作中发挥了极为重要的作用. 一个自然的问题是, 如何将 Riemann 流形上的各种 Liouville 定理推广到 Finsler 几何中. Zhang 和 Xia [34] 研究了一个向前完备的 Finsler 度量测度空间 (M,F,m) 上的非负上调和或次调和函数的 Liouville 定理, 在 (M,F,m) 具有有限的可反数及关于函数的一定条件下, 证明了 (M,F,m) 上的每一个非负 L^p $(p>1)$ 次调和或 L^p $(-\infty<p<1)$ 上调和函数是一个常数. 之后, Xia [31] 在关于加权 Ricci 曲率 Ric_N 的一

定条件下, 证明了 (M,F,m) 上的每一个非负 L^p $(0<p\leqslant 1)$ 次调和函数一定是常数. 作为这项工作的重要基础, Xia [31] 首先建立了 Finsler 流形上的一个相对体积比较定理. 具体地, 令

$$\mathfrak{V}_{c,\zeta}(r):=\mathrm{Vol}(S^{n-1}(1))\int_0^r s_c(t)^{\zeta-1}dt.$$

再令

$$B^+_{R,R_1}(x):=B^+_x(R)\backslash B^+_x(R_1),\quad B^-_{R,R_1}(x):=B^-_x(R)\backslash B^-_x(R_1).$$

则可以证明下列的相对体积比较定理是成立的.

定理5.5 [31] 令 (M,F,m) 是一个 n 维向前 (或向后) 完备的 Finsler 度量测度空间. 假若 $\mathrm{Ric}_N\geqslant K$, 其中, $K\in\mathbb{R}$, $N\in[n,\infty)$, 则对于任意的 $x\in M$ 和 $0\leqslant r_1<r$ 及 $0\leqslant R_1<R$, 其中 $r_1\leqslant R_1$, $r\leqslant R$, 都有

$$\max\left\{\frac{m(B^+_{R,R_1}(x))}{m(B^+_{r,r_1}(x))},\frac{m(B^-_{R,R_1}(x))}{m(B^-_{r,r_1}(x))}\right\}\leqslant\frac{\mathfrak{V}_{K/(N-1),N}(R)-\mathfrak{V}_{K/(N-1),N}(R_1)}{\mathfrak{V}_{K/(N-1),N}(r)-\mathfrak{V}_{K/(N-1),N}(r_1)},$$

当 $K>0$ 时, $R\leqslant\pi\sqrt{(N-1)/K}$.

利用定理 5.3 和 5.5, Xia [31] 给出了使每一个非负的 L^p $(0<p<1)$ 次调和函数恒等于 0 的关于 Ric_N 的较弱的下界条件.

最近, Lu 等 [13] 定义了 Finsler 流形上测地线的 ϵ- 完备及相应的 ϵ- 范围 (range) 概念. 其中, 给定 $N\in(-\infty,1]\cup[n,+\infty]$, $\epsilon\in\mathbb{R}$ 的 ϵ- 范围定义为

$$\text{当 } N=1 \text{ 时},\quad \epsilon=0;\quad \text{当 } N\neq 1,n \text{ 时},\quad |\epsilon|<\sqrt{\frac{N-1}{N-n}};\quad \text{当 } N=n \text{ 时},\quad \epsilon\in\mathbb{R}.$$

他们也在 $N\neq 1$ 的条件下如下定义了伴随常数 $c=c(N,\epsilon)$:

$$c:=\frac{1}{n-1}\left(1-\epsilon^2\frac{N-n}{N-1}\right)>0.$$

之后, 他们建立了如下的具有 ϵ- 范围的 Bishop-Gromov 体积比较定理.

定理5.6 [14] 令 (M,F,m) 是一个 n 维向前完备的 Finsler 度量测度空间, $N\in(-\infty,1]\cup[n,+\infty]$. 设 $\epsilon\in\mathbb{R}$ 满足上述 ϵ- 范围, $K\in\mathbb{R}$ 且 $b\geqslant a>0$. 假若

$$\mathrm{Ric}_N(v)\geqslant KF^2(v)\mathrm{e}^{\frac{4(\epsilon-1)}{n-1}\psi(v)}$$

对所有的 $v\in TM\backslash\{0\}$ 都成立, 且

$$a\leqslant\mathrm{e}^{-\frac{2(\epsilon-1)}{n-1}\psi}\leqslant b,$$

其中 $\psi=\psi(v)$ 表示由 (2.8) 定义的畸变, 则对于任意的 $x\in M$ 和 $0<r<R$, 都有

$$\frac{m(B^+_x(R))}{m(B^+_x(r))}\leqslant\frac{b}{a}\frac{\int_0^{\min\{R/a,\pi/\sqrt{cK}\}}s_{cK}(t)^{1/c}\,dt}{\int_0^{r/b}s_{cK}(t)^{1/c}\,dt}.$$

这里, 当 $K>0$ 时, $R\leqslant b\pi/\sqrt{cK}$; 当 $K\leqslant 0$ 时, 令 $\pi/\sqrt{cK}:=\infty$.

