Prandtl 方程适定性的仿线性化方法

献给陈恕行教授 80 华诞

王渝西¹, 章志飞^{2*}

1. 四川大学数学学院, 成都 610065;

2. 北京大学数学科学学院, 北京 100871

E-mail: wangyuxi@scu.edu.cn, zfzhang@math.pku.edu.cn

收稿日期: 2020-07-21; 接受日期: 2020-09-12; 网络出版日期: 2021-03-02; * 通信作者
国家自然科学基金 (批准号: 11425103) 资助项目

摘要 本文主要利用仿线性化的方法研究 Prandtl 方程对单调初值在 Sobolev 空间中的局部适定性和解的长时间存在性. 相比 Nash-Moser 迭代方法, 该方法的主要优点是对初值的相容性条件和正则性条件要求更低, 且证明也更为简洁.

关键词 仿线性化 Prandtl 方程 解的存在时间

MSC (2020) 主题分类 35D35, 35Q35

1 引言

本文研究二维半平面上的 Prandtl 方程

$$\begin{cases} \partial_t u + u \partial_x u + v \partial_y u - \partial_y^2 u + \partial_x p = 0, \\ \partial_x u + \partial_y v = 0, \\ u|_{y=0} = v|_{y=0} = 0, \quad \lim_{y \rightarrow +\infty} u(t, x, y) = U, \\ u|_{t=0} = u_0(x, y), \end{cases} \quad (1.1)$$

其中变量 $x \in \mathbb{R}$, $y \in [0, +\infty)$, $t \geq 0$, (U, p) 满足 Bernoulli 律

$$\partial_t U + U \partial_x U + \partial_x p = 0.$$

方程 (1.1) 由 Prandtl 在 1904 年引入, 用于描述 Navier-Stokes 方程当黏性系数非常小时解在边界附近的性态.

英文引用格式: Wang Y X, Zhang Z F. Paralinearization method about the well-posedness of the Prandtl equation (in Chinese). Sci Sin Math, 2021, 51: 1037–1056, doi: 10.1360/SSM-2020-0231

当初值 $u_0(x, y)$ 关于 y 变量是单调时, Oleinik 和 Samokhin^[1] 证明了 Prandtl 方程 (1.1) 经典解的存在性和唯一性. 进一步在顺压条件下 (即 $\partial_x p \leq 0$), Xin 和 Zhang^[2] 证明了弱解的整体存在性. 然而, 弱解光滑到边界的 C^∞ 正则性仍是一个公开的问题. 对非单调的解析初值, Sammartino 和 Caflisch^[3] 证明了解析解的存在性和唯一性. 当初值不满足单调性条件时, Gérard-Varet 和 Dormy^[4] 证明了 Prandtl 方程在 Sobolev 空间中是不适定的. 他们构造了一类次指数增长的解, 即 $e^{t|\xi|^{\frac{1}{2}}}$, 其中 ξ 是 x 方向的 Fourier 变量. 这个结果蕴涵 Prandtl 方程应该在 Gevrey 类 2 中是适定的. 经过一系列的重要工作 (参见文献 [5–8]), 这个猜测已经被解决.

Prandtl 方程适定性理论的建立是研究无黏极限问题的关键一步. 为此, 最近两个独立的重要工作 [9, 10] 发展了能量方法, 证明了单调初值情形下 Prandtl 方程在 Sobolev 空间中的局部适定性. 文献 [9] 利用了 Nash-Moser 迭代的方法, 文献 [10] 应用技巧性的变换避开了使用 Nash-Moser 迭代, 但两篇论文的本质想法是相同的. 为理解这两个重要工作, Chen 等^[11] 利用仿线性化的方法给出了 Prandtl 方程在 Sobolev 空间中适定性的一个新证明. 该工作与文献 [9, 10] 的主要区别有 3 点: 初值的相容性条件更少, 正则性条件更低, 考虑了指数衰减的初值. 最近, 利用文献 [11] 中发展的框架, Chen 等^[12] 解决了 Hartmann 边界层 (layer) 解在 Sobolev 空间中的整体稳定性问题.

本文的主要目标是, 用仿线性化方法对具多项式衰减的单调初值证明 Prandtl 方程在低正则 Sobolev 空间中的局部适定性, 且进一步研究当初值是单调剪切流的一个小扰动时解的长时间存在性. 对于小的解析初值, 解的长时间存在性首先由文献 [13] 证明 (也可参见文献 [14]). 对于单调多项式衰减的初值, 解的长时间存在性由 Xu 和 Zhang^[15] 证明, 即任意给定一个时间 $T > 0$, 只要初值充分靠近单调剪切流, 解在 $[0, T]$ 上存在. 但文献 [15] 中, 解存在区间的长度 T 与扰动大小的关系似乎并不太清楚. 对于指数衰减的初值, 即便建立类似文献 [15] 的结果, 似乎也是不平凡的.

本文将考虑如下形式的初值:

$$u_0(x, y) = u_0^s(y) + \tilde{u}_0(x, y).$$

令 $u^s(t, y)$ 为如下热方程的解:

$$\begin{cases} \partial_t u^s - \partial_y^2 u^s = 0, \\ u^s|_{y=0} = 0, \quad \lim_{y \rightarrow +\infty} u^s(t, y) = 1, \\ u^s|_{t=0} = u_0^s(y). \end{cases} \quad (1.2)$$

我们将解 u 分解如下:

$$u(t, x, y) = u^s(t, y) + \tilde{u}(t, x, y),$$

则 $\tilde{u}$ 满足

$$\begin{cases} \partial_t \tilde{u} + u \partial_x \tilde{u} + v \partial_y \tilde{u} - \partial_y^2 \tilde{u} = 0, \\ \partial_x \tilde{u} + \partial_y v = 0, \\ \tilde{u}|_{y=0} = v|_{y=0} = 0, \quad \lim_{y \rightarrow +\infty} \tilde{u}(t, x, y) = 0, \\ \tilde{u}|_{t=0} = \tilde{u}_0. \end{cases} \quad (1.3)$$

为叙述本文的结果, 我们引进一些函数空间. 首先 L_ℓ^p 和 $L_{y,\ell}^p$ 分别为 $\mathbb{R}_+^2$ 和 $\mathbb{R}_+$ 上的加权 L^p 空间, 其范数定义为

$$\|f\|_{L_\ell^p} = \|\langle y \rangle^\ell f(x, y)\|_{L^p}, \quad \|f\|_{L_{y,\ell}^p} = \|\langle y \rangle^\ell f(y)\|_{L^p}.$$

设 $k, s \in \mathbb{N}$, 加权的各项异性 Sobolev 空间 $H_\ell^{k,s}$ 和 $H_{y,\ell}^s$ 的范数定义为

$$\|f\|_{H_\ell^{k,s}}^2 = \sum_{\alpha \leq k} \sum_{\beta \leq s} \|\partial_x^\alpha \partial_y^\beta f\|_{L_\ell^2}^2,$$

$$\|f\|_{H_{y,\ell}^s}^2 = \sum_{\beta \leq s} \|\partial_y^\beta f\|_{L_{y,\ell}^2}^2.$$

为了简单起见, 当 $\ell = 0$ 时, 我们分别用 $H^{k,s}$ 和 H_y^s 代表 $H_\ell^{k,s}$ 和 $H_{y,\ell}^s$.

本文的第一个结果是方程 (1.1) 的局部适定性.

