



舒伯特计数演算的严格基础

段海豹^{1,2*}, 赵学志³

1. 中国科学院数学与系统科学研究院, 北京 100190;

2. 大连理工大学数学科学学院, 大连 116024;

3. 首都师范大学数学科学学院, 北京 100048

E-mail: dhh@math.ac.cn, zhaoxve@mail.cnu.edu.cn

收稿日期: 2020-11-30; 接受日期: 2022-05-19; 网络出版日期: 2022-07-11; * 通信作者
国家自然科学基金 (批准号: 11771427, 11961131004 和 12071309) 资助项目

摘要 希尔伯特 (Hilbert) 第 15 问题要求, 为舒伯特 (Schubert) 计数演算法建立严格基础. 其中, 长期悬而未解的部分是舒伯特特征数问题. 在构建代数几何学的工作中, 范·德·瓦尔登 (van der Waerden) 和韦伊 (Weil) 将经典的舒伯特演算归结于决定旗流形相交理论的问题. 本文介绍第 15 问题的背景、内容以及解答历程. 本文的重点是计算特征数的统一公式 (定理 5.1) 以及解答韦伊问题的系统表述 (定理 5.2). 本文通过应用示例 5.1 和 5.2, 说明该公式和算法的有效性.

关键词 希尔伯特第 15 问题 舒伯特演算 相交 (同调) 理论 舒伯特簇 李群

MSC (2020) 主题分类 14M15, 55T10

1 引言

1900 年, 在巴黎召开的第二届国际数学家大会上, 希尔伯特 (Hilbert) 在题为《数学问题》的著名讲演中, 提出了 23 个公开问题^[1]. 其中的第 15 问题专注于 19 世纪的计数几何与相交理论, 题目是“为舒伯特计数演算法建立严格基础”.

第 15 问题是当代数学中一个影响深远的问题, 它推动了 19 世纪的计数几何与相交理论, 成长为 20 世纪数学大师范·德·瓦尔登 (van der Waerden) 和韦伊 (Weil)^[2-5] 所建立的代数几何学, 并使得舒伯特 (Schubert) 演算深度融入微分几何学、代数拓扑学、李 (Lie) 群表示论等领域. 然而, 在第 15 问题的早期研究中, 寻找舒伯特演算的有效演算法则这一部分, 长期悬而未解. 具体表现于舒伯特特征数问题^[6-8] 以及旗流形相交理论的韦伊问题 (参见文献 [4, 公开问题, 第 331 页]). 这两个问题被同行称为舒伯特演算的“主要焦点”和“根本性问题”^[9,10].

我们在系列工作 [11-16] 中, 相继解决了特征数问题与韦伊问题. 据此, 我们已在文献 [17-20] 中宣布, 希尔伯特第 15 问题已获解答 (参见文献 [9,21]). 本文介绍第 15 问题的背景、解答历程及其在

英文引用格式: Duan H B, Zhao X Z. Make Schubert calculus rigorous (in Chinese). Sci Sin Math, 2022, 52: 865-880, doi: 10.1360/SSM-2020-0334

当代数学中的作用, 重点介绍作者对于舒伯特演算核心算法的系统表述 (定理 5.1 和 5.2) 以及应用示例 5.1 和 5.2.

本文余下内容结构如下: 第 2 节简要介绍相交理论. 第 3 节介绍希尔伯特第 15 问题及背景. 第 4 节回顾早期研究工作, 包括舒伯特演算的基底定理与特征数问题. 第 5 节介绍特征数问题与韦伊问题的解答. 最后第 6 节是本文的总结.

2 相交理论简介

公元前 2 世纪, 希腊几何学家阿波罗尼斯 (Apollonius, 公元前 262–190 年) 在《相切》(Tangencies) 一文中证明了下述结果.

定理 2.1 对于平面中处于一般位置的 3 个圆, 恰有 8 个圆与它们相切.

这个定理的最初证明被遗失, 后人从帕普斯 (Pappus) 公元 4 世纪的一篇记述中得知这个结果. 到了文艺复兴时期, 许多几何学家致力于给出该定理的证明, 其中 Adriaan van Roomen、Joseph Diaz Gergonne 和牛顿 (Newton) 取得了成功.

笛卡尔 (Descartes) 空间坐标系的发现, 使得几何学家们 (如 Maclaurin、Euler 和 Bezout 等) 有可能利用多项式方程组来记录空间中满足特定几何条件的几何对象. 于是, 许多计数几何问题有了如下表述.

问题 2.1 (代数学基本问题) 给定复数域上的一个多项式方程组

$$\begin{cases} f_1(x_1, \dots, x_n) = 0, \\ \vdots \\ f_n(x_1, \dots, x_n) = 0, \end{cases}$$

其中自变量的个数等于方程的个数, 它有多少 (包括重数) 个解?

问题 2.1 是代数学的一个基本问题. 例如, 在 $n = 1$ 这个特殊情形, 高斯 (Gauss) 在 1820 年证明了, 对于复数域上的一个 n 次多项式 $f(x)$, 方程 $f(x) = 0$ 恰有 n 个解. 这个结论被后人命名为代数学基本定理.

设 g_i 是多项式 $f_i(x_1, \dots, x_n)$ 的齐次化, 我们获得 n 维复射影空间 $M = CP^n$ 中的一张超曲面 $N_i := g_i^{-1}(0)$. 一般而言, 复射影空间上一个齐次多项式方程组零点的集合称为一个射影代数簇. 于是, 对问题 2.1 的研究刺激了相交理论的诞生. 图 1 给出了相交理论的示意图.

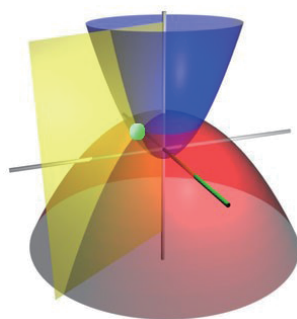


图 1 (网络版彩图) 相交理论图示

问题 2.2 (相交理论的基本问题) 已知光滑复射影代数簇 M 中处于一般位置的 k 个子代数簇 N_i ($1 \leq i \leq k$) 满足维数条件 $(k-1) \cdot \dim M = \dim N_1 + \cdots + \dim N_k$, 求它们在 M 中交点的个数.

在研究问题 2.2 的过程中, 莱夫舍茨 (Lefschetz)^[22] 建立了胞腔复形的同调理论, 并为问题 2.2 的解答提供了一个简洁公式. 沿用前面的记号, 用 $[N_i] \in H_*(M)$ 表示子簇 $N_i \subset M$ 的基本类, 并用符号 α_i 表示它的庞加莱对偶 (Poincaré dual).

问题 2.3 (同调论的基本问题) 已知光滑复射影代数簇 M 中处于一般位置的 k 个子代数簇 N_i ($1 \leq i \leq k$) 满足维数条件 $(k-1) \cdot \dim M = \dim N_1 + \cdots + \dim N_k$, 求 Kronecker 赋值:

$$\langle \alpha_1 \cup \cdots \cup \alpha_k, [M] \rangle = ?$$

其中 $\cup$ 表示上同调中的乘积运算.

通过问题 2.1–2.3, 本节概要回顾了历史上解答计数几何问题的三个不同方案以及它们之间一脉相承的关系. 一个自然的问题是, 哪种方案更具有有效可算性? 其中的“有效可算性”, 不仅是计数几何学的核心要求, 也是驱使相交理论在 20 世纪蓬勃发展的原始动力.

3 希尔伯特第 15 问题及背景

舒伯特于 1870 年在德国哈勒大学 (The University of Halle) 获得博士学位. 他的博士学位论文《特征数理论》^[6] 的主题是计数几何学. 此前, 他已发表过相关文章, 证明了空间中与 4 个处于一般位置的球面相切的球面有 16 个, 是阿波罗尼斯定理在空间情形的直接推广.

1879 年, 舒伯特出版了 19 世纪相交理论的巅峰之作《计数几何演算》^[8]. 在该书中, 他发展了 Charles 关于圆锥曲线的工作^[23], 并通过一系列示例, 展示了计数几何学的魅力. 例如:

例 3.1 给定空间中 8 张一般位置的二次曲面, 恰有 4,407,296 条圆锥曲线与它们相切.

例 3.2 给定空间中 9 张一般位置的二次曲面, 恰有 666,841,088 张二次曲面与它们相切.

例 3.3 给定空间中 12 张一般位置的二次曲面, 恰有 5,819,539,783,680 条三次立体曲线与它们相切.

其中, 例 3.3 解答了 Zeuthen 关于立体空间曲线的特征数问题, 让他荣获丹麦皇家科学院金奖.