需要注意的是, 定理 5.6 中的加权 Ricci 曲率下界并不是一个常数, 而是依赖于体积权常数 (畸变) ψ 的一个函数.

6 加权 Ricci 曲率 Ric_∞ 条件下的体积比较定理

正如加权 Ricci 曲率 Ric_N 一样, 加权 Ricci 曲率 Ric_∞ 在流形上的几何与分析中扮演着十分重要的角色. 当 $K>0$ 时, Gauss 空间 $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|, dm = \mathrm{e}^{-\frac{K}{2}\|x\|^2}dx)$ 是典型的满足 $\mathrm{Ric}_\infty \geqslant K$ 的空间.

在 Riemann 几何情形下, Bakry 和 Émery [2] 广泛深入地研究了 ∞-Bakry-Émery Ricci 曲率张量及其与扩散过程的关系 (参见文献 [25]). 这类张量也自然地出现在许多不同的研究领域中 (参见文献 [12]). 特别地, 对于常数 λ, $\mathrm{Ric}_f^\infty = \lambda g$ 正好是在 Ricci 流理论中扮演了重要角色的梯度 Ricci 孤立子方程. 设 M_H^n 表示 n 维单连通且具有常数截面曲率 H 的 Riemann 空间, $\mathrm{Vol}_H^n(r)$ 表示 M_H^n 中半径为 r 的测地球的体积. Wei 和 Wylie [25] 利用引理 3.2 和 3.3, 在加权 Ricci 曲率 Ric_f^∞ (参见 (3.5)) 有下界的条件下证明了以下体积比较定理.

定理6.1 [25] 设 $(M, g, dm = \mathrm{e}^{-f}dm_g)$ 是一个 n 维完备光滑 Riemann 度量测度空间, $p\in M$, 距离函数定义为 $\rho(x) := d(p,x)$. 假若加权 Ricci 曲率满足 $\mathrm{Ric}_f^\infty(x, \nabla\rho) \geqslant (n-1)H$.

(1) 如果沿任意从 p 点出发的测地线, 都有 $\nabla\rho(f) \geqslant -a$, 则对于 $R\geqslant r>0$ (当 $H>0$ 时, 设 $R\leqslant \pi/2\sqrt{H}$), 都有
$$\frac{m(B_p(R))}{m(B_p(r))} \leqslant \mathrm{e}^{aR}\frac{\mathrm{Vol}_H^n(R)}{\mathrm{Vol}_H^n(r)},$$
而且等号成立当且仅当径向截面曲率等于 H 且 $\nabla\rho(f) \equiv -a$.

(2) 如果 $|f(x)|\leqslant k$, 则对于 $R\geqslant r>0$ (当 $H>0$ 时, 设 $R\leqslant \pi/4\sqrt{H}$), 都有
$$\frac{m(B_p(R))}{m(B_p(r))} \leqslant \frac{\mathrm{Vol}_H^{n+4k}(R)}{\mathrm{Vol}_H^{n+4k}(r)}.$$

作为定理 6.1 的应用, Wei 和 Wylie [25] 在加权 Ricci 曲率 Ric_f^∞ 有下界的条件下, 推广了 Calabi-Yau 体积增长定理及 Bonnet-Myers 定理.

值得注意的是, 在 Finsler 几何情形下, 定理 6.1 中的条件 $\nabla\rho(f)\geqslant -a$ 和 $|f(x)|\leqslant k$ 分别意味着 S- 曲率满足 $\boldsymbol{S}(\nabla\rho)\geqslant -a$ 和畸变满足 $|\tau|\leqslant k$.