定理 1.1 设 $k \geq 2, \ell > \frac{1}{2}, k - \ell \geq 2$. 假设 u_0^s 和 $\tilde{u}_0$ 满足

$$\sum_{m=0}^2 \|\partial_y^m \tilde{u}_0\|_{H_{k-\ell-1+m}^{1,0}} + \sum_{m=0}^1 \|\partial_y^m \tilde{u}_0\|_{H_{k-\ell-1+m}^{3,0}} \leq C$$

和相容性条件 $u_0^s(0) = \tilde{u}_0|_{y=0} = 0$. 进一步假设存在常数 $C, c > 0$ 使得

$$c\langle y \rangle^{-k} \leq \partial_y u_0^s(y) \leq C\langle y \rangle^{-k}, \quad |\partial_y^2 u_0^s(y)| \leq C\langle y \rangle^{-k-1}, \quad (1.4)$$

$$\sum_{m=1}^2 |\langle y \rangle^{k-1+m} \partial_y^m \tilde{u}_0(x, y)| + |\langle y \rangle^k \partial_x \partial_y \tilde{u}_0(x, y)| \leq C, \quad \partial_y u_0(x, y) \geq c\langle y \rangle^{-k}, \quad (1.5)$$

则存在 $T > 0$ 使得方程 (1.1) 在时间区间 $[0, T]$ 上存在唯一解, 并且存在 $c_1 > 0$ 和 $C_1 > 0$ 使得

$$c_1 \langle y \rangle^{-k} \leq \partial_y u(t, x, y) \leq C_1 \langle y \rangle^{-k},$$

$$|\langle y \rangle^k \partial_y u(t, x, y)| + |\langle y \rangle^k \partial_x \partial_y u(t, x, y)| + |\langle y \rangle^{k+1} \partial_y^2 u(t, x, y)| \leq C_1,$$

$$\sum_{m=0}^2 \|\partial_y^m \tilde{u}\|_{H_{k-\ell-1+m}^{1,0}}^2 + \sum_{m=0}^1 \|\partial_y^m \tilde{u}\|_{H_{k-\ell-1+m}^{3,0}}^2 \leq C_1.$$

在文献 [9, 11] 中, 局部存在性也要求初值是剪切流的一个小扰动, 这里去掉了这个不太自然的要求. 另外, 我们的证明也给出了如下解的爆破判别准则: 若 $A(T) < +\infty$, 其中

$$A(t) = \sup_{(s,x,y) \in [0,t] \times \mathbb{R}_+^2} \left(\sum_{m=1}^2 |\langle y \rangle^{k-1+m} \partial_y^m \tilde{u}(s, x, y)| + |\langle y \rangle^k \partial_x \partial_y \tilde{u}(s, x, y)| \right),$$

则解的存在时间可以延拓到 $t > T$.

定理 1.1 的解能否延拓成整体解是一个重要的公开问题. Wang 和 Zhang^[16] 研究了这个问题. 目前的一个关键障碍是, 无法证明当 y 在边界附近时 $|\partial_y^2 \tilde{u}(t, x, y)| \leq C$. 自然的问题是, 当初值是剪切流的一个小扰动时, 解是否整体存在? 这个问题也是极不平凡的, 目前只有部分结果 (参见文献 [15]).

本文的第二个结果是方程 (1.1) 解的长时间存在性, 主要结论与文献 [15] 是基本类似的, 但我们对初值的相容性条件和正则性条件更弱, 而且比较显式地给出了解的存在时间与扰动大小的关系.

定理 1.2 设 $k \geq 2, \ell > \frac{1}{2}, k - \ell \geq 2$. 假设存在 $\varepsilon \in (0, 1)$ 使得 u_0^s 和 $\tilde{u}_0$ 满足

$$\sum_{m=0}^2 \|\partial_y^m \tilde{u}_0\|_{H_{k-\ell-1+m}^{1,0}} + \sum_{m=0}^1 \|\partial_y^m \tilde{u}_0\|_{H_{k-\ell-1+m}^{3,0}} \leq C\varepsilon$$

和相容性条件 $u_0^s(0) = \tilde{u}_0|_{y=0} = 0$. 进一步假设存在常数 $C, c > 0$ 使得对于 $y \in [0, +\infty)$, 有

$$c\langle y \rangle^{-k} \leq \partial_y u_0^s(y) \leq C\langle y \rangle^{-k}, \quad |\partial_y^2 u_0^s(y)| \leq C\langle y \rangle^{-k-1},$$

$$\sum_{m=1}^2 |\langle y \rangle^{k-1+m} \partial_y^m \tilde{u}_0(x, y)| + |\langle y \rangle^k \partial_x \partial_y \tilde{u}_0(x, y)| \leq C\varepsilon,$$

则存在时间 $T \sim (\ln \varepsilon^{-1})^\beta$ 使得方程 (1.1) 在时间区间 $[0, T]$ 上存在唯一解, 并且存在 $c_1 > 0$, $C_1 > 0$ 和充分小常数 $\delta \in (0, 1)$, 成立

$$\begin{aligned} c_1 \langle t \rangle^{-\frac{k}{2}} \langle y \rangle^{-k} &\leq \partial_y u(t, x, y) \leq C_1 \langle t \rangle^{\frac{k}{2}} \langle y \rangle^{-k}, \\ |\langle y \rangle^k \partial_y \tilde{u}(t, x, y)| + |\langle y \rangle^k \partial_x \partial_y \tilde{u}(t, x, y)| + |\langle y \rangle^{k+1} \partial_y^2 \tilde{u}(t, x, y)| &\leq C_1 \delta, \\ \sum_{m=0}^2 \|\partial_y^m \tilde{u}\|_{H_{k-\ell-1+m}^{1,0}}^2 + \sum_{m=0}^1 \|\partial_y^m \tilde{u}\|_{H_{k-\ell-1+m}^{3,0}}^2 &\leq C_1 \varepsilon^\alpha, \end{aligned}$$

其中 $\alpha \in (0, 1)$, $\beta = \beta(k) < 1$ 为依赖于 k 的正常数.

本文关于存在时间的估计确保不是最佳的. 若能将时间区间的长度改进为 $\varepsilon^{-\beta}$ ($\beta > 0$) 也是一个非常有意义的问题.

2 仿积分解

我们引进切方向 $x \in \mathbb{R}$ 上仿积分解, 具体可以参见文献 [17]. 记

$$\begin{aligned} \Delta_j f &= \mathcal{F}^{-1}(\varphi(2^{-j}|\xi|)\widehat{f}), \quad \text{当 } j \geq 0 \text{ 时}, \\ S_j f &= \mathcal{F}^{-1}(\chi(2^{-j}|\xi|)\widehat{f}), \quad \text{当 } j \geq 0 \text{ 时}, \\ \Delta_{-1} f &= S_0 f, \quad \Delta_j f = 0, \quad \text{当 } j \leq -2 \text{ 时}, \end{aligned}$$

其中 $\chi(\tau)$ 和 $\varphi(\tau)$ 是满足

$$\text{supp } \chi \subset \left\{ \tau \in \mathbb{R} : |\tau| \leq \frac{4}{3} \right\}, \quad \text{supp } \varphi \subset \left\{ \tau \in \mathbb{R} : \frac{3}{4} \leq |\tau| \leq \frac{8}{3} \right\}$$

的光滑函数, 并且对 $\tau \in \mathbb{R}$, 有

$$\chi(\tau) + \sum_{j \geq 0} \varphi(2^{-j}\tau) = 1.$$

Bony 仿积 $T_f g$ 定义为

$$T_f g = \sum_j S_{j-1} f \Delta_j g,$$

则有如下的 Bony 仿积分解:

$$fg = T_f g + T_g f + R(f, g), \quad (2.1)$$

其中余项 $R(f, g)$ 定义为

$$R(f, g) = \sum_{|k-k'| \leq 1; k, k' \geq j-2} \Delta_k f \Delta_{k'} g.$$

记 $W^{s,p}$ 为 $\mathbb{R}$ 上经典的 Sobolev 空间. 下面回顾一些经典的仿积估计 (参见文献 [17]).

引理 2.1 设 $s \in \mathbb{R}$, 则有

$$\|T_f g\|_{H^s} \leq C \|f\|_{L^\infty} \|g\|_{H^s}.$$

如果 $s > 0$, 则有

$$\|R(f, g)\|_{H^s} \leq C \min(\|f\|_{L^\infty} \|g\|_{H^s}, \|f\|_{H^s} \|g\|_{L^\infty}).$$

引理 2.2 设 $s \in \mathbb{R}$ 和 $\sigma \in (0, 1]$, 则有

$$\|(T_a T_b - T_{ab})f\|_{H^s} \leq C(\|a\|_{W^{\sigma, \infty}} \|b\|_{L^\infty} + \|a\|_{L^\infty} \|b\|_{W^{\sigma, \infty}}) \|f\|_{H^{s-\sigma}}.$$

特别地, 有

$$\|[T_a, T_b]f\|_{H^s} \leq C(\|a\|_{W^{\sigma, \infty}} \|b\|_{L^\infty} + \|a\|_{L^\infty} \|b\|_{W^{\sigma, \infty}}) \|f\|_{H^{s-\sigma}},$$

$$\|(T_a - T_a^*)f\|_{H^s} \leq C \|a\|_{W^{\sigma, \infty}} \|f\|_{H^{s-\sigma}},$$

其中 T_a^* 为 T_a 的共轭算子.