另一方面, 舒伯特在他的工作中, 广泛使用了庞斯列 (Poncelet) 的“连续性原理”¹⁾. 由于该原理曾经受到柯西 (Cauchy) 的反对²⁾, 舒伯特在 1874 年将该原理更名为“特殊位置原理 (the principle of special position)”, 两年后又更名为“数的守恒原理 (the principle of conservation of numbers)”, 但仍然受到 Study 和 Kohn 的非议^[24]. 尤其是, 根据范·德·瓦尔登^[25] 的记述, 舒伯特的论证如此概略, 以至于“没有给出相交数的定义, 没有办法找到它, 也没有办法计算它”.

希尔伯特在第 15 问题^[1] 中要求为舒伯特计数演算法建立严格基础. 他同时肯定了舒伯特的方法在实施代数消元法之前就能预测到多项式方程组解的数目的优势, 参见本文结尾所引述的中译文.

1) 庞斯列 (Jean-Victor Poncelet, 1788–1867, 法国力学家、数学家、工程师) 于 1811 年毕业于巴黎理工大学, 作为工程兵上尉参加了拿破仑侵俄战争, 被认为阵亡而遗弃在克拉斯诺耶战场, 被俘后囚禁于西伯利亚 Saratow 战俘营. 庞斯列通过研究几何学, 度过战俘营中的岁月. 他仅靠大学期间蒙日 (Monge) 所教授的画法几何学的基础, 在对 17 世纪平面射影几何一无所知的情形下, 独立发现并建立了高维射影几何学的系统理论. 他提出并研究了图形经过中心射影的不变性质; 引入了“交比”的概念和“无穷远”元素; 建立了二次曲线和曲面的配极理论, 由此得到对偶原理. 此外, 他还研究了图形在一定范围内连续变动时所保持的性质, 提出了“连续性原理 (the principle of continuity)”, 对于 19 世纪相交理论的发展产生了深刻影响.

2) 庞斯列战俘营期间的工作被整理为《论图形的射影性质, 1816》一文, 是近代射影几何以及相交理论的奠基性工作. 柯西对于庞斯列参加法国大革命的经历十分不满, 以文章会导致“严重错误”为由, 拒绝发表该文.

4 早期研究工作 (1900–1960) 回顾: 舒伯特演算的基底定理与特征数问题

澄清舒伯特演算是 20 世纪代数几何学的重要主题

—Springer 数学百科全书: 舒伯特演算 [26]

范·德·瓦尔登首度发现, 舒伯特演算应是某类射影类流形中代数簇相交数的计算, 因此可以通过上同调环中的乘法运算来实施 (参见问题 2.2 和 2.3). 埃里斯曼 (Ehresmann)、切瓦利 (Chevalley) 和盖尔芳德 (Gel'fand) 等工作进一步阐明, 旗流形中的“舒伯特簇”是舒伯特演算所实施的对象. 与此同时, 范·德·瓦尔登和韦伊相继完成了代数簇相交数的严格定义, 使得舒伯特“特征数问题”得以清晰表述. 本节按照历史发展的脉络, 对于第 15 问题的这些先驱性研究工作, 进行概要回顾.

为阐释舒伯特演算的核心部分, 我们引用原著 [8, 第 95 页] 中关于空间圆锥截线的一个计数表格 (见表 1), 其中, 符号 ρ 、 μ 和 ν 依次表示空间中通过一个定点、相交于一条定直线、相切于一张定平面的圆锥截线所构成的三个代数簇. 舒伯特将表 1 中的等式称为“特征数方程”, 而早期的研究者也称它们为“舒伯特符号方程”. 舒伯特在他的工作 [6–8] 中多次强调, 特征数问题是计数几何学的主要理论问题 [27]. 自然地, 澄清“特征数问题”的严格表述, 是历史上解答第 15 问题的首要任务.

4.1 意大利学派 (The Italian School)

以恩里克斯 (Enriques) 和塞韦里 (Severi) 为代表的意大利学派, 是首先研究第 15 问题的数学团体, 其代表性著作是塞韦里的《(特征) 数的守恒原理》[28] 和《计数几何基础与特征数理论》[29]. 根据范·德·瓦尔登 [2] 的评述, “他们建立了令人钦佩的结构, 但逻辑基础不稳定, 概念定义不明确, 证据也欠充分”.

4.2 哥廷根学派 (The Gottingen School)

在诺特 (E. Noether) 的指导下, 范·德·瓦尔登于 1930 年发表了论文《计数几何演算的拓扑基础》[3], 首度揭开了舒伯特演算的神秘面纱. 他利用莱夫舍茨在 1926 年刚刚建立的胞腔同调理论 [22], 将舒伯特演算归结于射影类流形中代数簇相交数的计算 (参见问题 2.2 和 2.3). 他在那篇论文中敏锐地指出:

- (a) 每个舒伯特符号方程应是某个射影类流形同调群中的一个关系式;
- (b) 解答特征数问题的前提是确定该射影流形同调群的一个标准加法基底;

表 1 空间圆锥截线的特征数方程

$\mu^3\nu^5 = 1$	$\mu^2\nu^6 = 8$	$\mu\nu^7 = 34$	$\nu^8 = 92$
$\mu^3\nu^4\rho = 2$	$\mu^2\nu^5\rho = 14$	$\mu\nu^6\rho = 52$	$\nu^7\rho = 116$
$\mu^3\nu^3\rho^2 = 4$	$\mu^2\nu^4\rho^2 = 24$	$\mu\nu^5\rho^2 = 76$	$\nu^6\rho^2 = 128$
$\mu^3\nu^2\rho^3 = 4$	$\mu^2\nu^3\rho^3 = 24$	$\mu\nu^4\rho^3 = 72$	$\nu^5\rho^3 = 104$
$\mu^3\nu\rho^4 = 2$	$\mu^2\nu^2\rho^4 = 16$	$\mu\nu^3\rho^4 = 48$	$\nu^4\rho^4 = 64$
$\mu^3\rho^5 = 1$	$\mu^2\nu\rho^5 = 8$	$\mu\nu^2\rho^5 = 24$	$\nu^3\rho^5 = 32$
	$\mu^2\rho^6 = 4$	$\mu\nu\rho^6 = 12$	$\nu^2\rho^6 = 16$
		$\mu\rho^7 = 6$	$\nu\rho^7 = 8$
			$\rho^8 = 4$

(c) 所有计数问题的共同目标是计算相关射影类流形中代数簇的相交数. 这些观点成功地引领了第 15 问题的后续研究^[5, 24, 30] 3). 尤其是, 他在此文中多次提到, 他期盼着应用同调论的方法 (参见问题 2.3), 来解答舒伯特特征数问题 (参见文献 [3, 第 8 节]).

4.3 布尔巴基学派 (The Bourbaki School)

受到嘉当 (E. Cartan) 的影响, 布尔巴基学派的主要成员几乎都是李群的专家, 他们在《数学原理》中用了很长的篇幅介绍李群. 设 G 是一个紧致连通李群, $P \subset G$ 是一个抛物子群. 通过 G 到它的李代数的伴随表示, 齐性空间 G/P 得以实现为一个光滑复射影代数簇, 称为李群 G 的一个旗流形. 接下来, 我们依从文献 [31], 用 $W(G)$ 表示李群 G 的外尔群 (Weyl group), 并用 $W(G; P)$ 表示子群 $W(P) \subset W(G)$ 的左陪集 $W(G)/W(P)$.

埃里斯曼 (Ehresmann, 1934)^[30] 发现, 舒伯特演算所涉及的射影类流形, 本质上是嘉当刚刚完成分类工作的旗流形; 对于复格拉斯曼类流形 $G_{n,k}(\mathbb{C}) = U(n)/U(k) \times U(n-k)$ 这个特殊情形, 经典的舒伯特符号恰好是同调群 $H_*(G_{n,k}(\mathbb{C}))$ 的一个加法基底, 其中的记号 $U(n)$ 表示 n 阶酉群.

