



关于凝聚层上同调群的若干结果

献给彭家贵教授 80 寿辰

陈智健¹, 青成昊², 周向宇^{1*}

1. 中国科学院数学与系统科学研究院数学研究所, 北京 100190;

2. 清华大学丘成桐数学科学中心, 北京 100084

E-mail: chenzhijian@amss.ac.cn, qingchenghao@amss.ac.cn, xyzhou@math.ac.cn

收稿日期: 2024-06-10; 接受日期: 2024-08-16; 网络出版日期: 2024-11-08; * 通信作者

国家自然科学基金 (批准号: 12288201) 资助项目

摘要 本文介绍作者们在解析和代数两方面关于凝聚解析层上同调群若干性质的最新研究成果.

关键词 拟有效线丛 层上同调 乘子理想层 奇异 Hermite 度量 凝聚层 范畴极限

MSC (2020) 主题分类 32C35, 14F18, 32E05, 32L10, 32L20, 18A30, 14F08, 18G10

1 引言

凝聚解析层及其上同调理论是多复变 (也称为复解析几何) 中的一个核心内容, 在多复变与复几何的发展中起着重要作用, 也是一个基本研究对象.

本文从解析和代数两方面研究凝聚层上同调群的若干性质. 在解析方面, 带乘子理想层或乘子子模层的上同调群是研究线丛或向量丛的重要工具, 在第 2 节中我们给出相应的同构、单射、消灭定理. 在代数方面, 顺极限与逆极限是在范畴论中被广泛讨论的一类函子. 在考虑层的上同调时, 人们往往会遇到计算层递增列并的上同调, 这涉及到层上同调与顺逆极限的交换性, 本文第 3 节便着眼于两者交换的条件与判别法.

2 全纯凸流形上奇异 Hermite 线丛和向量丛的上同调群

取值在凝聚解析层中的上同调群的同构、单射和消灭定理在研究代数几何和解析几何的正性中起着重要作用, 关于这些方面有很多重要结果. 本章主要介绍如何在解析的框架下, 通过乘子理想层和乘子子模层来研究具有奇异 Hermite 度量的线丛和向量丛的上同调群. 奇点在多复变和复几何中是十分重要且不可避免的, 而且有着许多应用, 因此研究奇异度量是非常有意义的.

英文引用格式: Chen Z J, Qing C H, Zhou X Y. Some results on cohomology groups valued in coherent analytic sheaves (in Chinese). Sci Sin Math, 2025, 55: 15–38, doi: 10.1360/SSM-2024-0196

我们首先回顾一些定义.

复流形 X 上的全纯线丛 $L \rightarrow X$ 上的奇异 Hermite 度量是在局部坐标卡上可以表示为 $e^{-\varphi_U}$ 的 Hermite 度量, 其中 φ_U 是局部可积的, U 是使 $L|_U \simeq U \times \mathbb{C}$ 的坐标卡. 它的曲率流动形 (curvature current) $i\Theta_h := i\partial\bar{\partial}\varphi_U$ 是良定的. 当 L 配备具非负曲率流动形的奇异度量时, 称 L 是拟有效的 (pseudoeffective).

设 φ 是 X 上的拟多次调和函数, 乘子理想层 $\mathcal{I}(\varphi)$ 是由

$$\mathcal{I}(\varphi)_x = \left\{ f \in \mathcal{O}_{X,x} : \exists U \ni x \text{ 使得 } \int_U |f|^2 e^{-\varphi} d\lambda < +\infty \right\}$$

定义的 $\mathcal{O}_X$ 的理想层, 其中 U 是 x 的坐标开邻域, $d\lambda$ 是 $\mathbb{C}^n$ 中标准的 Lebesgue 测度. 容易看出, 如果存在光滑的 $(1,1)$ -形式 γ , 使奇异度量 h 的曲率满足 $i\Theta_h \geq \gamma$, 则乘子理想层 $\mathcal{I}(h)$ 是良定的. 众所周知解析层 $\mathcal{I}(h)$ 是凝聚的 (参见文献 [56])、整闭的, 并满足 Nadel 消灭定理. Yau [72] 指出: 乘子理想层在现代高维代数几何中起一个核心作用. 而不同方向中的许多问题都归结于关启安 - 周向宇 [39] 证明的关于乘子理想层的 Demailly 强开性猜想, 其一种形式陈述如下:

定理 2.1 [39] 设 φ 是 $\Delta^n \subset \mathbb{C}^n$ 上的负值多次调和函数, $\varphi_0 \not\equiv -\infty$ 是 Δ^n 上的负值多次调和函数. 则有 $\mathcal{I}(\varphi) = \bigcup_{\varepsilon>0} \mathcal{I}(\varphi + \varepsilon\varphi_0)$.

为了研究 Griffiths 猜想, 向量丛上的奇异度量理论最近也受到越来越多的关注与发展 (参见文献 [3, 60]). 我们首先给出向量丛上奇异度量与乘子子模层的定义.

定义 2.1 [3, 12, 62] 设 E 是复流形 X 上的一个全纯向量丛, 如果 h 是从 X 到纤维上非负 Hermite 形式构成的空间的可测映射, 并且 $0 < \det h < +\infty$ 几乎处处成立, 则称 h 是 E 上的奇异 Hermite 度量. 此时定义 $\mathcal{O}(E)$ 相对于 (E, h) 的乘子子模层 $\mathcal{E}(h)$ 为

$$\mathcal{E}(h)_x := \{u \in E_x : |u|_h^2 \text{ 在 } x \text{ 的某个邻域中可积}\}.$$

特别地, 当 E 是线丛时, 有 $\mathcal{E}(h) = E \otimes \mathcal{I}(h)$.

我们考虑向量丛奇异度量的正性, 需要强调的是, 关于向量丛奇异度量的正性有许多不同的定义, 这里给出方便在研究上同调群的性质中使用的定义.

定义 2.2 [3, 60, 62, 68] 设 (X, ω) 是 Kähler 流形, E 是 X 上的向量丛, h 是 E 上奇异 Hermite 度量, 称 h 是

- (1) Griffiths 半负, 如果对任意局部全纯截面 $u \in \mathcal{O}(E)$, $|u|_h^2$ 是多次调和函数;
- (2) Griffiths 半正, 如果 (E^*, h^*) 是 Griffiths 半负的;
- (3) 严格 Griffiths δ_ω -正, 如果对任意开集 U 和 ω 的局部位势函数 φ , $he^{\delta\varphi}$ 在 U 上是 Griffiths 半正的.

然而不同于线丛, 向量丛的 Griffiths 半正度量的曲率流动形一般来讲不具有测度系数 (参见文献 [62]), 这使得很难像光滑度量那样, 用曲率研究 Nakano 正性. 最近, 邓富声 - 宁家福 - 汪志威 - 周向宇 [22] 建立了 L^2 逆理论, 用带最优 L^2 估计的 $\bar{\partial}$ 方程可解性给出了光滑度量 Nakano 正性的等价刻画, 陈述如下:

定理 2.2 [22] 设 (X, ω) 是 Kähler 流形, E 是 X 上的向量丛, h 是 E 上 C^2 光滑 Hermite 度量, h 是 Nakano 半正的当且仅当 h 满足最优 L^2 条件, 即, 对任意使 $E|_U$ 平凡的 Stein 坐标开集 U ,

任意 U 上的 Kähler 形式 ω_U , 任意 U 上的光滑严格多次调和函数 ψ , 以及满足下列不等式中右边积分有限的任意 $\bar{\partial}$ - 闭的光滑紧支 E - 值 $(n, 1)$ - 形式 f , 都存在 $u \in L_{(2)}^{n,0}(U, E|_U)_{he^{-\psi}, \omega_U}$, 使得 $\bar{\partial}u = f$, 并且满足估计

$$\int_U |u|_{h, \omega_U}^2 e^{-\psi} dV_{\omega_U} \leq \int_U \langle B_{\psi, \omega_U}^{-1} f, f \rangle_{h, \omega_U} e^{-\psi} dV_{\omega_U},$$

其中算子 $B_{\psi, \omega_U} = [i\partial\bar{\partial}\psi \otimes \text{Id}_E, \Lambda_{\omega_U}]$, 空间 $L_{(2)}^{n,0}(U, E|_U)_{he^{-\psi}, \omega_U}$ 是 U 上关于 $he^{-\psi}$ 和 ω_U 平方可积的 E - 值 $(n, 0)$ - 形式.

由此, 可以定义奇异度量的 Nakano 正性.

定义 2.3 ^[42, 69] 设 (X, ω) 是 Kähler 流形, E 是 X 上的向量丛, h 是 E 上奇异 Hermite 度量, 并且假设 h 是 Griffiths 半正的.

(1) 称 h 是 L^2 型 Nakano 半正, 如果对任意 $k = 1, \dots, n$, 任意 Stein 坐标开集 S , 任意 S 上的 Kähler 形式 ω_S , 任意全纯向量丛 F 上的满足 $A_{F, h_F, \omega_S}^{n, s} = [i\Theta_{F, h_F}, \Lambda_{\omega_S}] > 0$ 对 $s \geq k$ 都成立的光滑度量 h_F , 都可以对任意 $q \geq k$, 任意 $\bar{\partial}$ - 闭的 $f \in L_{(2)}^{n, q}(S, E \otimes F)_{hh_F, \omega_S}$, 存在 $u \in L_{(2)}^{n, q-1}(S, E \otimes F)_{hh_F, \omega_S}$, 使得 $\bar{\partial}u = f$, 并且满足估计

$$\int_S |u|_{hh_F, \omega_S}^2 dV_{\omega_S} \leq \int_S \langle B_{h_F, \omega_S}^{-1} f, f \rangle_{hh_F, \omega_S} dV_{\omega_S}.$$

我们假设上式右边是有限的, 其中算子 $B_{h_F, \omega_S} = [i\Theta_{F, h_F} \otimes \text{Id}_E, \Lambda_{\omega_S}]$.

(2) 我们称 h 是 L^2 型严格 Nakano δ_ω - 正, 如果对任意开集 U 和 ω 的局部位势函数 φ , $he^{\delta\varphi}$ 在 U 上是 L^2 型 Nakano 半正的.

类似于线丛上奇异度量对应的乘子理想层, 当向量丛上的奇异度量 h 是 L^2 型 Nakano 半正时, Hosono 和 Inayama 证明了乘子子模层 $\mathcal{E}(h)$ 是凝聚的 (参见文献 [40, 42]). 刘卓 - 肖博 - 杨辉 - 周向宇 ^[49] 证明了乘子子模层也具有强开性质, 陈述如下:

定理 2.3 ^[49] 对向量丛 $E \rightarrow X$, 设 h 是奇异 L^2 型 Nakano 半正度量, h_j 是奇异 Griffiths 半正度量. 如果 $h_j \geq h$ 且 $-\log \det h_j$ 局部依测度收敛到 $-\log \det h$, 则有 $\mathcal{E}(h) = \bigcup_j \mathcal{E}(h_j)$.

除了 Nakano 正性外, 还可以考虑对偶 Nakano 正性.

定义 2.4 ^[2, 62, 68] 设 (X, ω) 是 Kähler 流形, E 是 X 上的向量丛, h 是 E 上奇异 Hermit 度量, 对 E 的全纯截面构成的 n - 元组 $u = (u_1, \dots, u_n)$, 定义 $(n-1, n-1)$ - 形式 T_u^h 为

$$T_u^h := \sum_{j,k=1}^n (u_j, u_k)_h \widehat{dz_j \wedge d\bar{z}_k},$$

这里 $(z_1, \dots, z_n)$ 是 X 上的局部坐标, $\widehat{dz_j \wedge d\bar{z}_k}$ 表示对除了 dz_j 和 $d\bar{z}_k$ 以外的所有 dz_i 和 $d\bar{z}_i$ 作外积, 并乘上一个绝对值为 1 的常数, 使得

$$idz_j \wedge d\bar{z}_k \wedge \widehat{dz_j \wedge d\bar{z}_k} = idz_1 \wedge d\bar{z}_1 \wedge \dots \wedge idz_n \wedge d\bar{z}_n =: dV_z.$$

称 T_u^h 是多次调和的, 如果在流动形的意义下 $i\partial\bar{\partial}T_u^h \geq 0$. 于是可以定义

- (1) h 是 Nakano 半负的, 如果对任意 n - 元组 u , T_u^h 是多次调和的;
- (2) h 是对偶 Nakano 半正的, 如果 (E^*, h^*) 是 Nakano 半负的;
- (3) h 是严格对偶 Nakano δ_ω - 正的, 如果对任意开集 U 和 ω 的局部位势函数 φ , $he^{\delta\varphi}$ 在 U 上是对偶 Nakano 半正的.

注 2.1 [42, 68] 特别地, 关于 Griffiths 正性、Nakano 正性、对偶 Nakano 正性, 可以知道当 h 是 E 上的严格 Griffiths δ_ω - 正度量时, $E \otimes \det E$ 上的度量 $h \otimes \det h$ 是 L^2 型严格 Nakano $(r+1)\delta_\omega$ - 正并且严格对偶 Nakano $(r+1)\delta_\omega$ - 正, 这里 $r = \text{rank } E$.

代数几何中的 lc 对 (lc pair) (X, D) 是很重要的研究对象, 我们还将解析的框架下借助乘子理想层对其进行研究. Deligne 在文献 [13, 14] 中发展了射影流形上的对数微分形式层.

定义 2.5 设 $D = \sum_{i=1}^s D_i$ 是 Kähler 流形 (X, ω) 上的具有简单正交支撑的约化整除子, 对数层 $\Omega_X^p(\log D)$ 是在 D 上至多有对数奇点的 p - 形式芽层, 其在开集 U 上的截面为

$$\Gamma(U, \Omega_X^p(\log D)) := \{\alpha \in \Gamma(U, \Omega_X^p \otimes [D]) \text{ 且 } d\alpha \in \Gamma(U, \Omega_X^{p+1} \otimes [D])\}.$$

这里 $[D]$ 表示除子 D 相对应的线丛 (参见文献 [35]). 容易看出, 当 $p = \dim X$ 时, 有 $\Omega_X^p(\log D) = K_X \otimes [D]$.

在接下来的三小节中, 我们将分别介绍带乘子理想层或乘子模层的上同调群的同构、单射和消灭定理.

2.1 同构定理

上同调群的同构定理非常重要, 这使我们在计算上同调群时可以使用更多的工具. 在本小节中, 我们将介绍两种同构定理, 一种是经典的 Hodge 理论给出的调和形式和上同调群之间的同构, 另一种是对于对数微分形式层, 由零调消解给出的 L^2 Dolbeault 同构, 这使我们可用 L^2 方法计算对数层的上同调群. 相比于一般非紧流形, 全纯凸流形上凝聚层的上同调群对研究高阶直像层很有帮助, 而全纯凸流形本身具有非常好的性质, Remmert 约化定理 (参见文献 [33, 34]) 和 Prill 引理 (参见文献 [61]) 保证了全纯凸流形的上同调群具有良好的拓扑结构. 所以我们主要在全纯凸 Kähler 流形上讨论.