引理 2.3 设 $s \in \mathbb{N}$, 则成立

$$\|[\partial^s, T_a]f\|_{L^2} \leq C \|a\|_{W^{1, \infty}} \|f\|_{H^{s-1}}.$$

3 仿线性化和切向的正则性估计

3.1 方程的仿线性化

求解 Prandtl 方程一个最本质的困难是利用通常的能量方法非线性项 $v \partial_y u$ 会在切向损失一阶导数. 为克服这个困难, Oleinik 和 Samokhin^[1] 用 Crocco 变换将方程化成一个拟线性的抛物型方程. 文献 [9, 10] 的本质想法是引入一个新的未知量

$$w = \partial_y \left(\frac{u}{\partial_y u} \right).$$

关键的观察是 w 的线性化方程可以通过能量方法求解, 而非线性方程可以用 Nash-Moser 迭代方法求解.

类似于文献 [11], 本文首先仿线性化 Prandtl 方程, 这样可以避免使用复杂的 Nash-Moser 迭代, 进而降低初值的相容性条件和正则性条件要求. 本节始终假设 u 为 Prandtl 方程 (1.1) 的光滑解且存在常数 $c_1 > 0$ 使得

$$\partial_y u(t, x, y) \geq c_1 \langle t \rangle^{-\frac{k}{2}} \langle y \rangle^{-k}, \quad (t, x, y) \in [0, T] \times \mathbb{R}_+^2. \quad (3.1)$$

为方便起见, 记

$$a = (\partial_y u)^{-1}, \quad b = \partial_y u.$$

利用 Bony 仿积分解 (2.1), 可得

$$\partial_t \tilde{u} + T_u \partial_x \tilde{u} + T_{\partial_y u} v - \partial_y^2 \tilde{u} = f,$$

其中 f 是好的非线性项, 即

$$f = -T_{\partial_x \tilde{u}} \tilde{u} - R(\tilde{u}, \partial_x \tilde{u}) - T_v \partial_y u - R(v, \partial_y u);$$

而 $T_{\partial_y u} v$ 是坏项. 为消除这一坏项, 我们引入好量 w , 定义如下:

$$w = \partial_y (T_{(\partial_y u)^{-1}} \tilde{u}) = \partial_y T_a \tilde{u}.$$

容易验证 w 满足如下的方程:

$$\begin{cases} \partial_t w + T_u \partial_x w - \partial_y^2 w = \partial_y F_1 + F_2, \\ \partial_y w|_{y=0} = 0, \quad \lim_{y \rightarrow +\infty} w = 0, \\ w|_{t=0} = w_0(x, y), \end{cases} \quad (3.2)$$

其中

$$\begin{aligned} F_1 &= T_{\partial_t a} \tilde{u} - [T_a, T_u] \partial_x \tilde{u} + (T_{ab} - T_a T_b) v - [\partial_y^2, T_a] \tilde{u} + T_a f + T_u T_{\partial_x a} \tilde{u}, \\ F_2 &= (T_{ba} - T_b T_a) \partial_x \tilde{u} + T_{\partial_y u} T_{\partial_x a} \tilde{u}. \end{aligned}$$

3.2 切向正则性估计

首先定义能量泛函

$$E(t) = \sum_{m=0}^2 \|\partial_y^m \tilde{u}(t)\|_{H_{k-\ell-1+m}^{1,0}}^2 + \sum_{m=0}^1 \|\partial_y^m \tilde{u}(t)\|_{H_{k-\ell-1+m}^{3,0}}^2 \quad (3.3)$$

和

$$A(t) = \sup_{(s,x,y) \in [0,t] \times \mathbb{R}_+^2} \left(\sum_{m=1}^2 |\langle y \rangle^{k-1+m} \partial_y^m \tilde{u}(s, x, y)| + |\langle y \rangle^k \partial_x \partial_y \tilde{u}(s, x, y)| \right). \quad (3.4)$$

命题 3.1 设 w 为方程 (3.2) 在时间区间 $[0, T]$ 上的光滑解, 则对任意的 $t \in [0, T]$, 当 $k - \ell \geq 2$ 且 $k \geq 2$ 时, 成立

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \|w\|_{H_{-\ell}^{3,0}}^2 + \|\partial_y w\|_{H_{-\ell}^{3,0}}^2 &\leq C(\langle t \rangle^{\frac{5k}{2}+1} + \langle t \rangle^{\frac{3k}{2}} A(t)^2) E(t)^{\frac{1}{2}} \|w\|_{H_{-\ell}^{3,0}} \\ &\quad + C(\langle t \rangle^{5k+2} + \langle t \rangle^{3k} A(t)^4) E(t), \end{aligned}$$

其中 C 是与 t 无关的常数.

设 $u^s(t, y)$ 是热方程 (1.2) 的解. 下面引理给出了热方程解的点态衰减估计.

引理 3.1 设 $k > 1$, $u_0^s(0) = 0$ 并且满足 (1.4), 则存在仅依赖于 c 和 C 的常数 $c_1 > 0$ 和 $C_1 > 0$, 使得当 $(t, y) \in [0, \infty) \times [0, +\infty)$ 时, 成立

$$\begin{aligned} |u^s(t, y) - 1| &\leq C_1 \langle t \rangle^{\frac{k}{2}} \langle y \rangle^{-k+1}, \\ c_1 \langle t \rangle^{-\frac{k}{2}} \langle y \rangle^{-k} &\leq \partial_y u^s(t, y) \leq C_1 \langle t \rangle^{\frac{k}{2}} \langle y \rangle^{-k}, \\ |\partial_y^2 u^s(t, y)| &\leq C_1 \langle t \rangle^{\frac{k+1}{2}} \langle y \rangle^{-k-1}, \end{aligned}$$

其中 $\langle t \rangle = 1 + t$.

证明 解 $u^s(t, y)$ 可表示为

$$u^s(t, y) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_0^{+\infty} (e^{-\frac{(y-y')^2}{4t}} - e^{-\frac{(y+y')^2}{4t}}) u_0^s(y') dy'.$$

由 $u_0^s|_{y=0} = 0$, 分部积分得到

$$\begin{aligned} \partial_y u^s(t, y) &= \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_0^{+\infty} (e^{-\frac{(y-y')^2}{4t}} + e^{-\frac{(y+y')^2}{4t}}) \partial_y u_0^s(y') dy' \\ &=: I_1 + I_2. \end{aligned}$$

利用 (1.4) 中的假设 $\partial_y u_0^s \geq c\langle y \rangle^{-k}$ 和 Peetre 不等式: 对任意的 $\lambda \in \mathbb{R}$, 有

$$c\langle y-z \rangle^{-|\lambda|} \langle z \rangle^\lambda \leq \langle y \rangle^\lambda \leq C\langle y-z \rangle^{|\lambda|} \langle z \rangle^\lambda,$$

得到

$$\begin{aligned} I_1 &\geq \frac{c}{\sqrt{t}} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{(y-y')^2}{4t}} \langle y' \rangle^{-k} dy' \\ &\geq \frac{c}{\sqrt{t}} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{(y-y')^2}{4t}} \langle y-y' \rangle^{-k} \langle y \rangle^{-k} dy' \\ &\geq c\langle y \rangle^{-k} \int_{-\frac{y}{2\sqrt{t}}}^{+\infty} e^{-\xi^2} \langle 2\sqrt{t}\xi \rangle^{-k} d\xi \\ &\geq c\langle y \rangle^{-k} \langle t \rangle^{-\frac{k}{2}} \int_{-\frac{y}{2\sqrt{t}}}^{\infty} e^{-\xi^2} \langle \xi \rangle^{-k} d\xi \\ &\geq c\langle y \rangle^{-k} \langle t \rangle^{-\frac{k}{2}} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{9}{10}\xi^2} d\xi \geq c_1 \langle y \rangle^{-k} \langle t \rangle^{-\frac{k}{2}}, \end{aligned}$$