对于任意的 $0\leqslant \rho_o < t_o \leqslant \infty$, 令 $\chi: (\rho_o, t_o)\to(0,\infty)$ 是一个光滑函数, 使得当 $\rho_o=0$ 时有 $\lim_{t\to 0^+}\chi(t)=0$, 而当 $t_o<\infty$ 时有 $\lim_{t\to t_o^-}\chi(t)=0$. 设 (M,F,m) 是一个具有光滑体积形式 $dm=\phi(x)dm_{\mathrm{BH}}$ 的 n 维向前完备 Finsler 度量测度空间, $p\in M$. 假设存在一个如上所述的函数 $\chi(t)$, 使得距离函数 $\rho(x)=d_F(p,x)$ 满足
$$\Delta\rho(x)\leqslant \frac{d}{d\rho}[\ln\chi(\rho)]\Big|_{\rho=\rho(x)}, \quad x\in\Omega_p\setminus B_p(\rho_o). \tag{6.1}$$
根据 (2.21) 和 (6.1), 得到
$$\frac{d}{dt}[\ln\eta_t(y)]\leqslant\frac{\chi'(t)}{\chi(t)}, \quad \rho_o<t<i_y.$$
这意味着
$$\frac{d}{dt}\left[\ln\frac{\eta_t(y)}{\chi(t)}\right]\leqslant 0, \quad \rho_o<t<i_y.$$
于是 $\eta_t(y)/\chi(t)$ 关于 t 是单调不增的函数. 进一步地, 当 $\rho_o\leqslant t<i_y$ 时, 令 $\tilde\eta_t(y):=\eta_t(y)$; 而当 $t\geqslant i_y$ 时, 令 $\tilde\eta_t(y)=0$. 则 $\tilde\eta_t(y)/\chi(t)$ 是关于 $t\in(\rho_o,t_o)$ 的单调不增的函数, 即
$$\frac{\tilde\eta_t(y)}{\chi(t)}\leqslant\frac{\tilde\eta_s(y)}{\chi(s)}, \quad \rho_o<s<t<t_o.$$

上式两端在 S_pM 上关于 dA_p 同时积分, 可得

$$\frac{m(\tilde{S}_p(t))}{\chi(t)} \leqslant \frac{m(\tilde{S}_p(s))}{\chi(s)}, \quad \rho_o < s < t < t_o. \tag{6.2}$$

将 (6.2) 重新写为

$$m(\tilde{S}_p(t))\chi(s) \leqslant m(\tilde{S}_p(s))\chi(t), \quad \rho_o < s < t < t_o. \tag{6.3}$$

令 $\rho_o < r < R < t_o$ 并取定 $t \in [r, R]$, 则对 (6.3) 关于 $s \in [\rho_o, r]$ 积分, 可得到

$$m(\tilde{S}_p(t)) \int_{\rho_o}^{r} \chi(s) ds \leqslant m(B_p(r) \setminus B_p(\rho_o))\chi(t), \quad r \leqslant t \leqslant R.$$

然后, 对上式关于 $t \in [r, R]$ 积分, 有

$$m(B_p(R) \setminus B_p(r)) \int_{\rho_o}^{r} \chi(s) ds \leqslant m(B_p(r) \setminus B_p(\rho_o)) \int_{r}^{R} \chi(t) dt. \tag{6.4}$$

在 (6.4) 两端同时加上 $m(B_p(r) \setminus B_p(\rho_o)) \int_{\rho_o}^{r} \chi(t) dt$, 可得

$$m(B_p(R) \setminus B_p(\rho_o)) \int_{\rho_o}^{r} \chi(t) dt \leqslant m(B_p(r) \setminus B_p(\rho_o)) \int_{\rho_o}^{R} \chi(t) dt.$$

于是, 得到

$$\frac{m(B_p(R) \setminus B_p(\rho_o))}{m(B_p(r) \setminus B_p(\rho_o))} \leqslant \frac{\int_{\rho_0}^{R} \chi(t) dt}{\int_{\rho_0}^{r} \chi(t) dt}. \tag{6.5}$$

进一步地, 由 (6.4), 还可得到

$$\frac{m(B_p(R) \setminus B_p(r))}{\int_{r}^{R} \chi(t) dt} \leqslant \frac{m(B_p(r) \setminus B_p(\rho_o))}{\int_{\rho_o}^{r} \chi(t) dt}. \tag{6.6}$$

假定 $\rho_o = 0$. 由 (6.6) 知

$$\frac{m(B_p(R) \setminus B_p(r))}{\int_{r}^{R} \chi(t) dt} \leqslant \frac{m(B_p(r))}{\int_{0}^{r} \chi(t) dt}. \tag{6.7}$$