2.1.1 拟有效线丛上同调群的同构

在用 L^2 方法研究上同调群时, 调和形式起着关键作用. 设 (X, ω) 是 n 维 Kähler 流形, (L, h) 是 X 上的 Hermite 全纯线丛, h 可以是曲率有下界的奇异度量, 记 D 为 (L, h) 的陈联络, 它可以被唯一分解为 $D = D'_h + \bar{\partial}$. L - 值 (p, q) - 形式相对于 h 和 ω 的平方可积 L^2 空间被定义为

$$L_{(2)}^{p,q}(X, L)_{h,\omega} := \{u : u \text{ 是 } L\text{- 值 } (p, q)\text{- 形式, 满足 } \|u\|_{h,\omega} < +\infty\}.$$

从而 $\bar{\partial}$ 和 D'_h 可以被视作 $L_{(2)}^{p,q}(X, L)_{h,\omega}$ 上的稠定闭算子 (参见文献 [67, 71]). 总有正交分解 (参见文献 [17])

$$L_{(2)}^{p,q}(X, L)_{h,\omega} = \overline{\text{Im } \bar{\partial}} \oplus \mathcal{H}_{h,\omega}^{p,q}(X, L) \oplus \overline{\text{Im } \bar{\partial}_{h,\omega}^*},$$

其中 $\bar{\partial}_{h,\omega}^*$ 是 $\bar{\partial}$ 算子的 Hilbert 伴随, $\mathcal{H}_{h,\omega}^{p,q}(X, L)$ 是相对于 h 和 ω 的调和形式的集合, 即,

$$\mathcal{H}_{h,\omega}^{p,q}(X, L) := \{u \in L_{(2)}^{p,q}(X, L)_{h,\omega} \mid \bar{\partial}u = 0 \text{ 且 } \bar{\partial}_{h,\omega}^*u = 0\}.$$

在非紧流形上研究上同调群, 我们往往需要考虑局部平方可积空间. 设 Z 是 X 的真子簇 (Z 可以是空集), 并且 $\tilde{\omega}$ 是 $Y := X \setminus Z$ 上的 Kähler 形式, 满足 $\tilde{\omega} \geq \omega$, 以及在 X 上, 局部存在有界函数

Φ 使得 $\tilde{\omega} = i\partial\bar{\partial}\Phi$. 我们定义局部平方可积空间

$$L_{(2,\text{loc})}^{p,q}(X, L)_{h,\tilde{\omega}} := \{u \mid u \text{ 是 } L\text{- 值 } (p, q)\text{- 形式, 满足 } \|u\|_{K,h,\tilde{\omega}} < +\infty, \forall K \Subset X\},$$

其中 $\|u\|_{K,h,\tilde{\omega}}^2 = \int_{K \setminus Z} |u|_{h,\tilde{\omega}}^2 dV_{\tilde{\omega}}$, 此时有层的上同调群和 L_{loc}^2 Dolbeault 上同调群之间的拓扑同构 (细节参见文献 [52, 74]):

$$H^q(X, K_X \otimes L \otimes \mathcal{I}(h)) \simeq H_{(2),\text{loc}}^{n,q}(X, L, h) := \frac{\ker \bar{\partial} \cap L_{(2,\text{loc})}^{n,q}(X, L)_{h,\tilde{\omega}}}{\text{Im } \bar{\partial} \cap L_{(2,\text{loc})}^{n,q}(X, L)_{h,\tilde{\omega}}}.$$

Remmert 约化定理和 Prill 引理保证了全纯凸流形的上同调群是可分拓扑向量空间. 这说明当 X 是全纯凸流形时, L_{loc}^2 Dolbeault 上同调群是一个 Fréchet 空间, 并且 $\text{Im } \bar{\partial}$ 是 $L_{(2,\text{loc})}^{n,q}(X, L)_{h,\tilde{\omega}}$ 的闭子空间.

在文献 [66] 中, Takegoshi 用 $\bar{\partial}$ 算子的 L^2 理论给出了全纯凸 Kähler 流形上光滑 Nakano 半正向量丛 E 的上同调群 $H^q(X, K_X \otimes E)$ 的结构. 在文献 [21] 中, Demailly, Peternell 和 Schneider 通过调和表示和逼近技巧证明了紧 Kähler 流形上关于拟有效线丛的 Hard Lefschetz 定理 (nef 情形参见文献 [67]), 这被孟宪奎 - 周向宇在文献 [53] 中推广到全纯凸流形上, 并被吴晓俊在文献 [71] 中改进为同构定理. 对于线丛, 我们结合这些文章中的方法以及文献 [15, 52] 中的技巧, 可以将这些结果统一为:

定理 2.4 设 (X, ω) 是一个 n 维全纯凸 Kähler 流形, (L, h) 是 X 上的奇异 Hermite 线丛, 对任意 X 上的光滑多次调和函数 Φ , 定义

$$\mathcal{H}^{n,q}(X, L, h, \Phi) := \{u \in C_{(n,q)}^\infty(X, L) \cap L_{(2,\text{loc})}^{n,q}(X, L)_{h,\omega} : \bar{\partial}u = 0, D'_h * u = 0, \partial\Phi \wedge *u = 0\},$$

其中 $* = *_\omega$ 是关于 Kähler 度量 ω 的 Hodge 星算子. 设 $i\Theta_{L,h} \geq 0$. 则对穷竭的 Φ , 有如下交换图:

$$\begin{array}{ccc} H^q(X, K_X \otimes L \otimes \mathcal{I}(h)) & \xleftarrow[\iota]{\simeq} & \bigcap_{c \in \mathbb{R}} \mathcal{H}_{h,\omega}^{n,q}(X_c, L) = \mathcal{H}^{n,q}(X, L, h, \Phi) \\ & \nwarrow \simeq & \downarrow \simeq * \\ & \frac{1}{C_q} \omega^q \wedge & H^0(X, \Omega_X^{n-q} \otimes L \otimes \mathcal{I}(h)) \cap \ker D'_h \cap \ker((\partial\Phi) \wedge \cdot), \end{array}$$

其中 C_q 是一个仅依赖于 n 和 q 的常数, 且这里的定义和交换图不依赖于穷竭函数 Φ 的选取, 即对不同的光滑穷竭多次调和函数 Φ 和 Φ' , 有 $\mathcal{H}^{n,q}(X, L, h, \Phi) = \mathcal{H}^{n,q}(X, L, h, \Phi')$.

由此, 根据和文献 [66, 第 6 节] 中光滑度量一样的讨论, 可以研究 Leray 谱序列并得到类似的分解定理、无挠性定理、单射定理和相对消灭定理, 其中无挠性定理和单射定理已经在文献 [52, 74] 中被证明.

推论 2.1 设 $f: X \rightarrow Y$ 是从 n 维 Kähler 流形 (X, ω) 到 m 维复空间 Y 的逆紧全纯满射, 使得任意 X 的连通分支到 Y 都是满射. 设 (L, h) 是 X 上的奇异 Hermite 线丛, 满足 $i\Theta_{L,h} \geq 0$, 则下面的结果成立:

(I) **分解定理** (参见文献 [66, 定理 6.4]) f 的 Leray 谱序列

$$E_2^{p,q} = H^p(Y, R^q f_*(K_X \otimes L \otimes \mathcal{I}(h))) \Rightarrow H^{p+q}(X, K_X \otimes L \otimes \mathcal{I}(h))$$

在 E_2 页处退化. 特别地, 如果 (X, ω) 是连通紧 Kähler 流形, 则对任意的 $r \geq 0$, 有

$$\dim_{\mathbb{C}} H^r(X, K_X \otimes L \otimes \mathcal{I}(h)) = \sum_{p+q=r} \dim_{\mathbb{C}} H^p(Y, R^q f_*(K_X \otimes L \otimes \mathcal{I}(h))).$$

(II) 无挠性定理 (参见文献 [66, 定理 6.5]) 对任意 $q \geq 1$, 由 $\omega^q \wedge \cdot$ 诱导的层同态

$$\mathcal{L}^q : R^0 f_*(\Omega_X^{n-q} \otimes L \otimes \mathcal{I}(h)) \rightarrow R^q f_*(K_X \otimes L \otimes \mathcal{I}(h))$$

有一个分裂层同态

$$\delta^q : R^q f_*(K_X \otimes L \otimes \mathcal{I}(h)) \rightarrow R^0 f_*(\Omega_X^{n-q} \otimes L \otimes \mathcal{I}(h))$$

使得 $\mathcal{L}^q \circ \delta^q = \text{Id}$. 特别地, 对任意 $q \geq 0$, $R^q f_*(K_X \otimes L \otimes \mathcal{I}(h))$ 是无挠的, 并且对 $q > n - m$ 是消灭的.

(III) 单射定理 (参见文献 [66, 定理 6.8]) 如果 (M, h_M) 是 X 上的光滑半正全纯线丛, 存在常数 $b > 0$ 使得 h_M 满足 $i\Theta_h - bi\Theta_{h_M} \geq 0$, s 是 M 的非零全纯截面, 则由张量 s 诱导的层同态:

$$R^q f_*(s) : R^q f_*(K_X \otimes L \otimes \mathcal{I}(h)) \rightarrow R^q f_*(K_X \otimes L \otimes \mathcal{I}(h) \otimes M)$$

是单射.

(IV) 相对消灭定理 (参见文献 [66, 定理 6.9]) 设 $g : Y \rightarrow Z$ 是复空间之间的逆紧全纯满射, 则有 Leray 谱序列

$$R^p g_* R^q f_*(K_X \otimes L \otimes \mathcal{I}(h)) \Rightarrow R^{p+q}(g \circ f)_*(K_X \otimes L \otimes \mathcal{I}(h))$$

退化. 特别地, (i) 如果 A 是 Y 上的 g - 丰沛线丛, 则对任意 $r \geq 0$, 有

$$R^r(g \circ f)_*(K_X \otimes L \otimes f^* A \otimes \mathcal{I}(h)) \cong R^0 g_* \mathcal{O}_Y(A) \otimes R^r f_*(K_X \otimes L \otimes \mathcal{I}(h))$$

以及 (ii) 如果 g 是一般有限的, 则对任意 $r \geq 0$, 有

$$R^r(g \circ f)_*(K_X \otimes L \otimes \mathcal{I}(h)) \cong R^0 g_* R^r f_*(K_X \otimes L \otimes \mathcal{I}(h)).$$

对于光滑度量, Kollár 首先在文献 [43, 44] 中发现上述定理在射影代数簇上成立并且相互之间是密切相关的. 在文献 [66] 之前, 关于这些定理的研究或多或少限制在射影代数的范畴下, 而 Takegoshi 用解析方法将其推广到了 Kähler 流形和复空间之间的逆紧 Kähler 映射 (部分结果参见文献 [23, 63]). 最近, 申屠钧超 - 赵晨将 Takegoshi 的结果用 L^2 方法推广到复空间 (文献 [64]).

2.1.2 对数层的 L^2 Dolbeault 同构

Esnault-Viehweg 在代数流形上研究了对数 de Rham 复形和消灭定理的关系, 并用谱序列建立了很多对数层的消灭定理 (参见文献 [24, 25]). 最近, 黄春乐 - 刘克峰 - 万学远 - 杨晓奎用 L^2 的方法, 通过考虑流形上的 Poincaré 度量, 在紧 Kähler 流形上给出了对数层的零调消解, 并由此得到了许多消灭定理 (参见文献 [41]). 之后, 邹勇攀将这种方法推广到非紧流形, 得到了弱拟凸流形上的消灭定理 (参见文献 [75]). Watanabe 借助强开性, 推广到紧 Kähler 流形上具有奇异度量的线丛和向量丛

(参见文献 [68]). 我们将 Watanabe 的讨论更精细化, 将他提出的 Lelong 数条件减弱为乘子理想层 (乘子子模层) 条件, 并将其推广到全纯凸 Kähler 流形.

设 (X, ω) 是 n 维全纯凸 Kähler 流形, Φ 是 X 上的光滑多次调和穷竭函数, $X_c := \{\Phi < c\} \Subset X$ 是次水平集, 特别地, X_c 是弱拟凸 Kähler 流形, 记 $Y_c = X_c \setminus D$. 在 X 上取局部坐标 $(W; z_1, \dots, z_n)$, 使局部上 $D \cap W = \{z_1 \cdots z_t = 0\}$, 且 $Y_c \cap W = W_r^* = (\Delta_r^*)^t \times (\Delta_r)^{n-t}$, 这里 Δ_r 表示复平面上半径为 r 的圆盘, Δ_r^* 表示 Δ_r 去掉原点. 考虑在开流形 Y_c 上的在 D 附近满足渐进条件的 Kähler 度量.

定义 2.6 称 Y_c 上的度量 ω_{Y_c} 沿着 D 是 Poincaré 型的, 如果对任意 D 附近的局部坐标 $(W; z_1, \dots, z_n)$, $\omega_{Y_c}|_{W_r^*}$ 等价于下列通常定义的 Poincaré 度量:

$$\omega_P = i \sum_{j=1}^t \frac{dz_j \wedge d\bar{z}_j}{|z_j|^2 (\log |z_j|^2)^2} + i \sum_{j=t+1}^n dz_j \wedge d\bar{z}_j.$$

设 F 是向量丛, $F|_{W_r^*}$ 的光滑度量 h_1 和 h_2 称作沿着 D 等价, 如果对任意相对紧子集 V , 存在常数 $C > 0$, 使得在 $V \setminus D$ 上成立 $C^{-1}h_1 \leq h_2 \leq Ch_1$, 记作 $h_1 \sim h_2$.

根据文献 [76], 在 Y_c 上总存在度量 $\omega_{c,P}$ 沿着 D 是 Poincaré 型的. $\omega_{c,P}$ 在 D 附近是完备的, 在 X_c 的边界附近不是完备的. 考虑 X_c 上的 L^2 Dolbeault 复形 $(\mathcal{L}_{X_c, E, h_{Y_c}^E, \omega_{c,P}}^{p,*}, \bar{\partial})$. 这里 $\mathcal{L}_{X_c, E, h_{Y_c}^E, \omega_{c,P}}^{p,*}$ 是具有可测系数的满足 $|u|_{h_{Y_c}^E, \omega_{c,P}}^2 dV_{\omega_{c,P}}$ 以及 $|\bar{\partial}u|_{h_{Y_c}^E, \omega_{c,P}}^2 dV_{\omega_{c,P}}$ 局部可积的 E - 值 (p, q) - 形式芽层, 其中 $h_{Y_c}^E$ 是 $E|_{Y_c}$ 上的 Hermite 度量, 可以是奇异度量. 我们用强开性证明下面的 L^2 消解定理.