这里利用了

$$\langle 2\sqrt{t}\xi \rangle^{-k} \geq c\langle t \rangle^{-\frac{k}{2}} \langle \xi \rangle^{-k} \geq c\langle t \rangle^{-\frac{k}{2}} e^{-\frac{1}{10}\xi^2}.$$

类似地, 利用 $\partial_y u_0^s \leq C\langle y \rangle^{-k}$ 和 Peetre 不等式可得

$$\begin{aligned} |I_2| &\leq |I_1| \leq \frac{C}{\sqrt{t}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{(y-y')^2}{4t}} \langle y-y' \rangle^k \langle y \rangle^{-k} dy' \\ &\leq C\langle y \rangle^{-k} \langle t \rangle^{\frac{k}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{9}{10}\xi^2} d\xi \\ &\leq C_1 \langle y \rangle^{-k} \langle t \rangle^{\frac{k}{2}}. \end{aligned}$$

另一方面, $I_2 \geq 0$. 综上可得

$$c_1 \langle y \rangle^{-k} \langle t \rangle^{-\frac{k}{2}} \leq \partial_y u^s \leq C_1 \langle t \rangle^{\frac{k}{2}} \langle y \rangle^{-k}.$$

由于 $\lim_{y \rightarrow +\infty} u^s = 1$ 和 $k > 1$, 因此有

$$|u^s - 1| = \left| \int_y^{\infty} \partial_y u^s dy' \right| \leq C\langle t \rangle^{\frac{k}{2}} \int_y^{\infty} \langle y' \rangle^{-k} dy' \leq C\langle t \rangle^{\frac{k}{2}} \langle y \rangle^{-k+1}.$$

由 $u_0^s|_{y=0} = 0$, 分部积分两次得到

$$\partial_y^2 u^s = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_0^\infty (e^{-\frac{(y-y')^2}{4t}} - e^{-\frac{(y+y')^2}{4t}}) \partial_{y'}^2 u_0^s(y') dy'.$$

由此, 利用 $|\partial_y^2 u_0^s| \leq C\langle y \rangle^{-k-1}$ 可得

$$|\partial_y^2 u^s| \leq C\langle t \rangle^{\frac{k+1}{2}} \langle y \rangle^{-k-1}.$$

引理证毕. □

接下来给出非线性项 F_1 和 F_2 在加权 Sobolev 空间中的估计.

引理 3.2 当 $k - \ell \geq 2$ 且 $k \geq 2$ 时, 成立

$$\|\langle y \rangle^{-\ell} F_1\|_{H^{3,0}} + \|\langle y \rangle^{-\ell} F_2\|_{H^{3,0}} \leq C(\langle t \rangle^{\frac{5k}{2}+1} + \langle t \rangle^{\frac{3k}{2}} A(t)^2) E(t)^{\frac{1}{2}}.$$

证明 令 $\tilde{a} = a - (\partial_y u^s)^{-1}$ 和 $\tilde{b} = \partial_y u - \partial_y u^s$, 则有

$$[T_a, T_u] = [T_{\tilde{a}}, T_{\tilde{u}}], \quad T_{ab} - T_a T_b = T_{\tilde{a}\tilde{b}} - T_{\tilde{a}} T_{\tilde{b}}.$$

由引理 2.2 和 3.1, 可得

$$\begin{aligned} \|\langle y \rangle^{-\ell} [T_a, T_u] \partial_x \tilde{u}\|_{H^{3,0}} &= \|[T_{\langle y \rangle^{-k} \tilde{a}}, T_{\langle y \rangle^{k-1} \tilde{u}}] \langle y \rangle^{1-\ell} \partial_x \tilde{u}\|_{H^{3,0}} \\ &\leq C \|\langle y \rangle^{-k} \tilde{a}\|_{L_y^\infty(W_x^{1,\infty})} \|\langle y \rangle^{k-1} \tilde{u}\|_{L_y^\infty(W_x^{1,\infty})} \|\langle y \rangle^{1-\ell} \tilde{u}\|_{H^{3,0}} \\ &\leq C \langle t \rangle^k A(t)^2 \|\langle y \rangle^{1-\ell} \tilde{u}\|_{H^{3,0}} \\ &\leq C \langle t \rangle^k A(t)^2 \|\langle y \rangle^{k-\ell-1} \tilde{u}\|_{H^{3,0}}. \end{aligned}$$

这里用到了下面的事实:

$$\begin{aligned} \|\langle y \rangle^{-k} \tilde{a}\|_{L_y^\infty(W_x^{1,\infty})} &\leq \left\| \langle y \rangle^{-k} \frac{\partial_y \tilde{u}}{\partial_y u \partial_y u^s} \right\|_{L_y^\infty(W_x^{1,\infty})} \leq C \langle t \rangle^k A(t), \\ \|\langle y \rangle^{k-1} \tilde{u}\|_{L_y^\infty(W_x^{1,\infty})} &\leq C A(t). \end{aligned}$$

同理可证,

$$\begin{aligned} \|\langle y \rangle^{-\ell} (T_{ab} - T_a T_b) v\|_{H^{3,0}} &\leq C \|\langle y \rangle^{-k} \tilde{a}\|_{L_y^\infty(W_x^{1,\infty})} \|\langle y \rangle^{k-\ell} \tilde{b}\|_{L_y^2(W_x^{1,\infty})} \|v\|_{L_y^\infty(H_x^2)} \\ &\leq C \langle t \rangle^k A(t)^2 \|\langle y \rangle^{\frac{1}{2}+\ell} \tilde{u}\|_{H^{3,0}} \\ &\leq C \langle t \rangle^k A(t)^2 \|\langle y \rangle^{k-\ell-1} \tilde{u}\|_{H^{3,0}}. \end{aligned}$$

由引理 2.1 可以推出

$$\begin{aligned} \|\langle y \rangle^{-\ell} T_a f\|_{H^{3,0}} &\leq C \|\langle y \rangle^{-k} a\|_{L^\infty} \|\langle y \rangle^{k-\ell} f\|_{H^{3,0}} \\ &\leq C \langle t \rangle^{\frac{k}{2}} (\|\langle y \rangle^{k-1} \partial_x \tilde{u}\|_{L^\infty} \|\langle y \rangle^{1-\ell} \tilde{u}\|_{H^{3,0}} + \|v\|_{L^\infty} \|\langle y \rangle^{k-\ell} \partial_y \tilde{u}\|_{H^{3,0}}) \\ &\leq C \langle t \rangle^{\frac{k}{2}} A(t) (\|\langle y \rangle^{k-\ell-1} \tilde{u}\|_{H^{3,0}} + \|\langle y \rangle^{k-\ell} \partial_y \tilde{u}\|_{H^{3,0}}) \end{aligned}$$

和

$$\|\langle y \rangle^{-\ell} T_{u-1} T_{\partial_x a} \tilde{u}\|_{H^{3,0}} = \|T_{\langle y \rangle^{k-1}(u-1)} T_{\langle y \rangle^{-k} \partial_x a} \langle y \rangle^{1-\ell} \tilde{u}\|_{H^{3,0}}$$

$$\begin{aligned}
&\leq C\|\langle y \rangle^{k-1}(u-1)\|_{L^\infty}\|\langle y \rangle^{-k}\partial_x a\|_{L^\infty}\|\langle y \rangle^{1-\ell}\tilde{u}\|_{H^{3,0}} \\
&\leq C(\langle t \rangle^{\frac{k}{2}} + A(t))\langle t \rangle^k A(t)\|\langle y \rangle^{k-\ell-1}\tilde{u}\|_{H^{3,0}} \\
&\leq C(\langle t \rangle^{\frac{3k}{2}} A(t) + \langle t \rangle^k A(t)^2)\|\langle y \rangle^{k-\ell-1}\tilde{u}\|_{H^{3,0}}.
\end{aligned}$$