随着研究的深入, 早期文献中较为含糊的术语“舒伯特符号”, 逐步被“舒伯特胞腔”或“舒伯特簇”这类严谨的几何概念所替代. 特别地, 博雷尔 (Borel, 1953)^[32]、切瓦利 (Chevalley, 1958)^[33]、科斯坦特 (Kostant, 1963) 和伯恩斯坦等 (Bernstein, Gel'fand, Gel'fand, 1973)^[31] 相继证明了, 每个旗流形 G/P 具有一个经典的胞腔分解:

$$G/P = \bigcup_{w \in W(P, G)} X_w, \quad \dim X_w = 2l(w), \quad (4.1)$$

其中 X_w 是元素 $w \in W(P, G)$ 所决定的舒伯特胞腔 (簇), $l: W(G; P) \rightarrow \mathbb{Z}$ 是长度函数^[31]. 由于分解式 (4.1) 中只涉及偶数维胞腔, 全体舒伯特胞腔 (簇) 的基本类 $\{[X_w] \in H_*(G/P) \mid w \in W(P, G)\}$ 构成了整系数同调群 $H_*(G/P)$ 的一个加法基底. 下面用记号 $s_w \in H^*(G/P)$ 表示舒伯特胞腔 X_w 在上同调中的 Kronecker 对偶, 称为舒伯特胞腔 X_w 所决定的舒伯特类 (Schubert class). 则根据胞腔分解 (4.1), 即可得到“舒伯特演算的基底定理 (the basis theorem of Schubert calculus)”.

定理 4.1 (舒伯特演算的基底定理^[31, 33]) 对于每个旗流形 G/P , 它的全部舒伯特类所构成的集合 $\{s_w \mid w \in W(G; P)\}$ 是上同调群 $H^*(G/P)$ 的一个加法基底.

定理 4.1 的一个直接推论是, 旗流形 G/P 中的任意一个舒伯特类的单项式 $s_{w_1} \cdots s_{w_k}$ 可以唯一地表示为舒伯特基底元素的整系数线性组合:

$$s_{w_1} \cdots s_{w_k} = \sum_{l(w)=l(w_1)+\cdots+l(w_k), w \in W(P, G)} a_{w_1, \dots, w_k}^w \cdot s_w, \quad (4.2)$$

其中系数 $a_{w_1, \dots, w_k}^w \in \mathbb{Z}$ 正是舒伯特意义下的特征数, 而 (4.2) 则是舒伯特符号方程的一般形式. 至此, 舒伯特早年所关切的“特征数问题 (the problem of characteristics)”^[6-8], 得到了如下简洁且严格的表述:

问题 4.1 (特征数问题) 对于旗流形 G/P 的每个舒伯特类的单项式 $s_{w_1} \cdots s_{w_k}$, 求出所有特征数 $a_{w_1, \dots, w_k}^w$ 的值.

在许多文献中, 特征数问题被称为几何、代数、拓扑学和表示论的基本问题, 原因在于特征数 $a_{w_1, \dots, w_k}^w$ 的多重意义. 它们是:

(a) 解答计数几何问题的基础数据^[8];

3) 在 1924–1932 年间, 范·德·瓦尔登与希尔伯特同在哥廷根大学, 被称为希尔伯特的传承人 (参见文献 [5, 第 265 页]).

- (b) 第 15 问题中所指多项式方程组解的个数^[1];
- (c) 刻画旗流形 G/P 中舒伯特胞腔构造的结构常数^[9];
- (d) 李群表示论中的 Littlewood-Richardson 系数^[34].

韦伊是布尔巴基学派的灵魂, 他两度引领法国数学走出世界大战的阴影. 1946 年, 他完成了舒伯特演算所亟需的“代数簇相交数”的准确定义, 出版了里程碑式的数学名著《代数几何基础》^[4]. 随后, 韦伊又根据切瓦利在 1958 年所发现的基底定理 (定理 4.1), 再版了他的著作, 在其中将经典的舒伯特演算等价于“决定所有旗流形 G/P 的上同调环”的问题 (参见文献 [4, 公开问题, 第 331 页]). 我们在文献 [18, 定理 3.5] 中证明了如下定理:

定理 4.2 对于所有旗流形 G/P , 韦伊问题等价于特征数问题.

4.4 华人数学家的贡献

伴随着舒伯特演算研究工作的深入, 华人数学家们取得了杰出成就. 1946 年, 陈省身^[35] 从复格拉斯曼流形 $G_{n,k}(\mathbb{C})$ 上典型丛的曲率形式 Ω 出发, 获得了特殊舒伯特类 (special Schubert class) c_i 在德·拉姆 (De Rham) 上同调中的显性表达式:

$$\det \left(I + \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \Omega \right) = 1 + c_1 + \cdots + c_k. \quad (4.3)$$

这个表达式被誉为陈形式 (Chern forms) 和陈示性类 (Chern classes), 是当代微分几何学的一个基本工具.

1950 年, 吴文俊^[36] 确定了斯滕罗德 (Steenrod) 平方运算 Sq^k 在实格拉斯曼流形 $G_{n,k}(\mathbb{R})$ 中的特殊舒伯特类 w_m 上的作用, 获得了著名的吴公式 (Wu-formula):

$$Sq^k(w_m) = w_m w_k + \binom{k-m}{1} w_{k-1} w_{m+1} + \cdots + \binom{k-m}{k} w_0 w_{m+k}, \quad (4.4)$$

是流形拓扑学的一个基本关系式.

周炜良师从于范·德·瓦尔登, 参与了代数几何学的奠基工作. 他在 1958 年, 对于射影代数簇建立了以他的姓氏命名的周环 (Chow ring)^[37], 是当代相交理论的一个基础性平台.

5 特征数问题与韦伊问题的解答

特征数问题是计数几何学的主要理论问题

—舒伯特 1870 年^[6-8, 27]

经典的舒伯特演算, 等价于决定旗流形的相交同调环

—韦伊 1962 年 [4, 第 331 页]

贝克 (Baker, 1936)^[38] 和马宁 (Manin, 1968)^[39] 指出, 圆满解决第 15 问题, 需要完成两项工作:

- (1) 决定舒伯特演算的对象;
- (2) 决定舒伯特演算的法则.

我们在前一节中回顾到: 舒伯特演算的对象是“舒伯特符号”或“舒伯特簇”, 早在 20 世纪 50 年代, 它们的几何构造已由埃里斯曼、博雷尔和切瓦利等所确定. 本节通过特征数问题和韦伊问题的解答, 为舒伯特演算建立有效演算法则.

5.1 困难与希望

我们考察解答特征数问题所遇到的主要困难. 嘉当的李群分类定理告诉我们:

(a) 所有单李群由三组典型群 $SU(n)$ 、 $Sp(n)$ 和 $\text{Spin}(n)$ 以及 5 个例外群 G_2 、 F_4 、 E_6 、 E_7 和 E_8 构成;

(b) 每个秩为 n 的单李群 G 恰有 $2^n - 1$ 个抛物子群 P ;

(c) 每个旗流形 G/P 的舒伯特簇个数等于欧拉示性数 $\chi(G/P)$.

从而, 对于李群 G 及其抛物子群 P 的各种不同取法, 会产生许许多多的旗流形 G/P , 它们的几何与拓扑性质截然不同. 进一步, 作为舒伯特簇的个数, 欧拉示性数 $\chi(G/P)$ 十分庞大. 作为例子, 我们在表 2 的第二行中, 对于 G 是例外李群而 P 是 G 中极大环面群 T 的情形, 给出欧拉示性数 $\chi(G/T)$ 的值. 总之, 对于旗流形, 分情形解答特征数问题的设想, 根本无法实施⁴⁾.

另一方面, 根据嘉当的李群分类定理可知, 所有单连通李群被它们的嘉当矩阵 (Cartan matrix) 所唯一决定. 作为例子, 下面列出所有例外李群的嘉当矩阵:

$$G_2: \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}, \quad F_4: \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad E_6: \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$E_7: \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad E_8: \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

换言之, 嘉当矩阵应该是决定李群以及旗流形的全部拓扑和几何特征的“宇宙常数”. 一个自然的期望是, 能否仅从李群 G 的嘉当矩阵出发, 对于每个旗流形 G/P , 得到特征数问题与韦伊问题的统一解答? 我们在系列工作 [11–16] 中, 实现了这个设想, 其中的算法流程如下:

表 2 例外李群 G 的完全旗流形 G/T 中舒伯特胞腔的个数

G	G_2	F_4	E_6	E_7	E_8
$\chi(G/T)$	12	$1,152$	$2^7 \cdot 3^4 \cdot 5$	$2^{10} \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7$	$2^{14} \cdot 3^5 \cdot 5^2 \cdot 7$

4) 历史上, 仅对于复格拉斯曼流形 $G_{n,k}(\mathbb{C})$ 这类特殊的旗流形而言, 特征数由著名的 Littlewood-Richardson 组合法则给出, 它远非一个能够实施有效计算的公式 [34].

李群 G 的嘉当矩阵 $\Rightarrow$ 旗流形 G/P 的特征数 $\Rightarrow$ 旗流形 G/P 的上同调环.