定理 2.5 ^[41, 68] 设 (X, ω) 是 n 维全纯凸 Kähler 流形, Φ 是 X 上的光滑多次调和穷竭函数, $X_c = \{\Phi < c\} \Subset X$ 是次水平集, $Y_c = X_c \setminus D$, $\omega_{c,P}$ 是 Y_c 上的光滑 Kähler 度量, 沿着 D 是 Poincaré 型的. 设 E, F 是 X 上的全纯向量丛, h_F 是 F 上的光滑度量, h 是 E 上的奇异度量, 设 σ_j 是 D_j 的定义截面, 固定 $\mathcal{O}(D_j)$ 的光滑度量 h_j , 假设 h 是 L^2 型 Nakano 半正, 并且存在 $\varepsilon \in [0, 1]$, 使得 $\mathcal{E}(h) = \mathcal{E}(hg_0^{1-\varepsilon}/g^{1-\varepsilon})$, 则对任意 $\alpha \gg 1$, 任意 $\tau \in (\varepsilon, 1]$, 都可以构造 $F|_{Y_c}$ 上的光滑度量

$$h_{Y_c}^F := h_F \prod_{j=1}^s \|\sigma_j\|_{h_j}^{2\tau} (\log \|\sigma_j\|_{h_j}^2)^{2\alpha},$$

使得 L^2 Dolbeault 复形 $(\mathcal{L}_{X_c, F \otimes E, h_{Y_c}^F, \omega_{c,P}}^{p,*}, \bar{\partial})$ 给出 $\Omega_X^p(\log D) \otimes F \otimes \mathcal{E}(h)$ 在 X_c 上的零调消解. 于是有同构

$$H^q(X_c, \Omega_X^p(\log D) \otimes F \otimes \mathcal{E}(h)) \cong H^q(\Gamma(X_c, \mathcal{L}_{X_c, F \otimes E, h_{Y_c}^F, \omega_{c,P}}^{p,*})).$$

特别地, 当 E 是线丛 L , h 是 L 上的奇异度量, 使得其曲率流动形有下界, 且 $\mathcal{I}(h) = \mathcal{I}(hg_0^{1-\varepsilon})$ 时, 也有类似结果.

2.2 单射定理

当线丛的度量严格正时, 我们知道有经典的 Kodaira 消灭定理和 Nadel 消灭定理. 而当度量半正时, 消灭定理自然的推广就是单射定理. 而单射定理还有更广泛的应用, 比如证明无挠性定理、消灭定理等 (参见文献 [26–28, 30, 52, 74] 和其中的文献), 单射定理还与 dlt 延拓有关 (参见文献 [19, 32]). 所以研究单射定理是非常重要且有意义的. 对光滑度量, 在代数和解析情形分别有之前提到的 Kollár 型单射定理, 以及 Enoki 用调和积分得到的单射定理. 从解析层面, Ohsawa 在文献 [58] 中将 Enoki 的结果推广为一定曲率条件下全纯凸流形上的单射定理. 对于拟有效线丛, 经过 Fujino,

Matsumura, 曹俊彦, Demailly 等人的发展, 最终由周向宇 - 朱朗峰在文献 [74] 中给出了最广版本的单射定理, 这统一了之前提到的单射定理. 需要指出的是, 曹俊彦 -Demailly-Matsumura 首先在文献 [8] 中用证明延拓定理的方法得到了一种单射定理, 周向宇 - 朱朗峰用同时逼近两个权函数的想法, 推广了文献 [8] 的结果并回答了其中作者们提出的一个问题. 这些方法和结果对具有光滑 Nakano 半正度量的向量丛都是成立的, 但对于奇异度量结果还比较少, 并且对于 lc 对 (X, D) 的单射性质, 目前还有很多是未知的. 在本小节中, 我们分别给出 lc 对的拟有效线丛的单射定理, 和不考虑 lc 对的具有奇异度量的向量丛之间的单射定理.

2.2.1 lc 对的单射定理

Fujino 关于 lc 对有以下猜想.

猜想 2.1 ^[28] 设 (X, ω) 是一个 n 维紧 Kähler 流形, $D = \sum_{j=1}^N D_j$ 是 X 上具有简单正交支撑的约化整除子, 设 F 是半正全纯线丛, s 是 F^m 的全纯截面, 使得 $s^{-1}(0)$ 不包含 lc 对 (X, D) 的 lc 中心 (即 $D_{i_1} \cap \cdots \cap D_{i_k}$ 的连通分支). 则对任意 $q \geq 0$, 由张量 s 诱导的映射

$$\otimes s : H^q(X, K_X \otimes [D] \otimes F) \rightarrow H^q(X, K_X \otimes [D] \otimes F^{m+1})$$

是单射.

当 X 是射影流形、 F 半丰沛时, Fujino 用 Hodge 理论证明了上述单射定理成立. 当 X 是紧 Kähler 流形时, 对 plt 的情形, 即对任意的 $i \neq j$, 都有 $D_i \cap D_j = \emptyset$, Matsumura 用加细 Hard Lefschetz 定理和调和表示证明了猜想成立 (参见文献 [51]), 陈子安 -Choi 用他们建立和发展的 lc 测度和解析伴随理想层推广了 Matsumura 的结果, 得到了带乘子理想层的单射定理, 此时 F 是拟有效线丛, 奇异度量的奇点至少需要是解析奇点并具有其他的一些性质 (参见文献 [10]). Fujino 猜想的完全解决分别由曹俊彦 -Păun 在文献 [9] 中和陈子安 -Choi-Matsumura 在文献 [11] 中独立给出. 这些工作都使用了 Hodge 分解和 L^2 理论, 曹俊彦 -Păun 的工作还通过考虑锥奇点, 得到了某种 $\partial\bar{\partial}$ -引理 (参见文献 [48]). 根据文献 [11, 注 3.4.3], 当度量具有解析奇点并满足一些额外假设时, 相应的带乘子理想层的单射猜想仍然成立.

对具有任意奇性的 Hermite 度量, 曹俊彦 -Păun 在文献 [9] 中提出了下述问题:

猜想 2.2 ^[9] 设 (X, ω) 是 n 维紧 Kähler 流形, D 是 X 上具有简单正交支撑的约化整除子, 设 F 是 X 上的全纯线丛, h 是 F 上的奇异度量, 满足 $i\Theta_h \geq 0$, 假设 $\mathcal{I}(h) = \mathcal{I}(h \cdot e^{-(1-\varepsilon)\log|s_D|^2})$ 对任意 $\varepsilon > 0$ 成立, 其中 s_D 是 D 的典则截面. 设 s 是 F^m 的全纯截面, $|s|_{h^m} < +\infty$ 逐点成立且 $s^{-1}(0)$ 不包含 lc 对 (X, D) 的 lc 中心. 则对任意 q , 下列由张量 s 诱导的映射是单射:

$$\otimes s : H^q(X, K_X \otimes [D] \otimes F \otimes \mathcal{I}(h)) \rightarrow H^q(X, K_X \otimes [D] \otimes F^{m+1} \otimes \mathcal{I}(h^{m+1})).$$

在本小节中, 我们首先用定理 2.4 给出 Matsumura 提出的一个问题 (参见文献 [51, 问题 3.18]) 的肯定回答, 具体来讲, 我们得到:

定理 2.6 设 (X, ω) 是 n 维紧 Kähler 流形, (L, h) 是 X 上的奇异 Hermite 线丛, 设 $i\Theta_{L,h} \geq 0$, 则映射 $*$: $\mathcal{H}_{h,\omega}^{n,q}(X, L) \rightarrow H^0(X, \Omega_X^{n-q} \otimes L \otimes \mathcal{I}(h))$ 是良定义的, 从而调和形式是光滑的.

然后借助 Demailly 逼近定理 (参见文献 [16, 73]), 类似周向宇 - 朱朗峰得到另一种同时逼近两个度量的引理, 再结合 Matsumura 的想法, 借助乘子理想层的强开性, 在一种特殊情形下回答了曹俊

彦-Păun 猜想.

定理 2.7 设 (X, ω) 是 n 维紧 Kähler 流形, $D = \sum_{j=1}^N D_j$ 是 X 上具有简单正交支撑的约化整除子, 设 F 和 M 是 X 上具有奇异度量 h_F 和 h_M 的线丛, 满足存在 $b, C > 0$, 使得

$$i\Theta_{h_F} \geq 0, \quad i\Theta_{h_F} - bi\Theta_{h_M} \geq 0, \quad i\Theta_{h_M} \geq -C\omega,$$

以及对任意 $\varepsilon \in (0, 1)$, 有

$$\mathcal{I}(h_F h_M g_0^{1-\varepsilon}) = \mathcal{I}(h_F h_M),$$

其中 g_0 是由 D 的典则截面诱导的度量. 假设 (X, D) 是 plt 对, 并且度量 h_F 和 h_M 满足限制条件

$$\forall i, \quad h_F h_M|_{D_i} \neq +\infty, \quad \mathcal{O}_{D_i} \otimes \mathcal{I}(h_F) = \mathcal{I}(h_F|_{D_i}), \quad \mathcal{O}_{D_i} \otimes \mathcal{I}(h_F h_M) = \mathcal{I}(h_F h_M|_{D_i})$$

以及可积性条件

$$\mathcal{I}(h_F) = \mathcal{O}_X.$$

设 s 是 M 的全纯截面, 且 $D_i \not\subseteq s^{-1}(0)$, 设 $\sup_X |s|_{h_M} < +\infty$. 则对任意 $q \geq 0$, 由张量 s 诱导的映射

$$\otimes s : H^q(X, K_X \otimes [D] \otimes F \otimes \mathcal{I}(h_F)) \rightarrow H^q(X, K_X \otimes [D] \otimes F \otimes M \otimes \mathcal{I}(h_F h_M))$$

是单射.

2.2.2 向量丛的单射定理

用解析方法证明带奇异度量线丛的单射定理一般需要使用 Demailly 等奇性逼近 (equisingular approximation) 结合调和积分的技巧, 或者像文献 [8, 74] 中, 使用扭曲 Bochner-Kodaira-Nakano 恒等式, 通过解 $\bar{\partial}$ 方程证明延拓定理的方法. 然而这些技巧一般在 L^2 型 Nakano 半正向量丛上无法使用, 因为此时没有良好的逼近序列. 基于此, 关启安 - 秘志桐 - 袁铮在文献 [38] 中受文献 [12] 和 Demailly 逼近定理的启发, 定义了一种新的奇异 Nakano 半正度量, 对这种度量研究了极小 L^2 积分, 并在文献 [37] 中得到了最优延拓. 我们使用他们定义的向量丛奇异度量, 结合文献 [74] 的方法, 证明单射定理.

定义 2.7 ^[37] 设 E 是 Hermite 流形 (X, ω) 上的全纯向量丛, h 是 E 上的一个奇异度量. 设 θ 是 T_X 上的具有连续系数的 Hermite 形式, 称 h 是逼近型 θ -Nakano 半正的, 如果满足下列条件:

- (1) 存在一列 X 的相对紧子集 $\{X_j\}_{j=1}^{+\infty}$, 使得 $X_1 \subseteq X_2 \subseteq \cdots \subseteq X_j \subseteq \cdots$, 且 $\bigcup_{j=1}^{+\infty} X_j = X$.
- (2) 对任意 X_j , 存在一列 X_j 上的 C^2 Hermite 度量 $\{h_{j,s}\}_{s=1}^{+\infty}$, 使得在 $X_j \setminus \Sigma$ 上, 有 $\lim_{s \rightarrow +\infty} h_{j,s} = h$, 其中 Σ 是 X 的一个零测闭子集.
- (3) 对任意 X_j , 存在 $\overline{X_j}$ 上的连续函数 λ_j 和 $\lambda_{j,s}$ 使得
 - (a) 对任意 $x \in X_j$, 任意 $e_x \in E_x$ 和任意 s , 都有 $|e_x|_{h_{j,s}} \leq |e_x|_{h_{j,s+1}}$;
 - (b) 在 X_j 上, $i\Theta_{E, h_{j,s}} \geq_{Nak} (\theta - \lambda_{j,s}\omega) \otimes \text{Id}_E$;
 - (c) 在 X_j 上, $\lambda_{j,s}$ 几乎处处收敛到 0;
 - (d) 在 X_j 上, 对任意 s , $0 \leq \lambda_{j,s} \leq \lambda_j$; 特别地, 当 $\theta = 0$ 时, 称 h 是逼近型 Nakano 半正的.

可以证明逼近型 Nakano 半正度量一定是 L^2 型 Nakano 半正的, 从而局部可以解方程, 且 $\mathcal{E}(h)$ 是凝聚的. 并且对 θ -多次调和函数 ψ , 即 $\theta + i\partial\bar{\partial}\psi \geq 0$, 由 Demailly 逼近定理 (参见文献 [16]) 可知 $e^{-\psi}$ 是平凡线丛上的逼近型 $-\theta$ -Nakano 半正的奇异度量. 这样文献 [74] 中使用的引理对向量丛奇异度量也成立. 结合文献 [37, 74] 的证明和技巧, 可以得到下列向量丛的延拓 (单射) 定理.

定理 2.8 设 (X, ω) 是 n 维全纯凸 Kähler 流形, E 是 X 上的全纯向量丛, h 是 E 上的逼近型 θ -Nakano 半正奇异 Hermite 度量, 其中 θ 是 T_X 上的具有连续系数的 Hermite 形式. 设 ψ 是 X 上的 θ -多次调和函数, 如果对某个常数 $\alpha > 0$, $(1 + \alpha)\psi$ 也是 θ -多次调和函数, 则对任意 q , 由自然的包含映射 $\mathcal{E}(he^{-\psi}) \rightarrow \mathcal{E}(h)$ 诱导的同态

$$H^q(X, K_X \otimes \mathcal{E}(he^{-\psi})) \rightarrow H^q(X, K_X \otimes \mathcal{E}(h))$$

是单射. 换句话说, 由自然的满射 $\mathcal{E}(h) \rightarrow \mathcal{E}(h)/\mathcal{E}(he^{-\psi})$ 诱导的映射

$$H^q(X, K_X \otimes \mathcal{E}(h)) \rightarrow H^q(X, K_X \otimes \mathcal{E}(h)/\mathcal{E}(he^{-\psi}))$$

是满射.

作为应用, 可以得到单射定理:

定理 2.9 设 X 是全纯凸 Kähler 流形, E 是 X 上的全纯向量丛, h 是 E 上的逼近型 θ -Nakano 半正奇异 Hermite 度量, 其中 θ 是 T_X 上的具有连续系数的半正 Hermite 形式. M 是 X 上的全纯线丛, h_M 是 M 上光滑 Hermite 度量. 假设存在常数 $b > 0$, 满足 $b\theta \geq i\Theta_{h_M}$, 设 s 是 M 的非零全纯截面, 则对任意 q , 由张量 s 诱导的映射

$$\otimes s : H^q(X, K_X \otimes \mathcal{E}(h)) \rightarrow H^q(X, K_X \otimes \mathcal{E}(h) \otimes M)$$

是单射.