F_1 中剩下的项可以组合成

$$T_{\partial_x a}\tilde{u} + T_{\partial_t a}\tilde{u} - [\partial_y^2, T_a]\tilde{u} = T_{\partial_x a}\tilde{u} + T_{\partial_t a - \partial_y^2 a}\tilde{u} - 2T_{\partial_y a}\partial_y \tilde{u}.$$

由 (1.3) 的第一个方程知,

$$\partial_t a - \partial_y^2 a = \frac{(u-1)\partial_x \partial_y \tilde{u} + v\partial_y^2 u}{(\partial_y u)^2} + \frac{2\partial_y^2 u}{\partial_y u}\partial_y a - \partial_x a.$$

因此,

$$\begin{aligned}
T_{\partial_x a}\tilde{u} + T_{\partial_t a}\tilde{u} - [\partial_y^2, T_a]\tilde{u} &= 2T_{\frac{\partial_y^2 u}{(\partial_y u)^2}}\partial_y \tilde{u} + T_B\tilde{u} + 2T_{\frac{\partial_y^2 u}{\partial_y u}\partial_y a}\tilde{u} \\
&=: A_1 + A_2 + A_3,
\end{aligned}$$

其中 $B = \frac{(u-1)\partial_x \partial_y \tilde{u} + v\partial_y^2 u}{(\partial_y u)^2}$. 由 (3.1) 和引理 3.1 知,

$$\begin{aligned}
\|\langle y \rangle^{-k+1}B\|_{L^\infty} &\leq C\langle t \rangle^k(\|\langle y \rangle(u-1)\|_{L^\infty}\|\langle y \rangle^k\partial_x \partial_y \tilde{u}\|_{L^\infty} + \|v\|_{L^\infty}\|\langle y \rangle^{k+1}\partial_y^2 u\|_{L^\infty}) \\
&\leq C(\langle t \rangle^{\frac{3k+1}{2}}A(t) + \langle t \rangle^k A(t)^2).
\end{aligned}$$

由引理 2.1 和 (3.1) 可以推出

$$\begin{aligned}
\|\langle y \rangle^{-\ell}A_1\|_{H^{3,0}} &\leq C\left\|\langle y \rangle^{-k+1}\frac{\partial_y^2 u}{(\partial_y u)^2}\right\|_{L^\infty}\|\langle y \rangle^{k-\ell-1}\partial_y \tilde{u}\|_{H^{3,0}} \\
&\leq C\langle t \rangle^k(\langle t \rangle^{\frac{k+1}{2}} + A(t))\|\langle y \rangle^{k-\ell}\partial_y \tilde{u}\|_{H^{3,0}}, \\
\|\langle y \rangle^{-\ell}A_2\|_{H^{3,0}} &\leq C\|\langle y \rangle^{-k+1}B\|_{L^\infty}\|\langle y \rangle^{k-\ell-1}\tilde{u}\|_{H^{3,0}} \\
&\leq C(\langle t \rangle^{\frac{3k+1}{2}}A(t) + \langle t \rangle^k A(t)^2)\|\langle y \rangle^{k-\ell-1}\tilde{u}\|_{H^{3,0}}, \\
\|\langle y \rangle^{-\ell}A_3\|_{H^{3,0}} &\leq C\left\|\langle y \rangle\frac{\partial_y^2 u}{\partial_y u}\right\|_{L^\infty}\|\langle y \rangle^{1-k}\partial_y a\|_{L^\infty}\|\langle y \rangle^{k-\ell-2}\tilde{u}\|_{H^{3,0}} \\
&\leq C\langle t \rangle^{\frac{3k}{2}}(\langle t \rangle^{k+1} + A(t)^2)\|\langle y \rangle^{k-\ell-1}\tilde{u}\|_{H^{3,0}}.
\end{aligned}$$

综上所述

$$\begin{aligned}
\|\langle y \rangle^{-\ell}(T_{\partial_x a}\tilde{u} + T_{\partial_t a}\tilde{u} - [\partial_y^2, T_a]\tilde{u})\|_{H^{3,0}} &\leq C(\langle t \rangle^{\frac{5k}{2}+1} + \langle t \rangle^{\frac{3k}{2}} A(t)^2)\|\langle y \rangle^{k-\ell-1}\tilde{u}\|_{H^{3,0}} \\
&\quad + C\langle t \rangle^k(\langle t \rangle^{\frac{k+1}{2}} + A(t))\|\langle y \rangle^{k-\ell-1}\partial_y \tilde{u}\|_{H^{3,0}}.
\end{aligned}$$

最后将上述估计合在一起, 得到

$$\|\langle y \rangle^{-\ell}F_1\|_{H^{3,0}} \leq C(\langle t \rangle^{\frac{5k}{2}+1} + \langle t \rangle^{\frac{3k}{2}} A(t)^2)E(t)^{\frac{1}{2}}.$$

我们类似地可以推出

$$\|\langle y \rangle^{-\ell}F_2\|_{H^{3,0}} \leq C\langle t \rangle^k A(t)(\langle t \rangle^{\frac{k}{2}} + A(t))\|\langle y \rangle^{k-\ell-1}\tilde{u}\|_{H^{3,0}}.$$

引理证毕. $\square$

现在来证明本节的主要命题 3.1.

命题 3.1 的证明 对方程 (3.2) 做 $H_{-\ell}^{3,0}$ 能量估计, 得到

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|w\|_{H_{-\ell}^{3,0}}^2 - (\partial_y^2 w, w)_{H_{-\ell}^{3,0}} + (T_u \partial_x w, w)_{H_{-\ell}^{3,0}} = (\partial_y F_1, w)_{H_{-\ell}^{3,0}} + (F_2, w)_{H_{-\ell}^{3,0}}.$$

由 $\partial_y w|_{y=0} = 0$, 分部积分得到

$$\begin{aligned} -(\partial_y^2 w, w)_{H_{-\ell}^{3,0}} &= \|\partial_y w\|_{H_{-\ell}^{3,0}}^2 - 2\ell(\partial_y w, \langle y \rangle^{-1} w)_{H_{-\ell}^{3,0}} \\ &\geq \frac{1}{2} \|\partial_y w\|_{H_{-\ell}^{3,0}}^2 - C\|w\|_{H_{-\ell}^{3,0}}^2. \end{aligned}$$

为估计 $(T_u \partial_x w, w)_{H_{-\ell}^{3,0}}$, 我们做如下的分解:

$$\begin{aligned} (T_u \partial_x w, w)_{H_{-\ell}^{3,0}} &= \sum_{k=0}^3 (\partial_x^k T_u \partial_x w, \partial_x^k w)_{L_{-\ell}^2} \\ &= \sum_{k=0}^3 (T_u \partial_x^k \partial_x w, \partial_x^k w)_{L_{-\ell}^2} + \sum_{k=1}^3 ([\partial_x^k, T_{\tilde{u}}] \partial_x w, \partial_x^k w)_{L_{-\ell}^2} \\ &= D + \sum_{k=1}^3 ([\partial_x^k, T_{\tilde{u}}] \partial_x w, \partial_x^k w)_{L_{-\ell}^2}, \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} D &= -\frac{1}{2} \sum_{k=0}^3 (T_{\partial_x \tilde{u}} \partial_x^k w, \partial_x^k w)_{L_{-\ell}^2} + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^3 ((T_u - T_u^*) \partial_x^k \partial_x w, \partial_x^k w)_{L_{-\ell}^2} \\ &=: D_1 + D_2. \end{aligned}$$