5.2 从嘉当矩阵到特征数

设 G 是一个单李群, $P \subset G$ 是一个抛物子群. 本小节从李群 G 的嘉当矩阵 $C = (c_{ij})_{n \times n}$ 出发, 构造计算旗流形 G/P 的所有特征数的统一公式.

设 $\mathbb{R}^n$ 是以 $\{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ 为基底的 n 维实向量空间. 依据李群 G 的嘉当矩阵 C , 定义 $\mathbb{R}^n$ 的 n 个自同构 $\sigma_i \in \text{Aut}(\mathbb{R}^n)$ ($1 \leq i \leq n$) 如下:

$$\sigma_i(\omega_k) = \begin{cases} \omega_k, & \text{当 } i \neq k \text{ 时,} \\ \omega_k - (c_{k,1}\omega_1 + c_{k,2}\omega_2 + \dots + c_{k,n}\omega_n), & \text{当 } i = k \text{ 时.} \end{cases}$$

我们在文献 [17] 中证明了下述结论.

引理 5.1 元素 σ_i 所生成的自同构群 $\text{Aut}(\mathbb{R}^n)$ 的子群恰好是李群 G 的外尔群 $W(G)$.

根据此引理可知, 外尔群 $W(G)$ 中的任意一个元素 w 具有最短分解

$$w = \sigma_{i_1} \circ \sigma_{i_2} \circ \dots \circ \sigma_{i_m}, \quad 1 \leq i_1, i_2, \dots, i_m \leq n, \quad (5.1)$$

其中整数 m 称为 w 的长度, 记为 $l(w)$.

定义 5.1 设元素 $w \in W(G)$ 具有最短分解 (5.1). 如下规定的上三角矩阵 $A_w = (a_{s,t})_{m \times m}$ 称为 w 的一个结构矩阵:

$$a_{s,t} = \begin{cases} 0, & \text{当 } s \geq t \text{ 时,} \\ -c_{i_s, i_t}, & \text{当 } s < t \text{ 时,} \end{cases}$$

其中 c_{i_s, i_t} 是嘉当矩阵 C 中 (i_s, i_t) 位置的元素.

例 5.1 第一个例外李群 G_2 的嘉当矩阵是

$$C = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

依照引理 5.1, 可得它的外尔群 $W(G_2)$ 的两个生成元 $\sigma_1, \sigma_2 \in \text{Aut}(\mathbb{R}^2)$.

对于 $W(G_2)$ 中长度为 4 的两个元素 $u = \sigma_1 \circ \sigma_2 \circ \sigma_1 \circ \sigma_2$ 和 $v = \sigma_2 \circ \sigma_1 \circ \sigma_2 \circ \sigma_1$, 根据定义 5.1 可知, 它们的结构矩阵依次是

$$A_u = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_v = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

在由自变量 $x_1, \dots, x_m$ 所生成的整系数多项式环 $\mathbb{Z}[x_1, \dots, x_m]$ 中, 所有 m 次齐次多项式组成一个自由交换群 $\mathbb{Z}[x_1, \dots, x_m]^{(m)}$. 它有一个天然的加法基底 $\{x_1^{r_1} \cdots x_m^{r_m} \mid r_1 + \dots + r_m = m\}$.

定义 5.2 已知一个 $m \times m$ 阶上三角矩阵 $A = (a_{i,j})$, 定义整值线性映射

$$T_A : \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_m]^{(m)} \rightarrow \mathbb{Z}$$

如下: 它在基底元素 $x_1^{r_1} \cdots x_m^{r_m}$ 上的取值是

$$\begin{aligned} T_A(x_1^{r_1} \cdots x_m^{r_m}) &= 0, \quad \text{如果 } r_m = 0, \\ T_A(x_1^{r_1} \cdots x_m^{r_m}) &= T_{A'}(x_1^{r_1} \cdots x_{m-1}^{r_{m-1}}(a_{1,m}x_1 + \cdots + a_{m-1,m}x_{m-1})^{r_m-1}), \quad \text{如果 } r_m > 0, \end{aligned}$$

其中 A' 是从 A 中删除第 m 行和第 m 列所得的 $m-1$ 阶上三角矩阵. 映射 T_A 称为上三角矩阵 A 所决定的三角算子 (the triangular operator associated to A).

至此, 从李群 G 的嘉当矩阵 C 出发, 我们依次构造了:

- (i) 李群 G 的外尔群 $W(G)$;
- (ii) 一组与 G 的外尔群中元素相伴的上三角矩阵 $\{A_w \mid w \in W(G)\}$;
- (iii) 一组整值线性映射 $\{T_{A_w} : \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_m]^{(m)} \rightarrow \mathbb{Z}\}$, 其中 $w \in W(G)$, $m = l(w)$.

它们将成为下述特征数公式 (5.2) 的三个要素.

接下来, 设 P 是 G 的一个抛物子群, 它的外尔群是 $W(P)$. 根据伯恩斯坦等^[31]的工作, 利用长度函数 $l : W(G) \rightarrow \mathbb{Z}$, 可将陪集 $W(P, G)$ 实现为 $W(G)$ 的如下子集:

$$W(P, G) = \{w \in W(G) \mid l(w) \leq l(ww'), w' \in W(P)\}.$$

对于元素 $w \in W(P, G)$ 的一个最短分解 (5.1) 以及一个子列 $I = \{j_1, \dots, j_t\} \subseteq \{1, \dots, m\}$, 令

$$\sigma_I := \sigma_{i_{j_1}} \circ \cdots \circ \sigma_{i_{j_t}} \in W, \quad x_I := x_{j_1} \cdots x_{j_t} \in \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_m],$$

并令 $|I| := t$. 我们在文章“论舒伯特特征数问题”^[17]中, 推广了“舒伯特簇的乘法法则”^[12, 13]中的主要结果, 得到了下述公式:

定理 5.1 对于旗流形 G/P 的任意一个舒伯特类的单项式 $s_{w_1} \cdots s_{w_k}$, 特征数 $a_{w_1, \dots, w_k}^w$ 的计算公式是

$$a_{w_1, \dots, w_k}^w = T_{A_w} \left(\prod_{i=1}^k \left(\sum_{\sigma_I = w_i, I \subseteq \{1, \dots, m\}, |I|=l(w_i)} x_I \right) \right), \quad (5.2)$$

其中 A_w 是 w 的最短分解 (5.1) 的结构矩阵, $l(w) = l(w_1) + \cdots + l(w_k)$.

公式 (5.2) 具有如下特点: 它将特征数 $a_{w_1, \dots, w_k}^w$ 表示为李群 G 的嘉当数的多项式, 因此适用于任意一个旗流形 G/P , 以及该旗流形中的任意一组舒伯特类 $\{s_w; s_{w_1} \cdots s_{w_k}\}$. 基于这个特点, 我们在文献 [14, 15] 的基础上, 编写了名为“CHARACTERISTIC”的软件包^[17], 它的功能表述如下:

算法 CHARACTERISTIC

- **输入:** 李群 G 的嘉当矩阵 $C = (c_{ij})_{n \times n}$ 以及一个确定抛物子群 P 的子列 $I \subseteq \{1, \dots, n\}$;
- **输出:** 旗流形 G/P 的全部特征数.

应用示例 5.1 (舒伯特特征数) 我们通过实例, 展示算法 CHARACTERISTIC 的有效性, 并与舒伯特早年的计算相对比.

设 G/P 是一个旗流形, 它的维数是 $\dim_{\mathbb{C}} G/P = m$. 根据基底定理可知, 存在唯一一个元素 $w_0 \in W(P, G)$, $l(w_0) = m$, 使得舒伯特类 s_{w_0} 是项维上同调群 $H^{2m}(G/P) = \mathbb{Z}$ 的生成元. 于是, 对

于每个 m 维舒伯特类的单项式 $s_{u_1} \cdots s_{u_k}$, 特征数 $a_{u_1, \dots, u_k}^{w_0}$ 满足关系式 $\langle s_{u_1} \cdots s_{u_k}, [G/P] \rangle = a_{u_1, \dots, u_k}^{w_0}$ (参见问题 2.3), 从而可简记为 $s_{u_1} \cdots s_{u_k} = a_{u_1, \dots, u_k}^{w_0}$. 此外, 对于外尔群中的一个元素 $w \in W(P; G)$ 及其最短分解 $w = \sigma_I$, 引入记号 s_I 来表示舒伯特类 s_w .