2.3 消灭定理

消灭定理是解析几何与代数几何中非常重要的工具, 可以用来证明一些很深刻的结果 (参见文献 [1, 18, 45, 46]). 作为同构定理和单射定理的应用, 我们在本小节中介绍一些消灭定理.

2.3.1 Kollár-Nadel-Ohsawa 型消灭定理

在文献 [50] 中, Matsumura 通过 Takegoshi 在文献 [66] 中发展的调和积分理论, 用计算 Čech 上同调群的方法给出了上同调群的分解定理, 并且作为应用, 证明了一个单射定理和 Kollár-Ohsawa 型的消灭定理. 我们可以在定理 2.4 的帮助下, 推广这些结果到奇异度量的情形.

定理 2.10 设 $f : X \rightarrow Y$ 是从 Kähler 流形 X 到复空间 Y 的逆紧的全纯满射, L 是 X 上具有奇异度量 h 的全纯线丛, $i\Theta_{L,h} \geq 0$, 则对 $p, q \geq 0$, 存在自然映射

$$\varphi_{p,q} : H^p(Y, R^q f_*(K_X \otimes L \otimes \mathcal{I}(h))) \rightarrow H^{p+q}(X, K_X \otimes L \otimes \mathcal{I}(h))$$

满足以下性质:

- (1) 映射 $\varphi_{p,q}$ 是单射.
- (2) $\text{Im } \varphi_{p,q} \cap \text{Im } \varphi_{p',q'} = 0$, 如果 $p \neq p'$ 且 $p + q = p' + q'$.

我们可以得到拟有效线丛的分解和单射定理:

定理 2.11 在和定理 2.10 同样的条件下,

(1) 如果 X 是紧的, 则有直和分解:

$$H^l(X, K_X \otimes L \otimes \mathcal{I}(h)) = \bigoplus_{p+q=l} \text{Im } \varphi_{p,q};$$

(2) 如果 X 是全纯凸的, 则对 X 上具有光滑半正度量 h_M 的全纯线丛 M , 如果存在 $b > 0$ 使得 h_M 满足 $i\Theta_h - bi\Theta_{h_M} \geq 0$, 则对 M 的非零截面 s , 任意 $q \geq 0$, 由张量 s 诱导的映射

$$\otimes s : H^p(Y, R^q f_*(K_X \otimes L \otimes \mathcal{I}(h))) \rightarrow H^p(Y, R^q f_*(K_X \otimes L \otimes \mathcal{I}(h) \otimes M))$$

是单射.

注意上述单射定理 $p = 0$ 的情形在文献 [52, 74] 中已经证明了, 而且我们不能假设 h_M 也是奇异度量, 这是因为在 Demailly 等奇性逼近定理中, 我们不能同时逼近两个权函数, 从而在定理 2.4 中无法同时逼近两个权函数.

通过结合定理 2.10 和文献 [50, 54] 中的想法, 我们可以证明下述 Kollár-Nadel-Ohsawa 型的消灭定理. 关于这种类型的消灭定理, 之前已有很多结果. 例如文献 [57] 中对 $q = 0$ 证明了解析和光滑的情形, 文献 [43] 中对 $q \geq 0$ 证明了射影和光滑的情形, 文献 [50] 中对 $q \geq 0$ 证明了解析和光滑的情形, 文献 [29, 30] 中对 $q \geq 0$ 证明了射影和奇异的情形, 以及文献 [54] 中对 $q = 0$ 证明了解析和奇异的情形. 我们的定理将上述结果统一到 $q \geq 0$ 时解析和奇异的情形.

定理 2.12 设 X 是弱拟凸 Kähler 流形, $f : X \rightarrow Y$ 是到复空间 Y 的逆紧全纯满射, Y 具有 Kähler 度量 σ , 设 L 是 X 上具有奇异度量 h 的线丛, 并且 h 满足 $i\Theta_{L,h} \geq f^*\sigma$, 则

$$H^p(Y, R^q f_*(K_X \otimes L \otimes \mathcal{I}(h))) = 0, \quad \forall p > 0, \quad \forall q \geq 0.$$

特别地, 我们有同构

$$H^0(Y, R^q f_*(K_X \otimes L \otimes \mathcal{I}(h))) \cong H^q(X, K_X \otimes L \otimes \mathcal{I}(h)).$$

2.3.2 对数层的 Nadel-Bogomolov 型消灭定理

用之前提到的文献 [41, 68] 中的方法, 结合定理 2.5, 可以得到下列对数层的 Nadel-Bogomolov 型 (参见文献 [4, 18]) 消灭定理.

定理 2.13 设 (X, ω) 是 n 维全纯凸 Kähler 流形, $D = \sum_{j=1}^s D_j$ 是 X 上具有简单正交支撑的约化整除子, $L \rightarrow X$ 是具有奇异度量 h 的全纯线丛, 存在连续正值函数 γ 使得 $i\Theta_{L,h} \geq \gamma\omega$. 假设对任意 $\varepsilon \in (0, 1)$, 有 $\mathcal{I}(h) = \mathcal{I}(hg_0^{1-\varepsilon})$, 其中 g_0 是由 D 的典则截面定义的奇异度量, 则有

$$H^q(X, K_X \otimes [D] \otimes L \otimes \mathcal{I}(h)) = 0, \quad \forall q \geq 1,$$

$$H^n(X, \Omega_X^p(\log D) \otimes L \otimes \mathcal{I}(h)) = 0, \quad \forall p \geq 1.$$

定理 2.14 设 (X, ω) 是 n 维全纯凸 Kähler 流形, $D = \sum_{j=1}^s D_j$ 是 X 上具有简单正交支撑的约化整除子, g_0 是由 D 的典则截面定义的奇异度量, $L \rightarrow X$ 是具有奇异度量 h 的全纯线丛, 存在连续正值函数 γ 使得 $i\Theta_{L,h} \geq \gamma\omega$. A 是 X 上的全纯线丛, $\Delta = \sum_{j=1}^s a_j D_j$ 是 $\mathbb{R}$ -除子.

(1) 假设存在 $\varepsilon \in (0, 1]$, 使得 $\mathcal{I}(h) = \mathcal{I}(hg_0^{1-\varepsilon})$. 如果存在 $a_j \in [\varepsilon, 1]$, 使得 $A \otimes \mathcal{O}_X(\Delta)$ 是半正的, 则有

$$\begin{aligned} H^q(X, K_X \otimes [D] \otimes A \otimes L \otimes \mathcal{I}(h)) &= 0, \quad \forall q \geq 1, \\ H^n(X, \Omega_X^p(\log D) \otimes A \otimes L \otimes \mathcal{I}(h)) &= 0, \quad \forall p \geq 1. \end{aligned}$$

(2) 如果 $A \otimes \mathcal{O}_X(D)$ 是半正的, 则

$$\begin{aligned} H^q(X, K_X \otimes [D] \otimes A \otimes L \otimes \mathcal{I}(h)) &= 0, \quad \forall q \geq 1, \\ H^n(X, \Omega_X^p(\log D) \otimes A \otimes L \otimes \mathcal{I}(h)) &= 0, \quad \forall p \geq 1. \end{aligned}$$

特别地, 取 $A = [-D]$, 得到

$$H^n(X, \Omega_X^p(\log D) \otimes (L \otimes [D]^{-1}) \otimes \mathcal{I}(h)) = 0, \quad \forall p \geq 1.$$

当 X 紧、乘子理想层平凡时, 可以得到 Bogomolov 型消灭定理:

$$H^0(X, \Omega_X^p(\log D) \otimes L^{-1}) = H^n(X, \Omega_X^{n-p}(\log D) \otimes (L \otimes [D]^{-1})) = 0, \quad \forall p < n.$$

定义 2.8 设 X 是 n 维复流形, $A = \sum_{j=1}^s a_j A_j \rightarrow X$ 是全纯 $\mathbb{R}$ - 线丛, 称 A 是 k - 正的, 如果存在线丛 A_j 上的光滑度量 h_j , 使得 A 上的诱导度量 h 的曲率满足 $i\Theta_{A,h} = \sum_{j=1}^s a_j i\Theta_{A_j,h_j} \geq 0$ 且在 X 上的每个点有至少 $n - k + 1$ 个正特征值.

对 k - 正线丛, 可以得到类似关于数量维数的 Kawamata-Viehweg 型消灭定理和 Bogomolov 型消灭定理.

定理 2.15 设 (X, ω) 是 n 维全纯凸 Kähler 流形, $D = \sum_{j=1}^s D_j$ 是 X 上具有简单正交支撑的约化整除子, g_0 是由 D 的典则截面定义的奇异度量, $(L, h) \rightarrow X$ 是拟有效线丛, A 是 X 上的全纯线丛, $\Delta = \sum_{j=1}^s a_j D_j$ 是 $\mathbb{R}$ - 除子, N 是 X 上的线丛, 满足在任意相对紧集上, 对任意常数 $\gamma > 0$, 都存在光滑度量 $h_{N,\gamma}$, 使得 $i\Theta_{N,h_{N,\gamma}} \geq -\gamma\omega$. 假设存在 $\varepsilon \in (0, 1]$, 使 $\mathcal{I}(h) = \mathcal{I}(hg_0^{1-\varepsilon})$, 如果存在 $a_j \in [\varepsilon, 1]$, 使得 $A \otimes \mathcal{O}_X(\Delta)$ 是 k - 正的, 则有

$$\begin{aligned} H^q(X, K_X \otimes [D] \otimes A \otimes N \otimes L \otimes \mathcal{I}(h)) &= 0, \quad \forall q \geq k, \\ H^n(X, \Omega_X^p(\log D) \otimes A \otimes N \otimes L \otimes \mathcal{I}(h)) &= 0, \quad \forall p \geq k. \end{aligned}$$

需要指出的是, 不考虑 lc 对时, 在紧 Kähler 流形上考虑拟有效线丛, 结合曹俊彦的结果 (参见文献 [7]) 和强开性, 可以得到关于拟有效线丛的数量维数的 Kawamata-Viehweg 型定理, 类似地有 Bogomolov 型消灭定理 (参见文献 [47, 70]). 更早期的结果还可以参见文献 [5, 20, 55] 等. 在全纯凸 Kähler 流形上, 孟宪奎 - 周向宇也给出了关于数量维数的消灭定理, 并指出 Nadel 消灭定理在全纯凸 Hermite 流形上仍然成立 (参见文献 [53]). 用孟宪奎 - 周向宇的方法, 可以得到:

定理 2.16 设 (X, ω) 是 n 维连通全纯凸 Kähler 流形, L 是 X 上的全纯线丛, h 是 L 上的奇异度量, $i\Theta_{L,h} \geq 0$. 假设 h 在解析子集 Z 外是光滑的, 并且在某点 $x_0 \in X \setminus Z$ 处有 $(i\Theta_{L,h})^l \neq 0$, 则

$$H^n(X, \Omega_X^p \otimes L \otimes \mathcal{I}(h)) = 0, \quad \forall p \geq n - l + 1.$$

对射影流形上的向量丛, 有类似于线丛的消灭定理.

定理 2.17 设 (X, ω) 是 n 维射影流形, $D = \sum_{j=1}^s D_j$ 是 X 上具有简单正交支撑的约化整除子, E 是 X 上的全纯向量丛, h 是 E 上的奇异 Hermite 度量. 设 h 是 L^2 型 Nakano 半正的, 并且对任意 $\varepsilon \in (0, 1)$, 有 $\mathcal{E}(h) = \mathcal{E}(hg_0^{1-\varepsilon}/g^{1-\varepsilon})$, 其中 g_0 是由 D 的典则截面定义的奇异度量, g 是 D 上的光滑度量, 则

(1) 如果 h 是严格 L^2 型 Nakano $3\rho_\omega$ - 正, 则

$$H^q(X, K_X \otimes [D] \otimes \mathcal{E}(h)) = 0, \quad \forall q \geq 1;$$

(2) 如果 h 是严格对偶 Nakano $3\rho_\omega$ - 正, 则

$$H^n(X, \Omega_X^p(\log D) \otimes \mathcal{E}(h)) = 0, \quad \forall p \geq 1.$$

类似地, 对向量丛同样可以得到射影流形上形如定理 2.15 的消灭定理 (参见文献 [68]).

因为当 h 是 E 上的严格 Griffiths δ_ω - 正度量时, $E \otimes \det E$ 上的度量 $h \otimes \det h$ 是 L^2 型严格 Nakano $(r+1)\delta_\omega$ - 正并且严格对偶 Nakano $(r+1)\delta_\omega$ - 正, 这里 $r = \text{rank } E$, 所以有直接推论:

定理 2.18 设 (X, ω) 是 n 维射影流形, $D = \sum_{j=1}^s D_j$ 是 X 上具有简单正交支撑的约化整除子, E 是 X 上的全纯向量丛, h 是 E 上的奇异 Hermite 度量. 设 h 是严格 Griffiths δ_ω - 正的, 并且对任意 $\varepsilon \in (0, 1)$, 有 $\mathcal{E}(h \otimes \det h) = \mathcal{E}(h \otimes \det hg_0^{1-\varepsilon}/g^{1-\varepsilon})$, 其中 g_0 是由 D 的典则截面定义的奇异度量, g 是 D 上的光滑度量, 则

$$H^q(X, K_X \otimes [D] \otimes \mathcal{E}(h \otimes \det h)) = 0, \quad \forall q \geq 1,$$

$$H^n(X, \Omega_X^p(\log D) \otimes \mathcal{E}(h \otimes \det h)) = 0, \quad \forall p \geq 1.$$

2.3.3 向量丛的 Kawamata-Viehweg-Nadel 型消灭定理

类似文献 [74] 中得到的消灭定理, 也可以由定理 2.9 得到下面的消灭定理.