由引理 2.1–2.3 可推出

$$\begin{aligned} |D_1| &\leq \sum_{k=0}^3 \|\langle y \rangle^{-\ell} T_{\partial_x \tilde{u}} \partial_x^k w\|_{L^2} \|\langle y \rangle^{-\ell} \partial_x^k w\|_{L^2} \leq CA(t) \|\langle y \rangle^{-\ell} w\|_{H^{3,0}}^2, \\ |D_2| &\leq \sum_{k=0}^3 \|\langle y \rangle^{-\ell} (T_{\tilde{u}} - T_{\tilde{u}}^*) \partial_x^k \partial_x w\|_{L^2} \|\langle y \rangle^{-\ell} \partial_x^k w\|_{L^2} \leq CA(t) \|\langle y \rangle^{-\ell} w\|_{H^{3,0}}^2, \\ \sum_{k=1}^3 ([\partial_x^k, T_{\tilde{u}}] \partial_x w, \partial_x^k w)_{L_{-\ell}^2} &\leq CA(t) \|\langle y \rangle^{-\ell} w\|_{H^{3,0}}^2. \end{aligned}$$

由此可得

$$(T_u \partial_x w, w)_{H_{-\ell}^{3,0}} \leq CA(t) \|\langle y \rangle^{-\ell} w\|_{H^{3,0}}^2.$$

利用事实 $F_1|_{y=0} = -[\partial_y^2, T_a] \tilde{u}|_{y=0} = 0$ 和引理 3.2, 得到

$$\begin{aligned} &(\partial_y F_1, w)_{H_{-\ell}^{3,0}} + (F_2, w)_{H_{-\ell}^{3,0}} \\ &\leq C \|\langle y \rangle^{-\ell} F_1\|_{H^{3,0}} (\|\langle y \rangle^{-\ell} \partial_y w\|_{H^{3,0}} + \|\langle y \rangle^{-\ell} w\|_{H^{3,0}}) + \|\langle y \rangle^{-\ell} F_2\|_{H^{3,0}} \|\langle y \rangle^{-\ell} w\|_{H^{3,0}} \\ &\leq C(\langle t \rangle^{\frac{5k}{2}+1} + \langle t \rangle^{\frac{3k}{2}} A(t)^2) E(t)^{\frac{1}{2}} \|\langle y \rangle^{-\ell} w\|_{H^{3,0}} \end{aligned}$$

$$+ C(\langle t \rangle^{5k+2} + \langle t \rangle^{3k} A(t)^4) E(t) + \frac{1}{4} \|\langle y \rangle^{-\ell} \partial_y w\|_{H^{3,0}}^2.$$

综上可得

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \|w\|_{H_{-\ell}^{3,0}}^2 + \|\partial_y w\|_{H_{-\ell}^{3,0}}^2 &\leq C(\langle t \rangle^{\frac{5k}{2}+1} + \langle t \rangle^{\frac{3k}{2}} A(t)^2) E(t)^{\frac{1}{2}} \|\langle y \rangle^{-\ell} w\|_{H^{3,0}} \\ &\quad + C(\langle t \rangle^{5k+2} + \langle t \rangle^{3k} A(t)^4) E(t). \end{aligned}$$

命题 3.1 证毕. $\square$

4 法向正则性估计

为提高解在 y 方向 (法向) 的正则性, 我们直接用关于 $\tilde{u}$ 的方程.

命题 4.1 设 $\tilde{u}$ 是方程 (1.3) 在时间区间 $[0, T]$ 上的光滑解. 当 $k - \ell \geq 2$, $\ell > \frac{1}{2}$ 和 $k \geq 2$ 时, 成立

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (\|\tilde{u}\|_{H_{k-\ell-1}^{1,0}}^2 + \|\partial_y \tilde{u}\|_{H_{k-\ell}^{1,0}}^2 + \|\partial_y^2 \tilde{u}\|_{H_{k-\ell+1}^{1,0}}^2) &+ (\|\partial_y \tilde{u}\|_{H_{k-\ell-1}^{1,0}}^2 + \|\partial_y^2 \tilde{u}\|_{H_{k-\ell}^{1,0}}^2 + \|\partial_y^3 \tilde{u}\|_{H_{k-\ell+1}^{1,0}}^2) \\ &\leq C(\langle t \rangle^{k+1} + A(t)^2) E(t), \end{aligned}$$

其中 C 是与 T 无关的常数.

证明 我们将证明分为如下几步.

步骤 1 $\|\tilde{u}\|_{H_{k-\ell-1}^{1,0}}$ 的估计.

方程 (1.3) 与 $\tilde{u}$ 做 $H_{k-\ell-1}^{1,0}$ 内积, 得到

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\tilde{u}\|_{H_{k-\ell-1}^{1,0}}^2 - (\partial_y^2 \tilde{u}, \tilde{u})_{H_{k-\ell-1}^{1,0}} = -(u \partial_x \tilde{u}, \tilde{u})_{H_{k-\ell-1}^{1,0}} - (v \partial_y u, \tilde{u})_{H_{k-\ell-1}^{1,0}}.$$

利用分部积分可得

$$\begin{aligned} -(\partial_y^2 \tilde{u}, \tilde{u})_{H_{k-\ell-1}^{1,0}} &= \|\partial_y \tilde{u}\|_{H_{k-\ell-1}^{1,0}}^2 + 2(k - \ell - 1) \langle y \rangle^{-1} \partial_y \tilde{u}, \tilde{u} \rangle_{H_{k-\ell-1}^{1,0}} \\ &\geq \frac{1}{2} \|\partial_y \tilde{u}\|_{H_{k-\ell-1}^{1,0}}^2 - C \|\tilde{u}\|_{H_{k-\ell-1}^{1,0}}^2. \end{aligned}$$

利用分部积分和 $\partial_x \tilde{u} + \partial_y v = 0$, 得到

$$\begin{aligned} (u \partial_x \tilde{u}, \tilde{u})_{H_{k-\ell-1}^{1,0}} &+ (v \partial_y u, \tilde{u})_{H_{k-\ell-1}^{1,0}} \\ &= -(k - \ell - 1) \langle y \rangle^{-1} v \tilde{u}, \tilde{u} \rangle_{L_{k-\ell-1}^2} - (k - \ell - 1) \langle y \rangle^{-1} v \partial_x \tilde{u}, \partial_x \tilde{u} \rangle_{L_{k-\ell-1}^2} \\ &\quad + (v \partial_y u^s, \tilde{u})_{L_{k-\ell-1}^2} + (\partial_x \tilde{u} \partial_x \tilde{u}, \partial_x \tilde{u})_{L_{k-\ell-1}^2} + (\partial_x v \partial_y u, \partial_x \tilde{u})_{L_{k-\ell-1}^2}. \end{aligned}$$

容易验证,

$$\begin{aligned} |\langle y \rangle^{-1} v \tilde{u}, \tilde{u} \rangle_{L_{k-\ell-1}^2}| &+ |\langle y \rangle^{-1} v \partial_x \tilde{u}, \partial_x \tilde{u} \rangle_{L_{k-\ell-1}^2}| \leq C A(t) \|\tilde{u}\|_{H_{k-\ell-1}^{1,0}}^2, \\ |(v \partial_y u^s, \tilde{u})_{L_{k-\ell-1}^2}| &\leq C \|v\|_{L_y^\infty(L_x^2)} \|\langle y \rangle^{k-\ell-1} \partial_y u^s\|_{L_y^2} \|\tilde{u}\|_{L_{k-\ell-1}^2} \leq C \langle t \rangle^{\frac{k}{2}} \|\tilde{u}\|_{H_{k-\ell-1}^{1,0}} \|\tilde{u}\|_{L_{k-\ell-1}^2}, \\ (\partial_x \tilde{u} \partial_x \tilde{u}, \partial_x \tilde{u})_{L_{k-\ell-1}^2} &\leq C A(t) \|\tilde{u}\|_{H_{k-\ell-1}^{1,0}}^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (\partial_x v \partial_y u, \partial_x \tilde{u})_{L^2_{k-\ell-1}} &\leq C(\|\partial_x v\|_{L^\infty_y(L^2_x)} \|\langle y \rangle^{k-\ell-1} \partial_y u^s\|_{L^2_y} + \|\partial_x v\|_{L^\infty_y(L^2_x)} \|\langle y \rangle^{k-\ell-1} \partial_y \tilde{u}\|_{L^2_y(L^\infty_x)}) \|\tilde{u}\|_{H^{1,0}_{k-\ell-1}} \\
 &\leq C(\|\langle y \rangle^{\frac{1}{2}+\tilde{u}}\|_{H^{2,0}} \langle t \rangle^{\frac{k}{2}} + A(t)) \|\langle y \rangle^{\frac{1}{2}+\tilde{u}}\|_{H^{2,0}} \|\tilde{u}\|_{H^{1,0}_{k-\ell-1}}.
 \end{aligned}$$