进一步地, 假设

$$\chi(t) = t^{n-1}\{1 + O(t)\},$$

则由 (2.18), 有

$$\lim_{r \to 0} \frac{m(B_p(r))}{\int_{0}^{r} \chi(t) dt} = \phi(p)\omega_{n-1}.$$

在 (6.7) 中令 $r \to 0^+$, 可得

$$\frac{m(B_p(R))}{\int_{0}^{R} \chi(t) dt} \leqslant \phi(p)\omega_{n-1}. \tag{6.8}$$

在 (6.8) 中用 r 替换 R, 然后将所得结果代入 (6.7), 便得到

$$\frac{m(B_p(R) \setminus B_p(r))}{\int_{r}^{R} \chi(t) dt} \leqslant \phi(p)\omega_{n-1}. \tag{6.9}$$

从而得到了以下关于测地球的 Bishop-Gromov 型的相对体积比较定理.

定理6.2 [7] 令 (M,F,m) 是一个配备有体积形式 $dm=\phi(x)dm_{\mathrm{BH}}$ 的 n 维向前完备的 Finsler 度量测度空间, $p\in M$. 假设存在一个如前所述的函数 $\chi(t)$, 使得距离函数 $\rho(x)=d_F(p,x)$ 满足

$$\Delta\rho(x)\leqslant \frac{d}{d\rho}[\ln\chi(\rho)]\bigg|_{\rho=\rho(x)},\quad x\in\Omega_p\setminus B_p(\rho_o). \tag{6.10}$$

则对于 $\rho_o<r<R<t_o$, 有

$$\frac{m(B_p(R)\setminus B_p(\rho_o))}{m(B_p(r)\setminus B_p(\rho_o))}\leqslant\frac{\int_{\rho_o}^{R}\chi(t)dt}{\int_{\rho_o}^{r}\chi(t)dt}. \tag{6.11}$$

如果 $\rho_o=0$ 且 $\chi(t)=t^{n-1}\{1+o(1)\}$, 则对于 $0<r<R<t_o$, 有

$$m(B_p(R)\setminus B_p(r))\leqslant\phi(p)\mathrm{Vol}(S^{n-1}(1))\int_r^R\chi(t)dt. \tag{6.12}$$

应该指出, 在一定的关于 Ricci 曲率和 S- 曲率的条件下, 总能发现 $\chi(t)$ 使得 (6.10) 成立 (参见定理 3.5–3.8). 然而, 为了得到关于测地球体积的绝对上界, 我们必须要得到一个满足 $\chi(t)=t^{n-1}\{1+o(1)\}$ 的函数 $\chi(t)$.

由定理 6.2 并利用定理 3.6 和 3.7, 可得到如下的关于流形体积上界的定理.

定理6.3 [7] 令 (M,F,m) 是一个配备有体积形式 $dm=\phi(x)dm_{\mathrm{BH}}$ 的 n 维向前完备的 Finsler 度量测度空间, $p\in M$. 假设存在常数 $K>0$ 和 $\delta\geqslant 0$, 使得

$$\mathrm{Ric}_\infty\geqslant K>0,\quad \boldsymbol{S}|_{B_p(\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{n-1}{K}})}\geqslant-\delta, \tag{6.13}$$

则 M 的体积以一个依赖于 n、K 和 δ 的常数为上界,

$$m(M)\leqslant\phi(p)K^{-n/2}c\bigg(n,\frac{\delta}{\sqrt{K}}\bigg),$$

其中 $c(n,\frac{\delta}{\sqrt{K}})$ 是一个只依赖于 n 和 $\frac{\delta}{\sqrt{K}}$ 的常数. 事实上, 具体的计算表明,

$$\begin{aligned}c\bigg(n,\frac{\delta}{\sqrt{K}}\bigg)=\omega_{n-1}(n-1)^{n/2}\bigg\{&\int_0^{\pi/4}\sin^{n-1}(s)\mathrm{e}^{\delta\frac{\sqrt{n-1}}{\sqrt{K}}s}ds\\&+\frac{\int_{\pi/4}^{\pi/2}\sin^{n-1}(s)\mathrm{e}^{\delta\frac{\sqrt{n-1}}{\sqrt{K}}s}ds}{\int_0^h\mathrm{e}^{s-\frac{1}{2}K_os^2}ds}\int_0^\infty\mathrm{e}^{s-\frac{1}{2}K_os^2}ds\bigg\},\end{aligned}$$

其中 $K_o:=1/(\sqrt{n-1}+\delta/\sqrt{K})^2$.