格拉斯曼流形 $G_{n,k}$ 是相交理论最经典和原始的例子^[7, 40]. 历史上, 它的特征数 a_{u_1, u_2}^w 由组合学中的 Littlewood-Richardson 法则^[34] 刻画. 与之相比较, (5.2) 可以直接应用于特征数的计算. 采用上面的约定, 令 $c_r := s_{\{k-r+1, k-r+2, \dots, k\}} \in H^{2r}(G_{n,k})$, $r = 1, \dots, k$, 则 c_r 恰好是格拉斯曼流形 $G_{n,k}$ 上典则 k -维复向量丛的第 r 个陈类. 将算法 CHARACTERISTIC 应用于情形 $G_{9,4}$, $\dim_{\mathbb{C}} G_{9,4} = 20$, 得到格拉斯曼流形 $G_{9,4}$ 的所有最高维舒伯特特征数, 结果参见表 3.

表 3 中的计算与舒伯特的工作^[7, 40] 相关. 这里引述 1940 年柯立芝 (Coolidge)^[41] 的记述: “舒伯特专注的根本性问题是将这些符号的乘积用其他符号线性表出. 他只完成了一部分.”⁵⁾

表 3 格拉斯曼流形 $G_{9,4}$ 的最高维舒伯特特征数

$c_4^5 = 1$	$c_3^4 c_4^2 = 1$	$c_2 c_3^2 c_4^3 = 1$	$c_2 c_3^6 = 9$
$c_2^2 c_4^4 = 1$	$c_2^2 c_3^4 c_4 = 6$	$c_2^2 c_3^2 c_4^3 = 4$	$c_2^4 c_4^3 = 3$
$c_2^4 c_4^4 = 45$	$c_2^5 c_3^2 c_4 = 26$	$c_2^6 c_4^2 = 16$	$c_2^7 c_3^2 = 231$
$c_2^8 c_4 = 126$	$c_2^{10} = 1,296$	$c_1 c_3 c_4^4 = 1$	$c_1 c_3^5 c_4 = 4$
$c_1 c_2 c_3^3 c_4^2 = 3$	$c_1 c_2^2 c_3 c_4^3 = 2$	$c_1 c_2^2 c_3^5 = 29$	$c_1 c_2^3 c_3^3 c_4 = 17$
$c_1 c_2^4 c_3 c_4^2 = 10$	$c_1 c_2^5 c_3^3 = 141$	$c_1 c_2^6 c_3 c_4 = 76$	$c_1 c_2^8 c_3 = 756$
$c_1^2 c_3^3 c_4^4 = 2$	$c_1^2 c_3^6 = 19$	$c_1^2 c_2 c_4^4 = 1$	$c_1^2 c_2 c_4^4 c_4 = 12$
$c_1^2 c_2^2 c_3^2 c_4^2 = 7$	$c_1^2 c_2^2 c_3^3 = 4$	$c_1^2 c_2^3 c_4^3 = 89$	$c_1^2 c_2^4 c_3^2 c_4 = 48$
$c_1^2 c_2^5 c_4^2 = 26$	$c_1^2 c_2^6 c_3^2 = 451$	$c_1^2 c_2^7 c_4 = 231$	$c_1^2 c_2^9 = 2,556$
$c_1^3 c_3^3 c_4^2 = 6$	$c_1^3 c_2 c_3 c_4^3 = 3$	$c_1^3 c_2 c_3^5 = 59$	$c_1^3 c_2^2 c_3^3 c_4 = 32$
$c_1^3 c_2^3 c_3 c_4^2 = 17$	$c_1^3 c_2^4 c_3^3 = 276$	$c_1^3 c_2^5 c_3 c_4 = 141$	$c_1^3 c_2^7 c_3 = 1,491$
$c_1^4 c_4^4 = 1$	$c_1^4 c_3^4 c_4 = 24$	$c_1^4 c_2 c_3^2 c_4^2 = 12$	$c_1^4 c_2^2 c_4^3 = 6$
$c_1^4 c_2^2 c_3^4 = 175$	$c_1^4 c_2^3 c_3^2 c_4 = 89$	$c_1^4 c_2^4 c_4^2 = 45$	$c_1^4 c_2^5 c_3^2 = 886$
$c_1^4 c_2^6 c_4 = 436$	$c_1^4 c_2^8 = 5,112$	$c_1^5 c_3 c_4^3 = 4$	$c_1^5 c_3^5 = 119$
$c_1^5 c_2 c_3^3 c_4 = 59$	$c_1^5 c_2^2 c_3 c_4^2 = 29$	$c_1^5 c_2^3 c_3^3 = 539$	$c_1^5 c_2^4 c_3 c_4 = 264$
$c_1^5 c_2^6 c_3 = 2,962$	$c_1^6 c_2^2 c_4^2 = 19$	$c_1^6 c_2 c_4^3 = 9$	$c_1^6 c_2 c_3^4 = 339$
$c_1^6 c_2^2 c_3^2 c_4 = 164$	$c_1^6 c_2^3 c_4^2 = 79$	$c_1^6 c_2^4 c_3^2 = 1,744$	$c_1^6 c_2^5 c_4 = 832$
$c_1^6 c_2^7 = 10,302$	$c_1^7 c_3^3 c_4 = 104$	$c_1^7 c_2 c_3 c_4^2 = 49$	$c_1^7 c_2^2 c_3^3 = 1,047$
$c_1^7 c_2^3 c_3 c_4 = 496$	$c_1^7 c_2^5 c_3 = 5,912$	$c_1^8 c_4^3 = 14$	$c_1^8 c_4^3 = 641$
$c_1^8 c_2 c_3^2 c_4 = 300$	$c_1^8 c_2^2 c_4^2 = 140$	$c_1^8 c_2^3 c_3^2 = 3,437$	$c_1^8 c_2^4 c_4 = 1,600$
$c_1^8 c_2^6 = 20,887$	$c_1^9 c_3 c_4^2 = 84$	$c_1^9 c_2 c_3^3 = 2,025$	$c_1^9 c_2^2 c_3 c_4 = 936$
$c_1^9 c_2^4 c_3 = 11,853$	$c_1^{10} c_3^2 c_4 = 552$	$c_1^{10} c_2 c_4^2 = 252$	$c_1^{10} c_2^2 c_3^2 = 6,792$
$c_1^{10} c_3^3 c_4 = 3,102$	$c_1^{10} c_2^5 = 42,597$	$c_1^{11} c_3^3 = 3,927$	$c_1^{11} c_2 c_3 c_4 = 1,782$
$c_1^{11} c_3^3 c_3 = 23,892$	$c_1^{12} c_4^2 = 462$	$c_1^{12} c_2 c_3^2 = 13,497$	$c_1^{12} c_2^2 c_4 = 6,072$
$c_1^{12} c_2^4 = 87,417$	$c_1^{13} c_3 c_4 = 3,432$	$c_1^{13} c_2^2 c_3 = 48,477$	$c_1^{14} c_3^2 = 27,027$
$c_1^{14} c_2 c_4 = 12,012$	$c_1^{14} c_2^3 = 180,609$	$c_1^{15} c_2 c_3 = 99,099$	$c_1^{16} c_4 = 24,024$
$c_1^{16} c_2^2 = 375,804$	$c_1^{17} c_3 = 204,204$	$c_1^{18} c_2 = 787,644$	$c_1^{20} = 1,662,804$

5) “The fundamental problem which occupies Schubert is to express the product of two of these symbols in terms of others linearly. He succeeds in part.”

对于所有类型的旗流形 G/P , 算法 CHARACTERISTIC 同样有效. 作为另一个例子, 考察例外群 E_6 的旗流形 $E_6/P_{\{2\}}$, 其中 $P_{\{2\}} = S^1 \cdot SU(6)$, $\dim_{\mathbb{C}} E_6/P_{\{2\}} = 21$. 根据布尔巴基^[42] 对于单根的排序, 用 y_1, y_3, y_4 和 y_6 依次表示舒伯特类 s_I , 其中

$$I = \{2\}, \{5, 4, 2\}, \{6, 5, 4, 2\}, \{1, 3, 6, 5, 4, 2\},$$

则上同调环 $H^*(E_6/P_{\{2\}})$ 由元素 y_1, y_3, y_4 和 y_6 所生成 (参见文献 [15, 定理 3]). 接下来应用算法 CHARACTERISTIC, 得到旗流形 $E_6/P_{\{2\}}$ 关于这些特殊舒伯特类 y_i 的最高维特征数, 结果列于表 4.

表 3 和 4 的内容可视为舒伯特早年计算结果的直接推广. 设 M 是空间中完备圆锥截线所构成的代数簇. 则 $\dim_{\mathbb{C}} M = 8$, 且上同调 $H^*(M)$ 由表 1 中的舒伯特符号 $\mu, \rho, \nu \in H^2(M)$ 所生成. 用今天代数几何的语言来表述, 表 1 中所引述的舒伯特原著中的数据是代数簇 M 的最高维特征数.