从而有

$$(u \partial_x \tilde{u}, \tilde{u})_{H^{1,0}_{k-\ell-1}} + (v \partial_y u, \tilde{u})_{H^{1,0}_{k-\ell-1}} \leq C(\langle t \rangle^{\frac{k}{2}} + A(t)) E(t).$$

因此, 得到

$$\frac{d}{dt} \|\tilde{u}\|_{H^{1,0}_{k-\ell-1}}^2 + \|\partial_y \tilde{u}\|_{H^{1,0}_{k-\ell-1}}^2 \leq C(\langle t \rangle^{\frac{k}{2}} + \tilde{A}(t)) E(t). \quad (4.1)$$

步骤 2 $\|\partial_y \tilde{u}\|_{H^{1,0}_{k-\ell}}$ 的估计.

对方程 (1.3) 求 ∂_y , 得到

$$\partial_t \partial_y \tilde{u} + u \partial_x \partial_y \tilde{u} + v \partial_y^2 u - \partial_y^3 \tilde{u} = 0. \quad (4.2)$$

方程 (4.2) 与 $\partial_y \tilde{u}$ 做 $H^{1,0}_{k-\ell}$ 内积, 可以得到

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\partial_y \tilde{u}\|_{H^{1,0}_{k-\ell}}^2 - (\partial_y^3 \tilde{u}, \partial_y \tilde{u})_{H^{1,0}_{k-\ell}} = -(u \partial_x \partial_y \tilde{u} + v \partial_y^2 u, \partial_y \tilde{u})_{H^{1,0}_{k-\ell}}.$$

由 $\partial_y^2 \tilde{u}|_{y=0} = 0$, 分部积分得到

$$-(\partial_y^3 \tilde{u}, \partial_y \tilde{u})_{H^{1,0}_{k-\ell}} = \|\partial_y^2 \tilde{u}\|_{H^{1,0}_{k-\ell}}^2 + 2(k-\ell)(\langle y \rangle^{-1} \partial_y^2 \tilde{u}, \partial_y \tilde{u})_{H^{1,0}_{k-\ell}} \geq \frac{1}{2} \|\partial_y^2 \tilde{u}\|_{H^{1,0}_{k-\ell}}^2 - C \|\partial_y \tilde{u}\|_{H^{1,0}_{k-\ell}}^2.$$

利用分部积分和 $\partial_x \tilde{u} + \partial_y v = 0$, 得到

$$\begin{aligned}
 (u \partial_x \partial_y \tilde{u} + v \partial_y^2 u, \partial_y \tilde{u})_{L^2_{k-\ell}} &= -(k-\ell)(\langle y \rangle^{-1} v \partial_y \tilde{u}, \partial_y \tilde{u})_{L^2_{k-\ell}} + (v \partial_y^2 u^s, \partial_y \tilde{u})_{L^2_{k-\ell}} \\
 &\leq C A(t) \|\partial_y \tilde{u}\|_{L^2_{k-\ell}}^2 + C \|\langle y \rangle^{\frac{1}{2}+\tilde{u}}\|_{H^{1,0}} \|\langle y \rangle^{k-\ell} \partial_y^2 u^s\|_{L^2_y} \|\partial_y \tilde{u}\|_{L^2_{k-\ell}} \\
 &\leq C A(t) \|\partial_y \tilde{u}\|_{L^2_{k-\ell}}^2 + C \langle t \rangle^{\frac{k+1}{2}} \|\langle y \rangle^{\frac{1}{2}+\tilde{u}}\|_{H^{1,0}} \|\partial_y \tilde{u}\|_{L^2_{k-\ell}},
 \end{aligned}$$

以及

$$\begin{aligned}
 &(u \partial_x^2 \partial_y \tilde{u} + v \partial_x \partial_y^2 \tilde{u} + \partial_x \tilde{u} \partial_x \partial_y \tilde{u} + \partial_x v \partial_y^2 u, \partial_x \partial_y \tilde{u})_{L^2_{k-\ell}} \\
 &= -(k-\ell)(\langle y \rangle^{-1} v \partial_y \partial_x \tilde{u}, \partial_y \partial_x \tilde{u})_{L^2_{k-\ell}} + (\partial_x \tilde{u} \partial_x \partial_y \tilde{u} + \partial_x v \partial_y^2 u, \partial_x \partial_y \tilde{u})_{L^2_{k-\ell}} \\
 &\leq C A(t) \|\partial_y \tilde{u}\|_{H^{1,0}_{k-\ell}}^2 + C(\|\partial_x v\|_{L^\infty_y(L^2_x)} \|\langle y \rangle^{k-\ell} \partial_y^2 u^s\|_{L^2_y} + \|\partial_x v\|_{L^\infty_y(L^2_x)} \|\langle y \rangle^{k-\ell} \partial_y^2 \tilde{u}\|_{L^2_y(L^\infty_x)}) \|\partial_y \tilde{u}\|_{H^{1,0}_{k-\ell}} \\
 &\leq C A(t) \|\partial_y \tilde{u}\|_{H^{1,0}_{k-\ell}}^2 + C(\langle t \rangle^{\frac{k+1}{2}} + A(t)) \|\langle y \rangle^{\frac{1}{2}+\tilde{u}}\|_{H^{2,0}} \|\partial_y \tilde{u}\|_{H^{1,0}_{k-\ell}}.
 \end{aligned}$$

因此, 得到

$$\frac{d}{dt} \|\partial_y \tilde{u}\|_{H^{1,0}_{k-\ell}}^2 + \|\partial_y^2 \tilde{u}\|_{H^{1,0}_{k-\ell}}^2 \leq C(\langle t \rangle^{\frac{k+1}{2}} + A(t)) E(t). \quad (4.3)$$

步骤 3 $\|\partial_y^2 \tilde{u}\|_{H^{1,0}_{k-\ell+1}}$ 的估计.

对方程 (1.3) 求 ∂_y^2 , 可得

$$\partial_t \partial_y^2 \tilde{u} + \partial_y(u \partial_x \partial_y \tilde{u} + v \partial_y^2 u) - \partial_y^4 \tilde{u} = 0. \quad (4.4)$$

方程 (4.4) 与 $\partial_y^2 \tilde{u}$ 做 $H_{k-\ell+1}^{1,0}$ 内积, 可得

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\partial_y^2 \tilde{u}\|_{H_{k-\ell+1}^{1,0}}^2 - (\partial_y^4 \tilde{u}, \partial_y^2 \tilde{u})_{H_{k-\ell+1}^{1,0}} = -(\partial_y(u \partial_x \partial_y \tilde{u} + v \partial_y^2 u), \partial_y^2 \tilde{u})_{H_{k-\ell+1}^{1,0}}.$$

由 $\partial_y^2 \tilde{u}|_{y=0} = 0$, 分部积分得到

$$-(\partial_y^4 \tilde{u}, \partial_y^2 \tilde{u})_{H_{k-\ell+1}^{1,0}} \geq \frac{1}{2} \|\partial_y^3 \tilde{u}\|_{H_{k-\ell+1}^{1,0}}^2 - C \|\partial_y^2 \tilde{u}\|_{H_{k-\ell+1}^{1,0}}^2.$$