众所周知, 如果一个 n 维完备光滑的 Riemann 度量测度空间 $(M,g,dm=\mathrm{e}^{-f}dm_g)$ 的加权 Ricci 曲率 Ric_f^∞ 严格为正, 则它的体积一定有限. 定理 6.3 表明这个结论对 Finsler 流形也是正确的, 而且给出了流形体积的一个上界估计. 然而, 加权 Ricci 曲率下界条件 $\mathrm{Ric}_\infty\geqslant K>0$ 并不能控制 Finsler 流形的范围大小及度量球的体积, 因此关于 S- 曲率下界的条件不能取消. 最近, Yin 和 Mo [33] 证明了: 如果一个完备 Finsler 流形满足 $\mathrm{Ric}_\infty\geqslant K>0$ 和 $|\tau|\leqslant\Xi$, 则 Finsler 流形的体积是有限的, $m(M)<\infty$. 定理 6.3 则给出了 Finsler 流形体积的一个具体的上界估计, 并揭示了 S- 曲率对 Finsler 流形体积的影响. 进一步地, 如果假定在整个流形上有 $|\boldsymbol{S}|\leqslant\delta$, 则可以证明 M 必然是紧致、体积有界的, 且 $\mathrm{Diam}(M)\leqslant C(n,K,\delta)$. 事实上, 由定理 6.2、3.7(1) 和 3.8, 在 S- 曲率在整个流形上有界及加权 Ricci 曲率 Ric_∞ 有正下界的条件下, 可得到如下的 Bonnet-Myers 型定理.

定理6.4 [7] 令 (M,F,m) 是一个配备有体积形式 $dm=\phi(x)dm_{\mathrm{BH}}$ 的 n 维向前完备的 Finsler 度量测度空间, $p\in M$. 假设

$$\mathrm{Ric}_\infty\geqslant K>0,\quad |\boldsymbol{S}|\leqslant\delta,$$

则 M 的直径和体积是有界的,

$$\mathrm{Diam}(M)\leqslant\frac{\pi}{\sqrt{K}}\bigg(\frac{\delta}{\sqrt{K}}+\sqrt{\frac{\delta^2}{K}+n-1}\bigg),\tag{6.14}$$

$$m(M)\leqslant\phi(p)K^{-n/2}C\bigg(n,\frac{\delta}{\sqrt{K}}\bigg),\tag{6.15}$$

其中 $C(n,\frac{\delta}{\sqrt{K}})$ 是一个只依赖于 n 和 $\frac{\delta}{\sqrt{K}}$ 的常数. 此时, M 事实上是紧致的.

值得说明的是, 当 $\delta=0$ 时, 可得

$$m(M)\leqslant\phi(p)\omega_{n-1}\bigg(\frac{n-1}{K}\bigg)^{n/2}\int_0^\pi\sin^{n-1}(s)ds.$$

显然, 这是 M 的体积的最佳上界.