定理 2.19 设 (X, ω) 是 n 维复射影流形, E 是 X 上的全纯向量丛, h 是 E 上的逼近型 θ -Nakano 半正奇异 Hermite 度量, 其中 θ 是 T_X 上的具有连续系数的 Hermite 形式. M 是 X 上的全纯线丛, h_M 是 M 上光滑 Hermite 度量. 假设存在常数 $b > 0$, 满足 $b\theta \geq i\Theta_{h_M} \geq 0$, 则有

$$H^q(X, K_X \otimes \mathcal{E}(h)) = 0, \quad \forall q > n - \kappa(M).$$

3 含极限的层上调

顺极限与逆极限是在范畴论中被人们广泛讨论的一类函子, 又分别称作归纳极限 (inductive limit) 和投射极限 (projective limit), 直观而言它们允许将若干相关对象“粘合在一起”, 而精确的粘合过程则由对象之间的态射指定. 在考虑层的上调时, 我们往往会遇到计算层递增列的并的上调, 例如乘子理想层的递增并, 或者关于空间递增列的并的层上调, 例如 Stein 空间的递增并. 这涉及到层上调与顺逆极限的交换性. 一方面, 递增并是顺极限的特例, 有关顺极限层上调的交换性可追溯到文献 [31] 与 [36]. 另一方面, 在研究 Stein 空间时, 一个自然的问题便是: Stein 空间中一

列 Stein 开集的递增并是否仍然保持 Stein? 在文献 [65] 中得到了该问题成立的等价刻画, 并将之推广到 q -完备性的相应问题, 其关键一步便是将空间递增并与层上同调的交换性转变为对逆极限的一阶导出函子的研究, 即下面介绍的定理 3.2 与定理 3.3. 本节旨在综合整理以上问题, 通过代数方法统一处理并给出证明.

一个从范畴 $\mathcal{C}$ 到范畴 $\mathcal{D}$ 的函子 $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ 由以下赋值组成: (1) 对于每个 $X \in \mathcal{C}$, 给定 $F(X) \in \mathcal{D}$; (2) 对于每个 $\mathcal{C}$ 中的态射 $\varphi : X \rightarrow Y$, 给定 $\mathcal{D}$ 中的态射 $F(\varphi) : F(X) \rightarrow F(Y)$. 我们视层为函子抑或 étale 空间, 层的态射分别对应函子的自然变换抑或 étale 空间的连续映射. 具体来说, 拓扑空间 X 上 Abel 层的态射 $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ 由在所有开子集 $U \subseteq X$ 上给定一个 Abel 群同态 $\varphi_U : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{G}(U)$ 来决定. 按 Bourbaki 的约定 (参见文献 [6]), 称一个拓扑空间是局部紧的, 如果它是 Hausdorff 的且能被一族相对紧开集覆盖.

3.1 层上同调与顺极限

命 $(X, \mathcal{O}_X)$ 为一个戴环空间 (ringed space), 命 $\mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}_2 \subseteq \cdots \subseteq \mathcal{F}_k \subseteq \cdots$ 为 $\mathcal{O}_X$ -模层 (sheaf of $\mathcal{O}_X$ -modules) 的升序链. 于是称

$$\varinjlim \mathcal{F}_k := \bigcup_{k \geq 1} \mathcal{F}_k$$

是滤子系 $\{\mathcal{F}_k\}$ 的顺极限.

考虑如下 Abel 群的同态链: $A_1 \xrightarrow{\varphi_1} A_2 \xrightarrow{\varphi_2} \cdots \rightarrow A_k \xrightarrow{\varphi_k} \cdots$, 于是称

$$\varinjlim A_k := \left\{ (a_k) \in \bigoplus_{k \geq 1} A_k / \sim \mid (a_k) \sim (b_k) \Leftrightarrow \begin{array}{l} \forall n \geq 1, \exists m \geq n \text{ 使得} \\ \sum_{j=1}^m \varphi_{m+1} \circ \cdots \circ \varphi_j(a_j - b_j) = 0 \end{array} \right\}$$

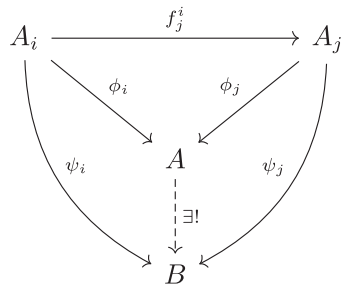
是滤子系 $\{A_k\}$ 的顺极限.

我们由上述两个例子引入顺极限的定义:

定义 3.1 命 $\mathcal{C}$ 为一个范畴, $(I, \leq)$ 为一偏序集. 给定一族 $\{A_i\}_{i \in I} \subseteq \mathcal{C}$, 对于 I 中每组 $i \leq j$ 给定态射 $f_j^i : A_i \rightarrow A_j$. $(\{A_i\}_{i \in I}, \{f_j^i\}_{i \leq j \in I})$ 称作滤子系 (filtered system), 如果

- (1) $\forall i, j \in I, \exists k \in I$, 使得 $i \leq k, j \leq k$,
- (2) $f_i^i = \text{id}_{A_i}, \forall i$,
- (3) $f_k^i = f_k^j \circ f_j^i, \forall i \leq j \leq k$.

该 $(\{A_i\}, \{f_j^i\})$ 的顺极限 (direct limit) 是指 (若存在) 满足下图所示的泛性质的对象 $A = \varinjlim A_i \in \mathcal{C}$.



一族 $\Phi \subseteq \{X \text{ 的闭子集}\}$ 称为支撑族 (*supporting family*), 如果满足如下三个条件:

- (1) $(\Phi, \subseteq)$ 构成一个闭集的滤子系;
- (2) $A \in \Phi, B \subseteq A \implies \overline{B} \in \Phi$;
- (3) Φ 是“仿紧的 (paracompact)”, 亦即 $\forall A \in \Phi, \exists B \in \Phi$, 使得 $A \subseteq \overset{\circ}{B} \subseteq B$.

如果还有 $\Phi \subseteq \{X \text{ 的紧子集}\}$, 则称 Φ 是紧致的. 为了避免额外讨论, 我们总假定 $\Phi \neq \{\emptyset\}$. 给定一个支撑族 Φ , 可定义一个层 $\mathcal{F}$ 相对于 Φ 的整体截面如下:

$$\Gamma_{\Phi}(X, \mathcal{F}) := \bigcup_{A \in \Phi} \text{Ker}(\Gamma(X, \mathcal{F}) \rightarrow \Gamma(X \setminus A, \mathcal{F})).$$

注意到 $\Gamma_{\Phi}(X, -)$ 是从 Abel 层范畴 $\text{Shv}(X)$ 到 Abel 群范畴 $\mathbf{Ab}$ 的左正合函子. 因此, 我们可以定义携支撑的 q 阶层上同调 (q -th sheaf cohomology with supports) 如下:

$$H_{\Phi}^q(X, \mathcal{F}) := H^q R\Gamma_{\Phi}(X, \mathcal{F}),$$

其中 $R\Gamma_{\Phi}(X, -) : D_+(\text{Shv}(X)) \rightarrow D_+(\mathbf{Ab})$ 是由 $\Gamma_{\Phi}(X, -)$ 诱导的导出函子 (derived functor). 特别地, 有 $H_{\Phi}^0(X, \mathcal{F}) = \Gamma_{\Phi}(X, \mathcal{F})$. 有关顺极限与携支撑的层上同调的交换性, 我们有如下基本结果:

定理 3.1 命 $(X, \mathcal{O}_X, \Phi)$ 为一携紧致族的局部紧戴环空间, 命 $\{\mathcal{F}_k\}_{k \in I}$ 为一 $\mathcal{O}_X$ -模层的滤子系, 则对任意 $q \geq 0$, 正则映射 $\varinjlim H_{\Phi}^q(X, \mathcal{F}_k) \rightarrow H_{\Phi}^q(X, \varinjlim \mathcal{F}_k)$ 是一个 Abel 群同构.

若取 $\Phi = \{\text{supp}(\mathcal{F}) : \mathcal{F} \in \text{Shv}(X)\} = \{X \text{ 的闭子集}\}$, 显然有 $H_{\Phi}^q(X, \mathcal{F}) = H^q(X, \mathcal{F})$. 另外, 如果 X 是紧致的, 则 Φ 总是一个紧致族. 定理 3.1 的证明方法来源于文献 [31].

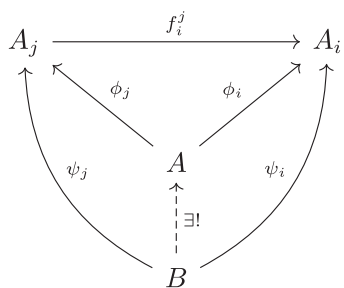
3.2 层上同调与逆极限

仿照顺极限, 我们有如下定义:

定义 3.2 命 $\mathcal{C}$ 为一个范畴, 命 $(I, \leq)$ 为一个偏序集. 给定一族 $\{A_i\}_{i \in I} \subseteq \mathcal{C}$, 对于 I 中每组 $i \leq j$ 给定态射 $f_i^j : A_j \rightarrow A_i$. $(\{A_i\}_{i \in I}, \{f_i^j\}_{i \leq j \in I})$ 称作余滤子系 (*cofiltered system*), 如果

- (1) $\forall i, j \in I, \exists k \in I$ 使得 $k \leq i, k \leq j$,
- (2) $f_i^i = \text{id}_{A_i}, \forall i$,
- (3) $f_i^k = f_i^j \circ f_j^k, \forall i \leq j \leq k$.

该 $(\{A_i\}, \{f_i^j\})$ 的逆极限 (*inverse limit*) 是指 (若存在) 满足下图所示的泛性质的对象 $A = \varprojlim A_i \in \mathcal{C}$.



例如给定一个 Abel 群的同态链:

$$A_1 \xleftarrow{\varphi_2} A_2 \xleftarrow{\varphi_3} A_3 \xleftarrow{\varphi_4} \cdots,$$

则 $(\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}}, \{f_i^j := \varphi_{i+1} \circ \cdots \circ \varphi_j\}_{i < j} \cup \{f_k^k = \text{id}_{A_k}\}_{k \in \mathbb{N}})$ 成为一个余滤子系. 特别地, 有

$$\varprojlim_{k \in \mathbb{N}} A_k = \left\{ (a_k) \in \prod_{k \in \mathbb{N}} A_k \mid \varphi_{k+1}(a_{k+1}) = a_k, \forall k \geq 1 \right\}.$$

本节接下来的论述中, 我们取定 $I = \mathbb{N}$. 对于戴环空间 $(X, \mathcal{O}_X)$ 上两个 $\mathcal{O}_X$ -模层 $\mathcal{J}, \mathcal{F}$, 记 $\text{Ext}_{\mathcal{O}_X}^q(\mathcal{J}, \mathcal{F})$ 为 $\mathcal{J}$ 对 $\mathcal{F}$ 的第 q 阶扩展群. 若 $\{\mathcal{J}_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ 是一个 $\mathcal{O}_X$ -模层的滤子系, 易见

$$\{\text{Ext}_{\mathcal{O}_X}^q(\mathcal{J}_k, \mathcal{F})\}_{k \in \mathbb{N}}$$

构成了一个 Abel 群的余滤子系. 命 $R^1 \varprojlim$ 是逆极限函子诱导的第 1 阶导出函子. 我们将证明如下基本结果:

定理 3.2 命 $(X, \mathcal{O}_X)$ 为一个戴环空间, 命 $\{\mathcal{J}_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ 为一个 $\mathcal{O}_X$ -模层的余滤子系. 则对于任意 $q \geq 0$ 以及 $\mathcal{F} \in \text{Shv}(X, \mathcal{O}_X)$, 成立如下 Abel 群的短正合序列:

$$0 \longrightarrow R^1 \varprojlim \text{Ext}_{\mathcal{O}_X}^q(\mathcal{J}_k, \mathcal{F}) \longrightarrow \text{Ext}_{\mathcal{O}_X}^{q+1}(\varprojlim \mathcal{J}_k, \mathcal{F}) \longrightarrow \varprojlim \text{Ext}_{\mathcal{O}_X}^{q+1}(\mathcal{J}_k, \mathcal{F}) \longrightarrow 0.$$

特别地, 考虑 X 的开子空间升链 $X_1 \subseteq X_2 \subseteq \cdots \subseteq X_k \subseteq \cdots \subseteq X$. 命 $\iota_{k!} : \text{Shv}(X_k, \mathcal{O}_{X_k}) \rightarrow \text{Shv}(X, \mathcal{O}_X)$ 是开嵌入 $\iota_k : X_k \hookrightarrow X$ 诱导的零延拓 (extension by zeros) 函子. 取 $\mathcal{J}_k = \iota_{k!} \iota_k^* \mathcal{O}_X$, 则由定理 3.2 可推知:

推论 3.1 命 $(X, \mathcal{O}_X)$ 为一个戴环空间, 命 $X_1 \subseteq X_2 \subseteq \cdots \subseteq X_k \subseteq \cdots \subseteq X$ 为 X 的开子空间升链且 $\bigcup_1^\infty X_k = X$. 则对任意 $q \geq 0$ 以及 $\mathcal{F} \in \text{Shv}(X, \mathcal{O}_X)$, 成立如下 Abel 群的短正合列:

$$0 \longrightarrow R^1 \varprojlim H^q(X_k, \mathcal{F}) \longrightarrow H^{q+1}(X, \mathcal{F}) \longrightarrow \varprojlim H^{q+1}(X_k, \mathcal{F}) \longrightarrow 0.$$

在实际运用中, Abel 群 $H^q(X_k, \mathcal{F})$ 会带有拓扑向量空间结构. 例如考虑一个复空间 $(X, \mathcal{O}_X)$ 和其上的一个凝聚解析层 $\mathcal{F} \in \text{Coh}(X)$, 我们知道全纯函数芽层的紧 - 开拓扑会诱导 $H^q(X, \mathcal{F})$ 上的拓扑, 使得当 $q = 0$ 时它是一个 Fréchet 空间, 当 $q \geq 1$ 时它是一个 (LF)-空间, 亦即 Fréchet 空间族的顺极限. 根据 Palamodov 早先的工作 [59], 我们有如下对 $R^1 \varprojlim H^q(X_k, \mathcal{F})$ 的刻画:

定理 3.3 (拓扑 Mittag-Leffler 判别准则) 命 $\cdots \xrightarrow{\varphi_{k+1}^*} G_k \xrightarrow{\varphi_k^*} G_{k-1} \rightarrow \cdots \rightarrow G_2 \xrightarrow{\varphi_2^*} G_1$ 为拓扑向量空间的连续线性映射链. 对于 $j \geq k$, 记 $\phi_k^j = \varphi_k \circ \cdots \circ \varphi_{j-1} \circ \varphi_j$ 并且记

$$G = R^1 \varprojlim_k G_k,$$

则有如下结论成立:

(1) 若 $G = 0$, 则对任意 $i \in \mathbb{N}$ 以及任意含 0 的开邻域 $U \subseteq G_i$, 存在 $j \geq i$ 使得对任意 $k \geq j$, 成立 $\phi_i^j(G_j) \subseteq \phi_i^k(G_k) + U$.

(2) 若如下三个条件同时被满足, 则 $G = 0$.

(a) 对于任意 k , G_k 的拓扑是第一可数的, 亦即 0 点有可数邻域基;

(b) 对于任意 k , G_k 是一个完备的 Hausdorff 拓扑向量空间;

(c) 对于任意 $i \in \mathbb{N}$ 以及任意含 0 的开邻域 $U \subseteq G_i$, 存在 $j \geq i$ 使得对任意 $k \geq j$, 成立 $\phi_i^j(G_j) \subseteq \phi_i^k(G_k) + U$.