5.3 韦伊问题的解答

对于一个李群 G 以及它的闭子群 H , 左陪集空间 G/H 具有一个光滑流形结构, 称为 G 的一个齐性空间. 代数拓扑学的一个经典课题是, 将上同调环 $H^*(G/H)$ 用最少的生成元和关系显性表出. 在此课题的研究过程中, H. Cartan、Borel^[32]、Baum^[43] 和 Toda^[44] 等发展了各种谱序列^[45], 用于解析纤维丛序列

$$H \rightarrow G \rightarrow G/H \rightarrow BH \rightarrow BG$$

的同调性质, 此处 BG 表示李群 G 的分类空间. 然而, 每当李群 G 的整系数同调存在挠元时, 尤其是当 G 是一个例外群时, 谱序列的计算会遇到实质性障碍, 无法实施.

如果 $P \subset G$ 是一个抛物子群, 则舒伯特演算对于上同调环 $H^*(G/P)$ 的结构, 展示了一道新曙光. 对于 k 个分次元素 (graded elements) $y_1, \dots, y_k$, 用记号 $\mathbb{Z}[y_1, \dots, y_k]$ 表示它们所生成的整系数多项式环. 对于一组齐次多项式 $r_1, \dots, r_m \in \mathbb{Z}[y_1, \dots, y_k]$, 用记号 $\langle r_1, \dots, r_m \rangle$ 表示它所生成的理想. 基于舒伯特演算的基底定理 (定理 4.1), 我们证明下面的结果.

定理 5.2 对于每个旗流形 G/P , 存在一组舒伯特类 $\{y_1, \dots, y_k\}$ 以及一组多项式 $\{r_1, \dots, r_m\} \subset \mathbb{Z}[y_1, \dots, y_k]$, 使得含入映射 $\{y_1, \dots, y_k\} \subset H^*(G/P)$ 诱导环同构

$$H^*(G/P) = \mathbb{Z}[y_1, \dots, y_k] / \langle r_1, \dots, r_m \rangle, \quad (5.3)$$

表 4 旗流形 $E_6/S^1 \cdot SU(6)$ 的最高维舒伯特特征数

$y_3 y_6^3 = 3$	$y_3 y_4^3 y_6 = 3$	$y_3^3 y_6^2 = 21$	$y_3^3 y_4^3 = 21$	$y_3^5 y_6 = 156$
$y_3^7 = 1,158$	$y_1 y_4^2 y_6^2 = 2$	$y_1 y_4^5 = 2$	$y_1 y_3^2 y_4^2 y_6 = 14$	$y_1 y_3^4 y_4^2 = 100$
$y_1^2 y_3 y_4 y_6^2 = 9$	$y_1^2 y_3 y_4^4 = 9$	$y_1^2 y_3^3 y_4 y_6 = 66$	$y_1^2 y_3^5 y_4 = 483$	$y_1^3 y_6^3 = 6$
$y_1^3 y_4 y_6 = 6$	$y_1^3 y_3^2 y_6^2 = 42$	$y_1^3 y_3^2 y_4^3 = 42$	$y_1^3 y_3^4 y_6 = 312$	$y_1^3 y_3^6 = 2,328$
$y_1^4 y_3 y_4 y_6 = 28$	$y_1^4 y_3^3 y_4^2 = 201$	$y_1^5 y_4 y_6^2 = 18$	$y_1^5 y_4^4 = 18$	$y_1^5 y_3^2 y_4 y_6 = 132$
$y_1^5 y_3^4 y_4 = 972$	$y_1^6 y_3 y_6^2 = 84$	$y_1^6 y_3 y_4^3 = 84$	$y_1^6 y_3^3 y_6 = 624$	$y_1^6 y_3^5 = 4,677$
$y_1^7 y_4^2 y_6 = 56$	$y_1^7 y_3^2 y_4^2 = 404$	$y_1^8 y_3 y_4 y_6 = 264$	$y_1^8 y_3^3 y_4 = 1,956$	$y_1^9 y_6^2 = 168$
$y_1^9 y_4^3 = 168$	$y_1^9 y_3^2 y_6 = 1,248$	$y_1^9 y_3^4 = 9,390$	$y_1^{10} y_3 y_4^2 = 813$	$y_1^{11} y_4 y_6 = 528$
$y_1^{11} y_3^2 y_4 = 3,936$	$y_1^{12} y_3 y_6 = 2,496$	$y_1^{12} y_3^3 = 18,837$	$y_1^{13} y_4^2 = 1,638$	$y_1^{14} y_3 y_4 = 7,917$
$y_1^{15} y_6 = 4,992$	$y_1^{15} y_3^2 = 37,752$	$y_1^{17} y_4 = 15,912$	$y_1^{18} y_3 = 75,582$	$y_1^{21} = 151,164$

其中整数 k 和 m 取最小值.

证明 用 $D(H^*(G/P)) \subset H^*(G/P)$ 表示上同调环 $H^*(G/P)$ 中可分解元素所生成的理想. 由于 $H^*(G/P)$ 无挠且以全体舒伯特类为其加法基底, 存在一组舒伯特类 $\{y_1, \dots, y_k\}$, 它们对应了商群 $H^*(G/P)/D(H^*(G/P))$ 的一个加法基底. 尤其是包含关系 $\{y_1, \dots, y_k\} \subset H^*(G/P)$ 诱导了环的满同态:

$$f: \mathbb{Z}[y_1, \dots, y_k] \rightarrow H^*(G/P),$$

它的核 $\ker f$ 是一个理想. 根据希尔伯特基底定理可知, 存在一组多项式 $\{r_1, \dots, r_m\} \subset \mathbb{Z}[y_1, \dots, y_k]$ 使得 $\ker f = \langle r_1, \dots, r_m \rangle$. 我们自然可以假设此处的 m 取最小值.

作为商群 $H^*(G/P)/D(H^*(G/P))$ 的基底的基数, 整数 k 显然是旗流形 G/P 的一个不变量. 此外, 如果 $y'_1, \dots, y'_k$ 是该群的另一个基底, 则原先的每个生成元 y_i 可以表示为新生成元 $y'_1, \dots, y'_k$ 的某个多项式 g_i . 至此, 整数 m 的不变性可以从新的环表示

$$H^*(G/P) = \mathbb{Z}[y'_1, \dots, y'_k] / \langle r'_1, \dots, r'_m \rangle$$

得到, 其中 r'_j 是在 r_j 中用 g_i 替代 y_i ($1 \leq j \leq m$) 所得到的多项式. $\square$

将 (5.3) 称为上同调环 $H^*(G/P)$ 的一个舒伯特表示 (Schubert presentation), 而其中的生成元 $\{y_1, \dots, y_k\}$ 称为旗流形 G/P 的一组特殊舒伯特类 (special Schubert classes). 根据定理 5.2 的证明, 以表达式 (5.3) 为目标, 韦伊问题的解答可以分解为如下两个步骤来完成: 对于每个旗流形 G/P ,

- (1) 求它的一组特殊舒伯特类 $y_1, \dots, y_k$;
- (2) 求理想 $\ker f$ 的一个希尔伯特基底 $\{r_1, \dots, r_m\}$.

此外, 为了保证 (5.3) 能够便捷地应用于旗流形 G/P 的几何与拓扑性质的研究, 我们需要附加一个技术性的要求: 特殊舒伯特类 $y_1, \dots, y_k$ 的选取, 应使得希尔伯特基底 $\{r_1, \dots, r_m\}$ 具有最简表达式.

由于上同调环 $H^*(G/P)$ 中的乘法运算由舒伯特特征数唯一决定 (参见定理 4.2), 上述两个步骤可以通过算法 CHARACTERISTIC 实现. 我们在文献 [14–16] 中, 对于李群的闭子群, 建立了不变量理论; 解析了 Serre 谱序列的核心部分; 编写了以下与算法 CHARACTERISTIC 相衔接的程序: Decomposition、Null-space 和 Giambelli polynomials. 最终实现了软件包 “CHOWRING”, 其功能表述如下.

算法 CHOWRING

- **输入:** 李群 G 的嘉当矩阵 $C = (c_{ij})_{n \times n}$ 以及一个确定抛物子群 P 的子列 $I \subseteq \{1, \dots, n\}$;
- **输出:** 上同调环 $H^*(G/P)$ 的舒伯特表示.