参考文献

1 Auslander L. On curvature in Finsler geometry. Trans Amer Math Soc, 1955, 79: 378–388
2 Bakry D, Émery M. Diffusions hypercontractives. In: Séminaire de Probabilités XIX. Lecture Notes in Mathematics, vol. 1123. Berlin: Springer, 1985, 177–206
3 Bao D, Chern S S, Shen Z. An Introduction to Riemann-Finsler Geometry. Graduate Texts in Mathematics, vol. 200. New York: Springer, 2000
4 Bishop R L, Crittenden R J. Geometry of Manifolds. New York: Academic Press, 1964
5 Chavel I. Riemannian Geometry: A Modern Introduction. Cambridge Tracts in Mathematics, vol. 108. Cambridge: Cambridge University Press, 1994
6 Cheeger J, Ebin D G. Comparison Theorems in Riemannian Geometry. Amsterdam: North-Holland, 1975
7 Cheng X, Shen Z. Some inequalities on Finsler manifolds with weighted Ricci curvature bounded below. Results Math, 2022, 77: 70
8 Chern S S. Finsler geometry is just Riemannian geometry without the quadratic restriction. Notices Amer Math Soc, 1996, 43: 959–963
9 Chern S S, Shen Z. Riemann-Finsler Geometry. Nankai Tracts in Mathematics, vol. 6. Singapore: World Scientific, 2005
10 Green L W. Auf Wiedersehensflachen. Ann of Math (2), 1963, 78: 289–299
11 Gromov M, Lafontaine J, Pansu P. Sturctures métriques pour les variétés riemanniennes. Textes Mathématiques, no. 1. Paris: CEDIC, 1981
12 Lott J. Some geometric properties of the Bakry-Émery-Ricci tensor. Comment Math Helv, 2003, 78: 865–883
13 Lu Y, Minguzzi E, Ohta S. Geometry of weighted Lorentz-Finsler manifolds I: Singularity theorems. J Lond Math Soc (2), 2021, 104: 362–393
14 Lu Y, Minguzzi E, Ohta S. Comparison theorems on weighted Finsler manifolds and spacetimes with ε-range. Anal Geom Metr Spaces, 2022, 10: 1–30
15 Ohta S. Finsler interpolation inequalities. Calc Var Partial Differential Equations, 2009, 36: 211–249
16 Ohta S. Comparison Finsler Geometry. Springer Monographs in Mathematics. Berlin: Springer, 2021
17 Ohta S, Sturm K-T. Heat flow on Finsler manifolds. Comm Pure Appl Math, 2009, 62: 1386–1433
18 Petersen P. A finiteness theorem for metric spaces. J Differential Geom, 1990, 31: 387–395
19 Qian Z. Estimates for weighted volumes and applications. Q J Math, 1997, 48: 235–242
20 Shen Z. Volume comparison and its applications in Riemann-Finsler geometry. Adv Math, 1997, 128: 306–328
21 Shen Z. Conjugate radius and positive scalar curvature. Math Z, 2001, 238: 431–439
22 Shen Z. Differential Geometry of Spray and Finsler Spaces. Dordrecht: Kluwer Academic, 2001
23 Shen Z. Lectures on Finsler Geometry. Singapore: World Scientific, 2001
24 Shen Z. Weighted Ricci curvature in Riemann-Finsler geometry. AUT J Math Comput, 2021, 2: 117–136

25 Wei G, Wylie W. Comparison geometry for the Bakry-Emery Ricci tensor. J Differential Geom, 2009, 83: 377–405
26 Wu B Y. Volume form and its applications in Finsler geometry. Publ Math Debrecen, 2011, 78: 723–741
27 Wu B Y. On integral Ricci curvature and topology of Finsler manifolds. Internat J Math, 2012, 23: 1250111
28 Wu B Y. Volume growth of Finsler manifolds with integral Ricci curvature bound. Results Math, 2021, 76: 212
29 Wu B Y, Xin Y L. Comparison theorems in Finsler geometry and their applications. Math Ann, 2007, 337: 177–196
30 Xia Q. Geometric and functional inequalities on Finsler manifolds. J Geom Anal, 2020, 30: 3099–3148
31 Xia Q. Some L^p Liouville theorems on Finsler measure spaces. Differential Geom Appl, 2023, 87: 101987
32 Yin S. Comparison theorems on Finsler manifolds with weighted Ricci curvature bounded below. Front Math China, 2018, 13: 435–448
33 Yin S, Mo X. Some results on complete Finsler measure spaces. J Math Anal Appl, 2021, 497: 124846
34 Zhang F, Xia Q. Some Liouville-type theorems for harmonic functions on Finsler manifolds. J Math Anal Appl, 2014, 417: 979–995
35 Zhao W, Shen Y-B. A universal volume comparison theorem for Finsler manifolds and related results. Canad J Math, 2013, 65: 1401–1435

Volume comparison theorems in Finsler geometry

Xinyue Cheng & Yalu Feng

Abstract In this paper, we introduce the important research progress of volume comparison theorems and their applications in Finsler geometry. Firstly, we introduce Laplacian comparison theorems for distance functions in Finsler geometry. Then, we introduce volume comparison theorems and their important applications on Finsler manifolds with bounded Ricci curvature Ric, or weighted Ricci curvature Ric_N or Ric_∞, respectively. The main results in this paper are not only the natural generalizations of volume comparison theorems in Riemannian geometry, but also contain some innovative developments in Finsler geometry, which are of very important value for promoting the studies of global geometry and analysis on Finsler manifolds.

Keywords **Finsler manifold, volume comparison theorem, Ricci curvature, weighted Ricci curvature, distance function**

MSC(2020) **53C60, 53B40**

doi: 10.1360/SSM-2022-0249