注意到定理 3.3 的条件 (a) + (b) $\iff$ 对任意 k , G_k 的拓扑由一个完备度量诱导. 部分人习惯将具完备度量的拓扑向量空间称作 F- 空间, 将局部凸的 F- 空间称作 Fréchet 空间.

3.3 定理的证明

我们先证定理 3.1 在 $q = 0$ 时的特殊情形:

引理 3.1 命 $(X, \mathcal{O}_X, \Phi)$ 是一个携紧支撑族的戴环空间, 命 $\{\mathcal{F}_k\}$ 是一个 $\mathcal{O}_X$ - 模层的滤子系. 则由 $\varinjlim$ 泛性质诱导的 Abel 群同态

$$\varinjlim \Gamma_\Phi(X, \mathcal{F}_k) \longrightarrow \Gamma_\Phi(X, \varinjlim \mathcal{F}_k)$$

是一个单射. 若 X 还是局部紧致的, 则上述同态是 Abel 群同构且对任意 Φ - 柔滑层族 $\{\mathcal{F}_k\}$, $\varinjlim \mathcal{F}_k$ 是 Φ - 柔滑的.

依据文献 [31] 中的定义, 拓扑空间 X 上的层 $\mathcal{F}$ 称为 Φ - 柔滑的 (Φ -soft), 如果对每个闭集 $A \in \Phi$ 截面限制映射 $\Gamma_\Phi(X, \mathcal{F}) \rightarrow \Gamma(A, \mathcal{F})$ 是满射. 对于一个 Φ - 柔滑层 $\mathcal{F}$, 总有 $H_\Phi^q(X, \mathcal{F}) = 0$ 对所有 $q \geq 1$ 成立.

引理 3.1 的证明 记 $\varphi_j^i : \mathcal{F}_i \rightarrow \mathcal{F}_j$ 为滤子系 $\{\mathcal{F}_k\}_{k \in I}$ 中的连接态射, 其中 $i \leq j \in I$. 简记 $\Gamma_\Phi = \Gamma_\Phi(X, -)$ 以及 $\Gamma = \Gamma(X, -)$. 注意到 Γ_Φ 在 X 的预 Abel 层范畴 $\text{Pres}(X)$ 上是良定义的. 因此有如下交换图:

$$\begin{array}{ccc} \Gamma(\varinjlim^{\text{pre}} \mathcal{F}_k) & \xrightarrow{\Gamma(a)} & \Gamma(\varinjlim \mathcal{F}_k) \\ \uparrow & & \uparrow \\ \varinjlim \Gamma_\Phi(\mathcal{F}_k) & \longrightarrow & \Gamma_\Phi(\varinjlim \mathcal{F}_k) \end{array},$$

其中, 作为范畴 $\text{Pres}(X)$ 中的预层同态, $a : \varinjlim^{\text{pre}} \mathcal{F}_k \rightarrow \varinjlim \mathcal{F}_k$ 表示层化 (sheafification). 对于

$$u = [u_p] \quad \text{和} \quad v = [v_q] \in \varinjlim_I \Gamma_\Phi(X, \mathcal{F}_*),$$

取代表元 $u_p \in \Gamma(X, \mathcal{F}_p)$, $v_q \in \Gamma(X, \mathcal{F}_q)$, 其中 $p, q \in I$, 满足对某两个 $A, A' \in \Phi$ 有 $u_p|_{X \setminus A} = 0$, $v_q|_{X \setminus A'} = 0$. 依据层的粘合公理 (gluing axiom), 等式 $\Gamma(a)(u) = \Gamma(a)(v)$ 成立当且仅当如下条件被满足:

$$\exists X \text{ 的覆盖 } \{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} \text{ 和子集 } \{i_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} \subseteq I, \text{ 使得 } \forall \lambda \in \Lambda, p, q \leq i_\lambda \text{ 且 } \varphi_{i_\lambda, U_\lambda}^p(u_p|_{U_\lambda}) = \varphi_{i_\lambda, U_\lambda}^q(v_q|_{U_\lambda}).$$

由于 $u_p|_{X \setminus A} = 0$ 以及 $v_q|_{X \setminus A'} = 0$, 不妨设 Λ 是有限集. 因此存在 $\{i_\lambda\}$ 的一个上界 $i \in I$, 从而对任意 $\lambda \in \Lambda$ 都有 $\varphi_{i, U_\lambda}^p(u_p|_{U_\lambda}) = \varphi_{i, U_\lambda}^q(v_q|_{U_\lambda})$. 再次运用粘合公理, 得到 $\Gamma(\varphi_i^p)(u_p) = \Gamma(\varphi_i^q)(v_q)$, 亦即 $[u] = [v]$. 于是引理中映射的单性得证.

假定 X 是局部紧致的, 现证引理中映射的满性.

取定一个截面 $\sigma \in \Gamma_\Phi(X, \varinjlim \mathcal{F})$, 由于 Φ 是紧致的且 X 是局部紧致的, 可以选取 X 的一个相对紧致的开集覆盖 $\{U_\lambda\}_{1 \leq \lambda \leq n}$ 使得 $\sigma|_{U_\lambda} = [\sigma_{k_\lambda}] \in \varinjlim \Gamma_\Phi(U_\lambda, \mathcal{F}_k)$, 其中对某个 $k_\lambda \in I$ 有代表元 $\sigma_{k_\lambda} \in \Gamma_\Phi(U_\lambda, \mathcal{F}_{k_\lambda})$. $\{\sigma_{k_\lambda}\}_{\lambda \in \Lambda}$ 须满足如下相容性条件:

$\forall x \in U_{\lambda\nu} := U_\lambda \cap U_\nu$, 其中 $1 \leq \lambda, \nu \leq n$, $\exists x$ 在 $U_{\lambda\nu}$ 中的开邻域 $W = W(\lambda, \nu, x)$ 使得对某个 $i = i(\lambda, \nu, x) \geq k_\lambda, k_\nu$ 有 $\varphi_{i,W}^{k_\lambda}(\sigma_{k_\lambda}|_W) = \varphi_{i,W}^{k_\nu}(\sigma_{k_\nu}|_W)$.

首先归纳地构造 $\{U_\lambda\}_1^n$ 的一个开加细 $\{V_\lambda\}_1^n$ 使得 $\bar{V}_\lambda \subseteq U_\lambda$. 命 $A_1 = X \setminus \bigcup_2^n U_\lambda$. 则 $A_1 \subseteq U_1$ 在 X 中是闭的进而是紧致的. 由 A_1 和 $\bar{U}_1$ 的紧致性, 可以选取开集 V_1 使得 $A_1 \subseteq V_1 \subseteq \bar{V}_1 \subseteq U_1$. 而且还有 $V_1 \cup \bigcup_2^n U_\lambda = X$. 归纳地进行上述过程可以得到 $V_1, \dots, V_n$, 即为所求.

现有 $\bigcup_{x \in U_{\lambda\nu}} W(\lambda, \nu, x) = U_{\lambda\nu} \supseteq \bar{V}_{\lambda\nu} \supseteq V_{\lambda\nu}$, 而 $\bar{V}_{\lambda\nu}$ 的紧性意味着 $\exists x_1, \dots, x_m \in U_{\lambda\nu}$ 以及 $W_\mu(\lambda, \nu) := V_{\lambda\nu} \cap W(\lambda, \nu, x_\mu)$, $1 \leq \mu \leq m$, 使得 $\bigcup_1^m W_\mu(\lambda, \nu) = V_{\lambda\nu}$. 故而对任一对 $k_\lambda, k_\nu \in I$, 可取 $i = i(\lambda, \nu) \in I$ 满足 $k_\lambda, k_\nu \leq i$, 使得对每个 $\mu \in [1, m]$ 有 $\varphi_{i,W_\mu}^{k_\lambda}(\sigma_{k_\lambda}|_{W_\mu}) = \varphi_{i,W_\mu}^{k_\nu}(\sigma_{k_\nu}|_{W_\mu})$. 由层 $\mathcal{F}_i$ 的粘合公理, 得到 $\varphi_{i,V_{\lambda\nu}}^{k_\lambda}(\sigma_{k_\lambda}|_{V_{\lambda\nu}}) = \varphi_{i,V_{\lambda\nu}}^{k_\nu}(\sigma_{k_\nu}|_{V_{\lambda\nu}})$. 进一步, 由于只有有限多种 (λ, ν) 的取法, 对于一族 $\{k_\lambda\}_1^n \subseteq I$, 同样可取 $i \in I$, 满足对 $\lambda \in \Lambda$ 有 $k_\lambda \leq i$, 使得 $\varphi_{i,V_\lambda}^{k_\lambda}(\sigma_{\lambda,k_\lambda}) \in \Gamma(V_\lambda, \mathcal{F}_i)$ 可粘成一个整体截面, $\sigma'_i \in \Gamma(X, \mathcal{F}_i)$ 满足 $\sigma'_i|_{V_\lambda} = \varphi_{i,V_\lambda}^{k_\lambda}(\sigma_{\lambda,k_\lambda})$, 从而 $\Gamma(a)([\sigma'_i]) = \sigma$. 于是引理中映射的满性得证.

余下验明 $\varinjlim$ 保持 Φ - 柔滑层. 命 $\{\mathcal{F}_k\}$ 是一个 Φ - 柔滑层族, 取 $Z \in \Phi$. 因 Z 是紧致的, 由上述的证明可知 $\varinjlim \Gamma(Z, \mathcal{F}_k) \xrightarrow{\sim} \Gamma(Z, \varinjlim \mathcal{F}_k)$. 故而有如下交换图:

$$\begin{array}{ccc} \varinjlim \Gamma_\Phi(X, \mathcal{F}_k) & \xrightarrow{\sim} & \Gamma_\Phi(X, \varinjlim \mathcal{F}_k) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \varinjlim \Gamma(Z, \mathcal{F}_k) & \xrightarrow{\sim} & \Gamma(Z, \varinjlim \mathcal{F}_k). \end{array}$$

因 $\mathcal{F}_k$ 是 Φ - 柔滑的且 $\varinjlim$ 是正合的, 左侧箭头是一个满射, 从而右侧箭头也是一个满射, 故 $\varinjlim \mathcal{F}_k$ 是 Φ - 柔滑的. $\square$

定理 3.1 的证明 记 $\mathcal{C}^I$ 为由 I 编序的范畴 $\mathcal{C}$ 的滤子系全体构成的范畴. 考虑如下两个复合函子:

$$\begin{aligned} \varinjlim \Gamma_\Phi : \mathrm{Shv}(X)^I &\rightarrow \mathbf{Ab}^I \rightarrow \mathbf{Ab}; \\ \Gamma_\Phi \varinjlim : \mathrm{Shv}(X)^I &\rightarrow \mathrm{Shv}(X) \rightarrow \mathbf{Ab}, \end{aligned}$$

它们都是左正合的, 故诱导了两个导出函子 $R(\varinjlim \Gamma_\Phi)$ 和 $R(\Gamma_\Phi \varinjlim) : D_+(\mathrm{Shv}(X)^I) \rightarrow D_+(\mathbf{Ab})$.

对于 $\{\mathcal{F}_k\} \in \mathrm{Shv}(X)^I$, 有如下等式成立:

$$\begin{aligned} R^q(\varinjlim \Gamma_\Phi)(\mathcal{F}_k) &\stackrel{(*)}{=} \varinjlim R^q \Gamma_\Phi(\mathcal{F}_k) = \varinjlim H_\Phi^q(X, \mathcal{F}_k), \\ R^q(\Gamma_\Phi \varinjlim)(\mathcal{F}_k) &\stackrel{(**)}{=} R^q \Gamma_\Phi(\varinjlim \mathcal{F}_k) = H_\Phi^q(X, \varinjlim \mathcal{F}_k), \end{aligned}$$

其中 $(*)$ 和 $(**)$ 归结到 $\varinjlim$ 的正合性和 Grothendieck 谱序列定理, 见下述引理 3.2. 根据引理 3.1, 得到

$$\varinjlim \Gamma_\Phi(\mathcal{F}_k) = R^0(\varinjlim \Gamma_\Phi)(\mathcal{F}_k) \simeq R^0(\Gamma_\Phi \varinjlim)(\mathcal{F}_k) = \Gamma_\Phi \varinjlim(\mathcal{F}_k),$$

因此由导出函子的唯一性, 得到

$$\varinjlim H_{\Phi}^q(X, \mathcal{F}_k) = R^q(\varinjlim \Gamma_{\Phi})(\mathcal{F}_k) \simeq R^q(\Gamma_{\Phi} \varinjlim)(\mathcal{F}_k) = H_{\Phi}^q(X, \varinjlim \mathcal{F}_k), \quad \forall q \geq 0. \quad \square$$

引理 3.2 (Grothendieck 谱序列定理) 命 $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ 为 Abel 范畴 (Abelian category), 其中 $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ 有足够多的内射对象 (injective object). 命 $F: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}, G: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$ 是两个左正合函子. 假定对于每个内射对象 $I \in \mathcal{A}$, 有 $F(I)$ 是 G -零调的. 则对于任意 $X \in \mathcal{A}$, 由 $E_2^{p,q} = R^p G(R^q F(X))$ 生成的谱序列 (spectral sequence) $E_{\bullet}^{\bullet}$ 有界且收敛到 $R^{p+q}(GF)(X)$.

同调代数中称对象 $B \in \mathcal{B}$ 是 G -零调的 (G -acyclic), 如果对任意 $q \geq 1$ 有 $R^q G(B) = 0$. 特别地, Φ -柔滑层是 Γ_{Φ} -零调的且包括了 Abel 范畴 $\text{Shv}(X)$ 中的内射对象, 从而引理 3.1 告诉我们 $\varinjlim$ 将 $\text{Shv}(X)$ 的一族内射对象映成 Γ_{Φ} -零调对象.