应用示例 5.2 为说明算法 CHOWRING 的有效性, 我们考虑旗流形 G/P , 其中李群 G 及其抛物子群 P 由表 5 给出. 对于这些旗流形, 韦伊问题的答案如下 (参见文献 [15, 定理 1–6]):

- (1) 设 y_1, y_3, y_4 和 y_6 依次是旗流形 $F_4/C_3 \cdot S^1$ 上的舒伯特类 s_I , 其中 $I = \{1\}, \{3, 2, 1\}, \{4, 3, 2, 1\}, \{3, 2, 4, 3, 2, 1\}$, 则

$$H^*(F_4/C_3 \cdot S^1) = \mathbb{Z}[y_1, y_3, y_4, y_6] / \langle r_3, r_6, r_8, r_{12} \rangle,$$

表 5 本文所关心的李群 G 及其抛物子群 P

G	F_4	F_4	E_6	E_6	E_7	E_7
P	$C_3 \cdot S^1$	$B_3 \cdot S^1$	$A_6 \cdot S^1$	$D_5 \cdot S^1$	$D_6 \cdot S^1$	$E_6 \cdot S^1$

$$\begin{aligned}
r_3 &= 2y_3 - y_1^3, \\
r_6 &= 2y_6 + y_3^2 - 3y_1^2y_4, \\
r_8 &= 3y_4^2 - y_1^2y_6, \\
r_{12} &= y_6^2 - y_4^3.
\end{aligned}$$

(2) 设 y_1 和 y_4 依次是旗流形 $F_4/B_3 \cdot S^1$ 上的舒伯特类 s_I , 其中 $I = \{4\}, \{3, 2, 3, 4\}$, 则

$$\begin{aligned}
H^*(F_4/B_3 \cdot S^1) &= \mathbb{Z}[y_1, y_4]/\langle r_8, r_{12} \rangle, \\
r_8 &= 3y_4^2 - y_1^8, \\
r_{12} &= 26y_4^3 - 5y_1^{12}.
\end{aligned}$$

(3) 设 y_1, y_3, y_4 和 y_6 依次是旗流形 $E_6/A_6 \cdot S^1$ 上的舒伯特类 s_I , 其中 $I = \{2\}, \{5, 4, 2\}, \{6, 5, 4, 2\}, \{1, 3, 6, 5, 4, 2\}$, 则

$$\begin{aligned}
H^*(E_6/A_6 \cdot S^1) &= \mathbb{Z}[y_1, y_3, y_4, y_6]/\langle r_6, r_8, r_9, r_{12} \rangle, \\
r_6 &= 2y_6 + y_3^2 - 3y_1^2y_4 + 2y_1^3y_3 - y_1^6, \\
r_8 &= 3y_4^2 - 6y_1y_3y_4 + y_1^2y_6 + 5y_1^2y_3^2 - 2y_1^5y_3, \\
r_9 &= 2y_3y_6 - y_1^3y_6, \\
r_{12} &= y_4^3 - y_6^2.
\end{aligned}$$

(4) 设 y_1 和 y_4 依次是旗流形 $E_6/D_5 \cdot S^1$ 上的舒伯特类 s_I , 其中 $I = \{6\}, \{2, 4, 5, 6\}$, 则

$$\begin{aligned}
H^*(E_6/D_5 \cdot S^1) &= \mathbb{Z}[y_1, y_4]/\langle r_9, r_{12} \rangle, \\
r_9 &= 2y_1^9 + 3y_1y_4^2 - 6y_1^5y_4, \\
r_{12} &= y_4^3 - 6y_1^4y_4^2 + y_1^{12}.
\end{aligned}$$

(5) 设 y_1, y_5 和 y_9 依次是旗流形 $E_7/E_6 \cdot S^1$ 上的舒伯特类 s_I , 其中 $I = \{7\}, \{2, 4, 5, 6, 7\}, \{1, 5, 4, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, 则

$$\begin{aligned}
H^*(E_7/E_6 \cdot S^1) &= \mathbb{Z}[y_1, y_5, y_9]/\langle r_{10}, r_{14}, r_{18} \rangle, \\
r_{10} &= y_5^2 - 2y_1y_9, \\
r_{14} &= 2y_5y_9 - 9y_1^4y_5^2 + 6y_1^9y_5 - y_1^{14}, \\
r_{18} &= y_9^2 + 10y_1^3y_5^3 - 9y_1^8y_5^2 + 2y_1^{13}y_5.
\end{aligned}$$

(6) 设 y_1, y_4, y_6 和 y_9 依次是旗流形 $E_7/D_6 \cdot S^1$ 上的舒伯特类 s_I , 其中 $I = \{1\}, \{2, 4, 3, 1\}, \{2, 6, 5, 4, 3, 1\}, \{3, 4, 2, 7, 6, 5, 4, 3, 1\}$, 则

$$\begin{aligned}
H^*(E_7/D_6 \cdot S^1) &= \mathbb{Z}[y_1, y_4, y_6, y_9]/\langle r_9, r_{12}, r_{14}, r_{18} \rangle, \\
r_9 &= 2y_9 + 3y_1y_4^2 + 4y_1^3y_6 + 2y_1^5y_4 - 2y_1^9, \\
r_{12} &= 3y_6^2 - y_4^3 - 3y_1^4y_4^2 - 2y_1^6y_6 + 2y_1^8y_4, \\
r_{14} &= 3y_4^2y_6 + 3y_1^2y_6^2 + 6y_1^2y_4^3 + 6y_1^4y_4y_6 + 2y_1^5y_9 - y_1^{14},
\end{aligned}$$

$$r_{18} = 5y_9^2 + 29y_6^3 - 24y_1^6y_6^2 + 45y_1^2y_4y_6^2 + 2y_1^9y_9.$$

关于软件包 CHOWRING 的更多应用, 可参见文献 [16, 17].

从代数的观点看, 舒伯特特征数和舒伯特表示 (5.3) 是同一旗流形 G/P 的上同调环 $H^*(G/P)$ 的两种截然不同的表示法. 前者依赖于基底以及基底元素之间九九乘法表, 需要海量的数据来记录 (参见表 3 和 4); 而后者则采用多项式环的商环的形式, 表述完整、简洁, 从而更加方便使用. 正是由于这些原因, 较之特征数问题, 韦伊问题的要求不仅简洁, 而且更为深刻且本质.

6 总结

古往今来, 几何学家们的一个共同希望是, 在他们所关切的几何对象 (如代数簇、胞腔和向量丛) 之间, 建立有效可算的代数机制. 舒伯特演算的出现, 或相交 (同调) 理论的诞生和发展, 迎合了这个需求. 今天, 舒伯特演算已深度融入微分几何学、代数拓扑学和李群表示理论等核心数学领域 [46–50], 深刻地影响着这些领域的发展轨迹, 成为 21 世纪物理学弦论的核心要素 [21, 51]. 这一切, 不仅是希尔伯特宽阔视野和前瞻性的有力见证, 也对探索舒伯特演算行之有效的演算法则提出了迫切要求.

本文回顾了第 15 问题的解答历程, 给出了特征数问题和韦依问题的解答. 尤其是, 基底定理 (定理 4.1) 明确了舒伯特演算的实施对象, 而定理 5.1 和 5.2 构成了舒伯特演算核心算法的系统表述. 至于第 3 节中引述的舒伯特原著 [8] 中的几何算例的严格论证, 读者可参见 Kleiman 的综述报告 [52], 或相交理论专著 [46, 49, 53] 中相应章节.

余建明教授根据德文原文, 翻译了希尔伯特第 15 问题, 全文引述如下 [21].

希尔伯特第 15 问题: 为舒伯特计数演算法建立严格基础.

这个问题是: 对于计数几何中得到的几何数目, 在准确界定其适用范围的前提下, 严格地证明其正确性. 特别需要研究的是, 舒伯特在他的书中, 基于所谓特殊位置原理 (或称个数守恒原理) 建立了一套计数演算法, 并据此算出的那些几何数目.

虽然今天的代数学原则上保证了可以实施消元法, 但要证明计数几何中的定理, 对代数学的要求却比这要高得多, 因为它要求在对于特定的具体方程 (组) 进行消元时, 事先就能知道最后所得方程的次数及其解的重数.