根据引理 3.2, 可给推论 3.1 一个直接证明如下:

推论 3.1 的证明 命 ${}^I\mathcal{C}$ 是由 I 编序的范畴 $\mathcal{C}$ 中余滤子系全体构成的范畴. 考虑左正合函子的复合

$${}^{\mathbb{N}}\text{Shv}(X, \mathcal{O}_X) \xrightarrow{\Gamma} {}^{\mathbb{N}}\mathbf{Ab} \xrightarrow{\varinjlim} \mathbf{Ab},$$

其中 $\Gamma: \{\mathcal{F}_k\}_{k \in \mathbb{N}} \mapsto \{\Gamma(X, \mathcal{F}_k)\}_{k \in \mathbb{N}}$. 由引理 3.2 可知 $R^p \varprojlim (R^q \Gamma(\{\mathcal{F}_k\}))$ 收敛到 $R^{p+q}(\varprojlim \Gamma)(\{\mathcal{F}_k\})$. 取 $\mathcal{F}_k = \iota_{k*} \iota_k^{-1} \mathcal{F}$, 其中 $\iota_k: X_k \hookrightarrow X$ 为开嵌入, 则有

$$\begin{aligned} E_2^{p,q} &= R^p \varprojlim (R^q \Gamma(\{\mathcal{F}_k\})) = R^p \varprojlim H^q(X, \iota_{k*} \iota_k^{-1} \mathcal{F}) = R^p \varprojlim H^q(X_k, \mathcal{F}); \\ R^{p+q}(\varprojlim \Gamma)(\{\mathcal{F}_k\}) &= R^{p+q} \left(\varprojlim \Gamma \circ \left(\prod_{k \in \mathbb{N}} \iota_{k*} \iota_k^{-1} \right) \right) (\mathcal{F}) \stackrel{(*)}{=} H^{p+q}(X, \mathcal{F}), \end{aligned}$$

其中 $(*)$ 归结到等式 $\varprojlim \Gamma(X, \iota_{k*} \iota_k^{-1} \mathcal{F}) = \varprojlim \Gamma(X_k, \mathcal{F}) = \Gamma(X, \mathcal{F})$. 通过计算导出函子 $R \varprojlim: D_+({}^{\mathbb{N}}\mathbf{Ab}) \rightarrow D_+(\mathbf{Ab})$ 可知当 $p \geq 2$ 时 $R^p \varprojlim = 0$ (见下述引理 3.3). 因此 $E_2^{p,q}$ 诱导的谱序列 $E_{\bullet}^{\bullet}$ 集中在第二页序, 亦即 $E_{\infty}^{p,q} = E_2^{p,q}$, 且当 $p \neq 0, 1$ 时 $E_{\infty}^{p,q} = 0$. 因此与 $E_{\infty}^{p,q}$ 关联的 $H^q(X, \mathcal{F})$ 的滤过 (filtration) 为

$$\begin{aligned} H^q(X, \mathcal{F}) &= F^0 H^q(X, \mathcal{F}) \supseteq F^1 H^q(X, \mathcal{F}) \supseteq F^2 H^q(X, \mathcal{F}) = 0, \\ \frac{F^0 H^q(X, \mathcal{F})}{F^1 H^q(X, \mathcal{F})} &= \varprojlim H^q(X_k, \mathcal{F}), \quad \frac{F^1 H^q(X, \mathcal{F})}{F^2 H^q(X, \mathcal{F})} = R^1 \varprojlim H^{q-1}(X_k, \mathcal{F}). \end{aligned}$$

进而对任意 $q \geq 0$, 可得如下正合列:

$$0 \longrightarrow R^1 \varprojlim H^q(X_k, \mathcal{F}) \longrightarrow H^{q+1}(X, \mathcal{F}) \longrightarrow \varprojlim H^{q+1}(X_k, \mathcal{F}) \longrightarrow 0. \quad \square$$

引理 3.3 命 $\cdots \xrightarrow{\varphi_{k+1}^k} G_k \xrightarrow{\varphi_k^k} G_{k-1} \rightarrow \cdots \rightarrow G_2 \xrightarrow{\varphi_2^1} G_1$ 为 Abel 群同态链, 定义如下 Abel 群同态:

$$\begin{aligned} \prod_{k \in \mathbb{N}} G_k &\xrightarrow{\Psi} \prod_{k \in \mathbb{N}} G_k, \\ (a_k)_{k \in \mathbb{N}} &\longmapsto (a_k - \varphi_{k+1}(a_{k+1}))_{k \in \mathbb{N}}, \end{aligned}$$

则有

$$R^q \varprojlim_{k \in \mathbb{N}} G_k = \begin{cases} \text{Ker}(\Psi), & q = 0; \\ \text{Coker}(\Psi), & q = 1; \\ 0, & q \geq 2. \end{cases}$$

证明 给定 $n \in \mathbb{N}$, 易见如下 Abel 群的短正合列:

$$0 \longrightarrow G_n \xrightarrow{f_n} G_1 \oplus \cdots \oplus G_n \xrightarrow{g_n} G_1 \oplus \cdots \oplus G_{n-1} \longrightarrow 0,$$

其中

$$\begin{aligned} f_n : a &\mapsto (\varphi_2 \circ \cdots \circ \varphi_n(a), \varphi_3 \circ \cdots \circ \varphi_n(a), \dots, \varphi_n(a), a), \\ g_n : (a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n) &\mapsto (a_1 - \varphi_2(a_2), a_2 - \varphi_3(a_3), \dots, a_{n-1} - \varphi_n(a_n), a_n). \end{aligned}$$

视 $\{G_1 \oplus \cdots \oplus G_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in {}^{\mathbb{N}}\mathbf{Ab}$, 其连接态射为嵌入

$$\begin{aligned} G_1 \oplus \cdots \oplus G_n &\hookrightarrow G_1 \oplus \cdots \oplus G_{n+1}, \\ (a_1, \dots, a_n) &\mapsto (a_1, \dots, a_n, 0), \end{aligned}$$

则显有 $\varprojlim(G_1 \oplus \cdots \oplus G_n) = \prod_{n \in \mathbb{N}} G_n$. 于是 $\varprojlim$ 诱导了如下长正合列:

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \varprojlim_{n \in \mathbb{N}} G_n \rightarrow \prod_{n \in \mathbb{N}} G_n \xrightarrow{\Psi} \prod_{n \in \mathbb{N}} G_n \rightarrow R^1 \varprojlim_{n \in \mathbb{N}} G_n \rightarrow R^1 \varprojlim G_1 \oplus \cdots \oplus G_n \rightarrow \\ \cdots \rightarrow R^{q-1} \varprojlim G_1 \oplus \cdots \oplus G_n \rightarrow R^q \varprojlim_{n \in \mathbb{N}} G_n \rightarrow R^q \varprojlim G_1 \oplus \cdots \oplus G_n, \quad q \geq 2. \end{aligned}$$

对于每个 $n \in \mathbb{N}$, 取 G_n 的一个内射分解 (injective resolution) $0 \rightarrow G_n \rightarrow I_n^0 \rightarrow I_n^1 \rightarrow \cdots$. 注意到对于每个 $k \geq 0$, $\{I_1^k \oplus \cdots \oplus I_n^k\}_{n \in \mathbb{N}}$ 在嵌入连接态射下构成了余滤子系且为 Abel 范畴 ${}^{\mathbb{N}}\mathbf{Ab}$ 中的内射对象, 因此有:

$$\begin{aligned} R^q \varprojlim G_1 \oplus \cdots \oplus G_n &= \frac{\text{Ker}(\varprojlim I_1^q \oplus \cdots \oplus I_n^q \rightarrow \varprojlim I_1^{q+1} \oplus \cdots \oplus I_n^{q+1})}{\text{Im}(\varprojlim I_1^{q-1} \oplus \cdots \oplus I_n^{q-1} \rightarrow \varprojlim I_1^q \oplus \cdots \oplus I_n^q)} \\ &= \frac{\text{Ker}(\prod_{n \in \mathbb{N}} I_n^q \rightarrow \prod_{n \in \mathbb{N}} I_n^{q+1})}{\text{Im}(\prod_{n \in \mathbb{N}} I_n^{q-1} \rightarrow \prod_{n \in \mathbb{N}} I_n^q)} = \frac{\prod_{n \in \mathbb{N}} \text{Ker}(I_n^q \rightarrow I_n^{q+1})}{\prod_{n \in \mathbb{N}} \text{Im}(I_n^{q-1} \rightarrow I_n^q)} \\ &= 0, \quad q \geq 1. \end{aligned}$$

特别地, $\{G_1 \oplus \cdots \oplus G_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in {}^{\mathbb{N}}\mathbf{Ab}$ 是 $\varprojlim$ -零调的. □

定理 3.2 的证明 记 $\mathcal{J}_1 \xrightarrow{\varphi_1} \mathcal{J}_2 \xrightarrow{\varphi_2} \cdots \rightarrow \mathcal{J}_k \xrightarrow{\varphi_k} \cdots$ 为滤子系 $\{\mathcal{J}_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ 所对应的 $\mathcal{O}_X$ -模层态射链, 记 $\mathcal{J} = \varinjlim \mathcal{J}_k$, 记 $\psi_n \mathcal{J}_n \rightarrow \varinjlim \mathcal{J}_k, n \in \mathbb{N}$ 为正则态射. 易见如下正合列:

$$0 \longrightarrow \bigoplus_{k \in \mathbb{N}} \mathcal{J}_k \xrightarrow{\Phi} \bigoplus_{k \in \mathbb{N}} \mathcal{J}_k \xrightarrow{\Psi} \mathcal{J} \longrightarrow 0,$$

其中态射 Φ, Ψ 分别由层态射芽 $\Phi_x : (f_{k,x})_{k \in \mathbb{N}} \mapsto (\text{id}_{\mathcal{J}_k, x} - \varphi_{k-1, x}(f_{k-1, x}))_{k \in \mathbb{N}}$, $\Psi_x : (g_{k,x})_{k \in \mathbb{N}} \mapsto \sum_{k \in \mathbb{N}} \psi_{k,x}(g_{k,x})$, $x \in X$ 给出. 注意到 $(g_{k,x})_{k \in \mathbb{N}} \in \bigoplus \mathcal{J}_{k,x}$ 仅有限多项非 0, 故和式 $\sum_{k \in \mathbb{N}} \psi_{k,x}(g_{k,x})$ 有意义. 于是 $\text{Ext}_{\mathcal{O}_X}^q(-, \mathcal{F})$ 诱导了如下长正合列:

$$\begin{aligned} \text{Ext}_{\mathcal{O}_X}^q \left(\bigoplus_{k \in \mathbb{N}} \mathcal{J}_k, \mathcal{F} \right) &\xrightarrow{\alpha} \text{Ext}_{\mathcal{O}_X}^q \left(\bigoplus_{k \in \mathbb{N}} \mathcal{J}_k, \mathcal{F} \right) \xrightarrow{\beta} \text{Ext}_{\mathcal{O}_X}^q(\mathcal{J}, \mathcal{F}) \\ &\xrightarrow{\delta} \text{Ext}_{\mathcal{O}_X}^{q+1} \left(\bigoplus_{k \in \mathbb{N}} \mathcal{J}_k, \mathcal{F} \right) \xrightarrow{\gamma} \text{Ext}_{\mathcal{O}_X}^{q+1} \left(\bigoplus_{k \in \mathbb{N}} \mathcal{J}_k, \mathcal{F} \right). \end{aligned}$$

下面计算 α, γ 的具体形式. 对于每个 $k \in \mathbb{N}$, 取内射分解: $0 \rightarrow \mathcal{J}_k \rightarrow \mathcal{I}_k^0 \rightarrow \mathcal{I}_k^1 \rightarrow \cdots$. 态射 $\varphi_k : \mathcal{J}_k \rightarrow \mathcal{J}_{k+1}$ 诱导了如下正合梯:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{J}_k & \longrightarrow & \mathcal{I}_k^0 & \longrightarrow & \mathcal{I}_k^1 \longrightarrow \cdots \\ & & \downarrow \varphi_k & & \downarrow \varphi_k^0 & & \downarrow \varphi_k^1 \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{J}_{k+1} & \longrightarrow & \mathcal{I}_{k+1}^0 & \longrightarrow & \mathcal{I}_{k+1}^1 \longrightarrow \cdots \end{array}$$

进而有

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \bigoplus_{k \in \mathbb{N}} \mathcal{J}_k & \longrightarrow & \bigoplus_{k \in \mathbb{N}} \mathcal{I}_k^0 & \longrightarrow & \bigoplus_{k \in \mathbb{N}} \mathcal{I}_k^1 \longrightarrow \cdots \\ & & \downarrow \text{id} - \sum_k \varphi_k & & \downarrow \text{id} - \sum_k \varphi_k^0 & & \downarrow \text{id} - \sum_k \varphi_k^1 \\ 0 & \longrightarrow & \bigoplus_{k \in \mathbb{N}} \mathcal{J}_k & \longrightarrow & \bigoplus_{k \in \mathbb{N}} \mathcal{I}_k^0 & \longrightarrow & \bigoplus_{k \in \mathbb{N}} \mathcal{I}_k^1 \longrightarrow \cdots \end{array}$$

特别地, 我们有

$$\begin{aligned} \text{Ext}_{\mathcal{O}_X}^q \left(\bigoplus_{k \in \mathbb{N}} \mathcal{J}_k, \mathcal{F} \right) &= \frac{\text{Ker}(\text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\bigoplus_{k \in \mathbb{N}} \mathcal{I}_k^q, \mathcal{F}) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\bigoplus_{k \in \mathbb{N}} \mathcal{I}_k^{q+1}, \mathcal{F}))}{\text{Im}(\text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\bigoplus_{k \in \mathbb{N}} \mathcal{I}_k^q, \mathcal{F}) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\bigoplus_{k \in \mathbb{N}} \mathcal{I}_k^{q+1}, \mathcal{F}))} \\ &= \frac{\text{Ker}(\prod_{k \in \mathbb{N}} \text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{I}_k^q, \mathcal{F}) \rightarrow \prod_{k \in \mathbb{N}} \text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{I}_k^{q+1}, \mathcal{F}))}{\text{Im}(\prod_{k \in \mathbb{N}} \text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{I}_k^q, \mathcal{F}) \rightarrow \prod_{k \in \mathbb{N}} \text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{I}_k^{q+1}, \mathcal{F}))} \\ &= \prod_{k \in \mathbb{N}} \frac{\text{Ker}(\text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{I}_k^q, \mathcal{F}) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{I}_k^{q+1}, \mathcal{F}))}{\text{Im}(\text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{I}_k^q, \mathcal{F}) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{I}_k^{q+1}, \mathcal{F}))} \\ &= \prod_{k \in \mathbb{N}} \text{Ext}_{\mathcal{O}_X}^q(\mathcal{J}_k, \mathcal{F}). \end{aligned}$$

于是 φ_k^q , $\text{id} - \sum_k \varphi_k^q$ 分别诱导了商映射

$$\begin{aligned} [\varphi_k^q] : \text{Ext}_{\mathcal{O}_X}^q(\mathcal{J}_k, \mathcal{F}) &\longrightarrow \text{Ext}_{\mathcal{O}_X}^q(\mathcal{J}_{k+1}, \mathcal{F}), \\ \left[\text{id} - \sum_k \varphi_k^q \right] : \prod_{k \in \mathbb{N}} \text{Ext}_{\mathcal{O}_X}^q(\mathcal{J}_k, \mathcal{F}) &\longrightarrow \prod_{k \in \mathbb{N}} \text{Ext}_{\mathcal{O}_X}^q(\mathcal{J}_k, \mathcal{F}), \end{aligned}$$

且满足

$$\alpha = \left[\text{id} - \sum_k \varphi_k^q \right] = \text{id} - \sum_k [\varphi_k^q], \quad \gamma = \left[\text{id} - \sum_k \varphi_k^{q+1} \right] = \text{id} - \sum_k [\varphi_k^{q+1}].$$

因此, 我们得到

$$\begin{aligned}\mathrm{Im} \delta &= \mathrm{Ker} \gamma = \mathrm{Ker} \left(\prod_{k \in \mathbb{N}} \mathrm{Ext}_{\mathcal{O}_X}^{q+1}(\mathcal{J}_k, \mathcal{F}) \rightarrow \prod_{k \in \mathbb{N}} \mathrm{Ext}_{\mathcal{O}_X}^{q+1}(\mathcal{J}_k, \mathcal{F}) \right) \stackrel{(*)}{=} \varprojlim \mathrm{Ext}_{\mathcal{O}_X}^{q+1}(\mathcal{J}_k, \mathcal{F}), \\ \mathrm{Ker} \delta &= \mathrm{Coker} \alpha = \mathrm{Coker} \left(\prod_{k \in \mathbb{N}} \mathrm{Ext}_{\mathcal{O}_X}^q(\mathcal{J}_k, \mathcal{F}) \rightarrow \prod_{k \in \mathbb{N}} \mathrm{Ext}_{\mathcal{O}_X}^q(\mathcal{J}_k, \mathcal{F}) \right) \stackrel{(**)}{=} R^1 \varprojlim \mathrm{Ext}_{\mathcal{O}_X}^q(\mathcal{J}_k, \mathcal{F}),\end{aligned}$$

其中 $(*)$, $(**)$ 归结到引理 3.3. □

参考文献

- 1 Angehrn U, Siu Y T. Effective freeness and point separation for adjoint bundles. *Invent Math*, 1995, 122: 291–308
- 2 Berndtsson B. Curvature of vector bundles associated to holomorphic fibrations. *Ann of Math* (2), 2009, 169: 531–560
- 3 Berndtsson B, Păun M. Bergman kernels and the pseudoeffectivity of relative canonical bundles. *Duke Math J*, 2008, 145: 341–378
- 4 Bogomolov F A. Unstable vector bundles and curves on surfaces. In: *Proceedings of the International Congress of Mathematicians* (Helsinki, 1978). Helsinki: Academia Scientiarum Fennica, 1980, 517–524
- 5 Boucksom S. Cones positifs des variétés complexes compactes. PhD Thesis. Grenoble: Université Joseph Fourier, 2002
- 6 Bourbaki N. *General Topology, Part I* (reprint of the 1966 ed.). Berlin: Springer-Verlag, 1989
- 7 Cao J Y. Numerical dimension and a Kawamata-Viehweg-Nadel-type vanishing theorem on compact Kähler manifolds. *Compos Math*, 2014, 150: 1869–1902
- 8 Cao J Y, Demailly J P, Matsumura S. A general extension theorem for cohomology classes on non reduced analytic subspaces. *Sci China Math*, 2017, 60: 949–962
- 9 Cao J Y, Păun M. $\partial\bar{\partial}$ -lemmas and a conjecture of O. Fujino. arXiv:2303.16239, 2023
- 10 Chan T O M, Choi Y J. On an injectivity theorem for log-canonical pairs with analytic adjoint ideal sheaves. *Trans Amer Math Soc*, 2023, 376: 8337–8381
- 11 Chan T O M, Choi Y J, Matsumura S. An injectivity theorem on snc compact Kähler spaces: An application of the theory of harmonic integrals on log-canonical centers via adjoint ideal sheaves. arXiv:2307.12025, 2023
- 12 de Cataldo M A A. Singular Hermitian metrics on vector bundles. *J Reine Angew Math*, 1998, 502: 93–122
- 13 Deligne P. Théorème de Lefschetz et critères de dégénérescence de suites spectrales. *Inst Hautes Études Sci Publ Math*, 1968, 35: 259–278
- 14 Deligne P. *Équations différentielles à points singuliers réguliers*. Berlin-New York: Springer-Verlag, 1970
- 15 Demailly J P. Estimations L^2 pour l'opérateur $\bar{\partial}$ d'un fibré vectoriel holomorphe semi-positif au-dessus d'une variété kählérienne complète. *Ann Sci Éc Norm Supér* (4), 1982, 15: 457–511
- 16 Demailly J P. Regularization of closed positive currents of type $(1, 1)$ by the flow of a Chern connection. In: *Contributions to Complex Analysis and Analytic Geometry. Aspects of Mathematics*, E26. Braunschweig: Friedr Vieweg & Sohn, 1994, 105–126
- 17 Demailly J P. Complex analytic and differential geometry. <https://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~demailly/manuscripts/agbook.pdf>, 2012
- 18 Demailly J P. *Analytic Methods in Algebraic Geometry*. Beijing: Higher Education Press, 2012
- 19 Demailly J P, Hacon C D, Păun M. Extension theorems, non-vanishing and the existence of good minimal models. *Acta Math*, 2013, 210: 203–259
- 20 Demailly J P, Peternell T. A Kawamata-Viehweg vanishing theorem on compact Kähler manifolds. *J Differential Geom*, 2003, 63: 231–277
- 21 Demailly J P, Peternell T, Schneider M. Pseudo-effective line bundles on compact Kähler manifolds. *Internat J Math*, 2001, 12: 689–741
- 22 Deng F S, Ning J F, Wang Z W, Zhou X Y. Positivity of holomorphic vector bundles in terms of L^p -estimates of $\bar{\partial}$. *Math Ann*, 2023, 385: 575–607
- 23 Enoki I. Kawamata-Viehweg vanishing theorem for compact Kähler manifolds. In: *Einstein Metrics and Yang-Mills Connections* (Sanda, 1990). *Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics*, vol. 145. New York: Marcel Dekker, 1993, 59–68

- 24 Esnault H, Viehweg E. Logarithmic de Rham complexes and vanishing theorems. *Invent Math*, 1986, 86: 161–194
- 25 Esnault H, Viehweg E. *Lectures on Vanishing Theorems*. Basel: Birkhäuser Verlag, 1992
- 26 Fujino O. A transcendental approach to Kollár's injectivity theorem. *Osaka J Math*, 2012, 49: 833–852
- 27 Fujino O. A transcendental approach to Kollár's injectivity theorem II. *J Reine Angew Math*, 2013, 681: 149–174
- 28 Fujino O. On semipositivity, injectivity and vanishing theorems. In: *Hodge Theory and L^2 -analysis*. Advanced Lectures in Mathematics, vol. 39. Somerville: International Press, 2017, 245–282
- 29 Fujino O. Kollár-Nadel type vanishing theorem. *Southeast Asian Bull Math*, 2018, 42: 643–646
- 30 Fujino O, Matsumura S. Injectivity theorem for pseudo-effective line bundles and its applications. *Trans Amer Math Soc Ser B*, 2021, 8: 849–884
- 31 Godement R. *Topologie algébrique et théorie des faisceaux*. Paris: Hermann, 1958
- 32 Gongyo Y, Matsumura S. Versions of injectivity and extension theorems. *Ann Sci Éc Norm Supér (4)*, 2017, 50: 479–502
- 33 Grauert H, Remmert R. *Theory of Stein Spaces*. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, vol. 236. Berlin: Springer-Verlag, 1979
- 34 Grauert H, Remmert R. *Coherent Analytic Sheaves*. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, vol. 265. Berlin: Springer-Verlag, 1984
- 35 Griffiths P, Harris J. *Principles of Algebraic Geometry*. New York: Wiley-Interscience, 1978
- 36 Grothendieck A. Sur quelques points d'algèbre homologique. *Tohoku Math J (2)*, 1957, 9: 119–221
- 37 Guan Q A, Mi Z T, Yuan Z. Optimal L^2 extension for holomorphic vector bundles with singular hermitian metrics. *arXiv:2210.06026*, 2022
- 38 Guan Q A, Mi Z T, Yuan Z. Boundary points, minimal L^2 integrals and concavity property V: Vector bundles. *J Geom Anal*, 2023, 33: 305
- 39 Guan Q A, Zhou X Y. A proof of Demailly's strong openness conjecture. *Ann of Math (2)*, 2015, 182: 605–616
- 40 Hosono G, Inayama T. A converse of Hörmander's L^2 -estimate and new positivity notions for vector bundles. *Sci China Math*, 2021, 64: 1745–1756
- 41 Huang C L, Liu K F, Wan X Y, Yang X K. Vanishing theorems for sheaves of logarithmic differential forms on compact Kähler manifolds. *Int Math Res Not IMRN*, 2023, 2023: 13501–13523
- 42 Inayama T. Nakano positivity of singular Hermitian metrics and vanishing theorems of Demailly-Nadel-Nakano type. *Algebr Geom*, 2022, 9: 69–92
- 43 Kollár J. Higher direct images of dualizing sheaves. I. *Ann of Math (2)*, 1986, 123: 11–42
- 44 Kollár J. Higher direct images of dualizing sheaves. II. *Ann of Math (2)*, 1986, 124: 171–202
- 45 Lazarsfeld R. *Positivity in Algebraic Geometry*. I. Berlin: Springer-Verlag, 2004
- 46 Lazarsfeld R. *Positivity in Algebraic Geometry*. II. Berlin: Springer-Verlag, 2004
- 47 Li Z, Meng X K, Ning J F, Wang Z W, Zhou X Y. On a Bogomolov type vanishing theorem. *arXiv:2207.12641*, 2022
- 48 Liu K F, Rao S, Wan X Y. Geometry of logarithmic forms and deformations of complex structures. *J Algebraic Geom*, 2019, 28: 773–815
- 49 Liu Z, Xiao B, Yang H, Zhou X Y. Multiplier submodule sheaves and a problem of Lempert. *arXiv:2111.13452v2*, 2024
- 50 Matsumura S. A vanishing theorem of Kollár-Ohsawa type. *Math Ann*, 2016, 366: 1451–1465
- 51 Matsumura S. A transcendental approach to injectivity theorem for log canonical pairs. *Ann Sc Norm Super Pisa Cl Sci (5)*, 2019, 19: 311–334
- 52 Matsumura S. Injectivity theorems with multiplier ideal sheaves for higher direct images under Kähler morphisms. *Algebr Geom*, 2022, 9: 122–158
- 53 Meng X K, Zhou X Y. Pseudo-effective line bundles over holomorphically convex manifolds. *J Algebraic Geom*, 2019, 28: 169–200
- 54 Meng X K, Zhou X Y. A generalization of Nadel vanishing theorem. *arXiv:2011.09637*, 2020
- 55 Mourougane C. Versions kähleriennes du théorème d'annulation de Bogomolov. *Collect Math*, 1998, 49: 433–445
- 56 Nadel A M. Multiplier ideal sheaves and Kähler-Einstein metrics of positive scalar curvature. *Ann of Math (2)*, 1990, 132: 549–596
- 57 Ohsawa T. Vanishing theorems on complete Kähler manifolds. *Publ Res Inst Math Sci*, 1984, 20: 21–38
- 58 Ohsawa T. On a curvature condition that implies a cohomology injectivity theorem of Kollár-Skoda type. *Publ Res Inst Math Sci*, 2005, 41: 565–577

- 59 Palamodov V. Homological methods in the theory of locally convex spaces (in Russian). *Uspehi Mat Nauk*, 1971, 26: 3–65
- 60 Păun M, Takayama S. Positivity of twisted relative pluricanonical bundles and their direct images. *J Algebraic Geom*, 2018, 27: 211–272
- 61 Prill D. The divisor class groups of some rings of holomorphic functions. *Math Z*, 1971, 121: 58–80
- 62 Raufi H. Singular hermitian metrics on holomorphic vector bundles. *Ark Mat*, 2015, 53: 359–382
- 63 Saito M. Decomposition theorem for proper Kähler morphisms. *Tohoku Math J (2)*, 1990, 42: 127–147
- 64 Shentu J C, Zhao C. L^2 -extension of adjoint bundles and Kollár’s conjecture. *Math Ann*, 2023, 386: 1429–1462
- 65 Silva A. Rungescher Satz and a condition for Steinness for the limit of an increasing sequence of Stein spaces. *Ann Inst Fourier (Grenoble)*, 1978, 28: 187–200
- 66 Takegoshi K. Higher direct images of canonical sheaves tensorized with semi-positive vector bundles by proper Kähler morphisms. *Math Ann*, 1995, 303: 389–416
- 67 Takegoshi K. On cohomology groups of nef line bundles tensorized with multiplier ideal sheaves on compact Kähler manifolds. *Osaka J Math*, 1997, 34: 783–802
- 68 Watanabe Y. L^2 -type Dolbeault isomorphisms and vanishing theorems for logarithmic sheaves twisted by multiplier ideal sheaves. *arXiv:2211.10077*, 2022
- 69 Watanabe Y. Nakano-Nadel type, Bogomolov-Sommese type vanishing and singular dual Nakano semi-positivity. *arXiv:2209.00823*, 2022
- 70 Watanabe Y. Bogomolov-Sommese type vanishing theorem for holomorphic vector bundles equipped with positive singular Hermitian metrics. *Math Z*, 2023, 303: 92
- 71 Wu X J. On the hard Lefschetz theorem for pseudoeffective line bundles. *Internat J Math*, 2021, 32: 2150035
- 72 Yau S T. On the pseudonorm project of birational classification of algebraic varieties. In: *Geometry and Analysis on Manifolds. Progress in Mathematics*, vol. 308. Cham: Birkhäuser/Springer, 2015, 327–339
- 73 Zhou X Y, Zhu L F. Regularization of quasi-plurisubharmonic functions on complex manifolds. *Sci China Math*, 2018, 61: 1163–1174
- 74 Zhou X Y, Zhu L F. Extension of cohomology classes and holomorphic sections defined on subvarieties. *J Algebraic Geom*, 2022, 31: 137–179
- 75 Zou Y P. Logarithmic Akizuki-Nakano vanishing theorems on weakly pseudoconvex Kähler manifolds. *arXiv:2201.11458*, 2022
- 76 Zucker S. Hodge theory with degenerating coefficients: L_2 cohomology in the Poincaré metric. *Ann of Math (2)*, 1979, 109: 415–476

Some results on cohomology groups valued in coherent analytic sheaves

Zhijian Chen, Chenghao Qing & Xiangyu Zhou

Abstract In the present paper, we introduce some new recent results on properties of cohomology groups valued in coherent analytic sheaves in both analytical and algebraic aspects.

Keywords pseudo-effective line bundle, sheaf cohomology, multiplier ideal sheaf, singular Hermitian metric, coherent sheaf, categorical limit

MSC(2020) 32C35, 14F18, 32E05, 32L10, 32L20, 18A30, 14F08, 18G10

doi: 10.1360/SSM-2024-0196