参考文献

- 1 Hilbert D. Mathematische probleme. Bull Amer Math Soc, 1902, 8: 437–479
- 2 van der Waerden B L. The foundation of algebraic geometry from Severi to André Weil. Arch Hist Exact Sci, 1971, 7: 171–180
- 3 van der Waerden B L. Topologische Begründung des Kalküls der abzählenden Geometrie. Math Ann, 1930, 102: 337–362
- 4 Weil A. Foundations of Algebraic Geometry, 2nd ed. Providence: Amer Math Soc, 1962
- 5 Schappacher N. A Historical Sketch of B. L. van der Waerden's Work in Algebraic Geometry: 1926–1946. In: Gray J J, Parshall K H, eds. Episodes in the History of Modern Algebra (1800–1950). History of Mathematics 32. Providence: Amer Math Soc; London: London Math Soc, 2007, 245–283
- 6 Schubert H. Zur Theorie der Charakteristike. Celles J, 1870, 71: 366–386
- 7 Schubert H. A Lösung des Charakteristiken-Problems für lineare Räume beliebiger Dimension. Mitteilungen der Mathematischen Gesellschaft in Hamburg, t. I, 1886, 134–155
- 8 Schubert H. Kalkül der Abzählenden Geometrie. Berlin-Heidelberg-New York: Springer-Verlag, 1979
- 9 Chaput P E, Perrin N. Towards a Littlewood-Richardson rule for Kac-Moody homogeneous spaces. J Lie Theory, 2012, 22: 17–80

- 10 Kirillov A N, Maeno T. Braided differential calculus and quantum Schubert calculus. In: Formal Power Series and Algebraic Combinatorics. San Diego: University of California Press, 2006
- 11 Duan H. The degree of a Schubert variety. *Adv Math*, 2003, 180: 112–133
- 12 Duan H. Multiplicative rule of Schubert classes. *Invent Math*, 2005, 159: 407–436
- 13 Duan H, Zhao X. Multiplicative rule of Schubert classes. *Invent Math*, 2009, 177: 683–684
- 14 Duan H, Zhao X. Algorithm for multiplying Schubert classes. *Int J Algebra Comput*, 2006, 16: 1197–1210
- 15 Duan H, Zhao X. The Chow rings of generalized Grassmannians. *Found Comput Math*, 2010, 10: 245–274
- 16 Duan H, Zhao X. Schubert presentation of the cohomology ring of flag manifolds G/T . *LMS J Comput Math*, 2015, 18: 489–506
- 17 Duan H, Zhao X. On Schubert's problem of characteristics. In: Schubert Calculus and Its Applications in Combinatorics and Representation Theory. Springer Proceedings in Mathematics and Statistics, vol. 332. Singapore: Springer, 2020, 43–71
- 18 Duan H, Zhao X. Schubert calculus and intersection theory of flag manifolds (in Russian). *Uspekhi Matematicheskikh Nauk*, 2022, 77: 173–196
- 19 Duan H, Zhao X. Schubert calculus and intersection theory of flag manifolds. *Russian Math Surveys*, 2022, in press
- 20 Zhao X, Duan H, Graff G. The Chow ring of flag manifolds. *Open Research Data*, 2020. Gdansk University of Technology IT Service Centre, 2020, doi: 10.34808/ffc2-6s76
- 21 Wikipedia: Hilbert's 15th problem (in Chinese). *Shuxue Yilin*, 2021, (1): 23–25 [维基百科: Hilbert 第 15 问题. 余建明, 译. 李平校. 数学译林, 2021, (1): 23–25]
- 22 Lefschetz S. Intersections and transformations of complexes and manifolds. *Trans Amer Math Soc*, 1926, 28: 1–49
- 23 Charles M. Construction des coniques qui satisfont à cinq conditions. *C R Acad Sci Paris*, 1864, 58: 297–308
- 24 Kleiman S L. Problem 15: Rigorous foundation of Schubert's enumerative calculus. In: Proceedings of Symposium in Pure Mathematics, 28. Providence: Amer Math Soc, 1976, 445–482
- 25 Yvonne D S. Interview with Bartel Leendert van der Waerden. *Notices Amer Math Soc*, 1997, 44: 313–321
- 26 Sottile F. Schubert Calculus. *Encyclopedia of Mathematics*. <http://encyclopediaofmath.org/wiki/Schubert-calculus>
- 27 Kleiman S L. Book review: Intersection theory. *Bull Amer Math Soc (NS)*, 1985, 12: 137–144
- 28 Severi F. Il Principio della Conservazione del Numero. *Rend Circ Mat Palermo (2)*, 1912, 33: 313
- 29 Severi F. Sui fondamenti della geometria numerativa e sulla teoria delle caratteristiche. *Atti 1st Veneto*, 1916, 75: 1121–1162
- 30 Ehresmann C. Sur la topologie de certains espaces homogenes. *Ann of Math (2)*, 1934, 35: 396–443
- 31 Bernstein I N, Gel'fand I M, Gel'fand S I. Schubert cells and cohomology of the spaces G/P . *Russian Math Surveys*, 1973, 28: 1–26
- 32 Borel A. Sur la cohomologie des espaces fibres principaux et des espaces homogenes de groupes de Lie compacts. *Ann of Math (2)*, 1953, 57: 115–207
- 33 Chevalley C. Sur les décompositions cellulaires des Espaces G/B . In: Haboush W, ed. Algebraic Groups and Their Generalizations: Classical Methods. Proceedings of Symposium in Pure Mathematics, vol. 56. Providence: Amer Math Soc, 1994, 1–23
- 34 Littlewood D E, Richardson A R. Group characters and algebra. *Philos Trans Royal Soc London*, 1934, 233: 99–141
- 35 Chern S S. Characteristic classes of Hermitian manifolds. *Ann of Math (2)*, 1946, 47: 85–121
- 36 Wu W T. Les i-carrés dans une variété grassmannienne. *C R Acad Sci Paris*, 1950, 230: 918–920
- 37 Chow W L. Anneaux de Chow et applications. *Séminaire C. Chevalley*, 1958
- 38 Baker H F. Principles of Geometry, Vol. 6. Cambridge: Cambridge University Press, 1936
- 39 Manin J I. On Hilbert fifteenth problem. In: Hilbert's Problems (in Russian). Moscow: Nauka, 1969, 175–181
- 40 Schubert H. Anzahlbestimmungen für lineare Raume beliebiger Dimension. *Acta Math*, 1886, 8: 97–118
- 41 Coolidge J L. A History of Geometrical Methods. Oxford: Oxford University Press, 1940
- 42 Bourbaki N. Elements de Mathématique. Chapitre I–Chapitre VIII. Paris: Groupes et algebres de Lie, Hermann, 1960–1975
- 43 Baum P F. On the cohomology of homogeneous spaces. *Topology*, 1968, 7: 15–38
- 44 Toda H. On the cohomology ring of some homogeneous spaces. *J Math Kyoto Univ*, 1975, 15: 185–199
- 45 Wolf J. The cohomology of homogeneous spaces. *Amer J Math*, 1977, 99: 312–340
- 46 Fulton W. Intersection Theory. New York: Springer-Verlag, 1998
- 47 Fulton W, Harris J. Representation Theory: A First Course. Graduate Texts in Mathematics, vol. 129. New York: Springer, 1991
- 48 Gorbounov V, Petrov V. Schubert calculus and singularity theory. *J Geom Phys*, 2012, 62: 352–360

- 49 Griffith P, Harris J. Principles of Algebraic Geometry. New York: Wiley, 1978
- 50 Milnor J, Stasheff J. Characteristic Classes. Annals of Mathematics Studies, vol. 76. Princeton: Princeton University Press, 1975
- 51 Katz S. Enumerative Geometry and String Theory. Student Mathematical Library, 32. Providence: Amer Math Soc, 2006
- 52 Kleiman S L. Intersection theory and enumerative geometry: A decade in review. In: Proceedings of Symposium in Pure Mathematics, vol. 46. Providence: Amer Math Soc, 1987, 321–370
- 53 Eisenbud D, Harries J. 3264 and All That: A Second Course in Algebraic Geometry. Cambridge: Cambridge University Press, 2016

Make Schubert calculus rigorous

Haibao Duan & Xuezhi Zhao

Abstract Hilbert’s 15th problem asks for a rigorous foundation of Schubert calculus, where the most challenging and durable part is Schubert’s problem of characteristics. In the course of securing the foundation of algebraic geometry, van der Waerden and Andre Weil attributed the problem to the determination of the intersection theory of flag manifolds. This article surveys the background, content, and resolution of Hilbert’s 15th problem. Our main results are a unified formula computing Schubert’s characteristics (Theorem 5.1) and a systematic description for solving Weil’s problem (Theorem 5.2). Meanwhile, we illustrate the effectiveness of both the formula and the algorithm in Examples 5.1 and 5.2, respectively.

Keywords Hilbert’s 15th problem, Schubert calculus, intersection (homology) theory, Schubert variety, Lie group

MSC(2020) 14M15, 55T10

doi: 10.1360/SSM-2020-0334