利用 $\partial_x \tilde{u} + \partial_y v = 0$ 和分部积分, 可得

$$\begin{aligned} & (u \partial_x \partial_y^2 \tilde{u} + v \partial_y^3 u + \partial_y u \partial_x \partial_y \tilde{u} + \partial_y v \partial_y^2 u, \partial_y^2 \tilde{u})_{L_{k-\ell+1}^2} \\ &= -(k-\ell+1)(\langle y \rangle^{-1} v \partial_y^2 \tilde{u}, \partial_y^2 \tilde{u})_{L_{k-\ell+1}^2} + (v \partial_y^3 u^s + \partial_y u \partial_x \partial_y \tilde{u} + \partial_y v \partial_y^2 u, \partial_y^2 \tilde{u})_{L_{k-\ell+1}^2} \\ &= -(k-\ell+1)(\langle y \rangle^{-1} v \partial_y^2 \tilde{u}, \partial_y^2 \tilde{u})_{L_{k-\ell+1}^2} + (\partial_y u \partial_x \partial_y \tilde{u} + \partial_y v \partial_y^2 \tilde{u}, \partial_y^2 \tilde{u})_{L_{k-\ell+1}^2} \\ &\quad - (v \partial_y^3 u^s, \partial_y^2 \tilde{u})_{L_{k-\ell+1}^2} - (k-\ell+1)(v \partial_y^2 u^s, \langle y \rangle^{-1} \partial_y^2 \tilde{u})_{L_{k-\ell+1}^2} \\ &\leq CA(t) \|\partial_y^2 \tilde{u}\|_{L_{k-\ell+1}^2}^2 + \|\langle y \rangle^k \partial_y u\|_{L^\infty} \|\langle y \rangle^{-\ell+1} \partial_y \tilde{u}\|_{H^{1,0}} \|\partial_y^2 \tilde{u}\|_{L_{k-\ell+1}^2} \\ &\quad + C \|\partial_x \tilde{u}\|_{L^\infty} \|\partial_y^2 \tilde{u}\|_{L_{k-\ell+1}^2} \|\partial_y^2 \tilde{u}\|_{L_{k-\ell+1}^2} \\ &\quad + C \|v\|_{L_y^\infty(L_x^2)} \|\langle y \rangle^{k-\ell+1} \partial_y^2 u^s\|_{L_y^2} (\|\partial_y^3 \tilde{u}\|_{H_{k-\ell+1}^{1,0}} + \|\partial_y^2 \tilde{u}\|_{H_{k-\ell+1}^{1,0}}) \\ &\leq \frac{1}{32} \|\partial_y^3 \tilde{u}\|_{L_{k-\ell+1}^2}^2 + C(\langle t \rangle^{k+1} + A(t))E(t). \end{aligned}$$

类似地, 可以得到

$$\begin{aligned} & (u \partial_x^2 \partial_y^2 \tilde{u} + v \partial_x \partial_y^3 \tilde{u} + \partial_x v \partial_y^3 u + \partial_y u \partial_x^2 \partial_y \tilde{u} + \partial_x \partial_y \tilde{u} \partial_x \partial_y \tilde{u} + \partial_x \partial_y v \partial_y^2 u, \partial_x \partial_y^2 \tilde{u})_{L_{k-\ell+1}^2} \\ &= -(k-\ell+1)(\langle y \rangle^{-1} v \partial_x \partial_y^2 \tilde{u}, \partial_x \partial_y^2 \tilde{u})_{L_{k-\ell+1}^2} + (\partial_y(\partial_x v \partial_y^2 u^s), \partial_x \partial_y^2 \tilde{u})_{L_{k-\ell+1}^2} \\ &\quad + (\partial_x v \partial_y^3 \tilde{u} + \partial_y u \partial_x^2 \partial_y \tilde{u} + \partial_x \partial_y \tilde{u} \partial_x \partial_y \tilde{u} + \partial_x \partial_y v \partial_y^2 \tilde{u}, \partial_x \partial_y^2 \tilde{u})_{L_{k-\ell+1}^2} \\ &\leq CA(t) \|\partial_y^2 \tilde{u}\|_{H_{k-\ell+1}^{1,0}}^2 + C \|\partial_x v\|_{L_y^\infty(L_x^2)} \|\langle y \rangle^{k-\ell+1} \partial_y^2 u^s\|_{L_y^2} (\|\partial_y^3 \tilde{u}\|_{H_{k-\ell+1}^{1,0}} + \|\partial_y^2 \tilde{u}\|_{H_{k-\ell+1}^{1,0}}) \\ &\quad + C \|\partial_x v\|_{L_y^\infty(L_x^2)} \|\langle y \rangle^{k-\ell+1} \partial_y^2 \tilde{u}\|_{L_y^2(L_x^\infty)} (\|\partial_y^2 \tilde{u}\|_{H_{k-\ell+1}^{1,0}} + \|\partial_y^3 \tilde{u}\|_{H_{k-\ell+1}^{1,0}}) \\ &\quad + C \|\partial_x \partial_y v\|_{L^2} \|\langle y \rangle^{k-\ell+1} \partial_y^2 \tilde{u}\|_{L^\infty} \|\partial_y^2 \tilde{u}\|_{H_{k-\ell+1}^{1,0}} + C \|\langle y \rangle^k \partial_y u\|_{L^\infty} \|\langle y \rangle^{-\ell+1} \partial_y \tilde{u}\|_{H^{3,0}} \|\partial_y^2 \tilde{u}\|_{H_{k-\ell+1}^{1,0}} \\ &\quad + C \|\langle y \rangle^{k-\ell} \partial_y \tilde{u}\|_{H^{1,0}} \|\langle y \rangle \partial_x \partial_y \tilde{u}\|_{L^\infty} \|\partial_y^2 \tilde{u}\|_{H_{k-\ell+1}^{1,0}} + C \|\partial_y^2 \tilde{u}\|_{L^\infty} \|\partial_x^2 \tilde{u}\|_{L_{k-\ell+1}^2} \|\partial_y^2 \tilde{u}\|_{H_{k-\ell+1}^{1,0}} \\ &\leq \frac{1}{32} \|\partial_y^3 \tilde{u}\|_{H_{k-\ell+1}^{1,0}}^2 + C(\langle t \rangle^{k+1} + A(t)^2)E(t). \end{aligned}$$

因此, 得到

$$\frac{d}{dt} \|\partial_y^2 \tilde{u}\|_{H_{k-\ell+1}^{1,0}}^2 + \|\partial_y^3 \tilde{u}\|_{H_{k-\ell+1}^{1,0}}^2 \leq C(\langle t \rangle^{k+1} + A(t)^2)E(t). \quad (4.5)$$

综合估计 (4.1)–(4.5), 最后得到

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} (\|\tilde{u}\|_{H_{k-\ell-1}^{1,0}}^2 + \|\partial_y \tilde{u}\|_{H_{k-\ell}^{1,0}}^2 + \|\partial_y^2 \tilde{u}\|_{H_{k-\ell+1}^{1,0}}^2) + (\|\partial_y \tilde{u}\|_{H_{k-\ell-1}^{1,0}}^2 + \|\partial_y^2 \tilde{u}\|_{H_{k-\ell}^{1,0}}^2 + \|\partial_y^3 \tilde{u}\|_{H_{k-\ell+1}^{1,0}}^2) \\ & \leq C(\langle t \rangle^{k+1} + A(t)^2)E(t). \end{aligned}$$

命题 4.1 证毕. $\square$

5 加权的 $W^{2,\infty}$ 估计

我们引进总能量

$$\mathcal{F}(t) = \sup_{s \in [0, t]} E(s) + \int_0^t \|\partial_y^3 \tilde{u}(s)\|_{H_{k-\ell+1}^{1,0}}^2 ds.$$

本节证明 $A(t)$ 可以由 $\mathcal{F}(t)$ 所控制. 本节始终假设 $k - \ell \geq 2$, $k \geq 2$.

命题 5.1 设 $\tilde{u}$ 是方程 (1.3) 在时间区间 $[0, T]$ 上的光滑解, 则成立

$$\begin{aligned} A(t) &\leq CA(0)\langle t \rangle^{\frac{k+1}{2}} + \langle t \rangle^{\frac{k}{2}+1}(\langle t \rangle^{\frac{k+1}{2}} + A(t))\mathcal{F}(t)^{\frac{1}{2}}, \\ \langle t \rangle^{\frac{k}{2}} \langle y \rangle^k |\partial_y \tilde{u}| &\leq CA(0)\langle t \rangle^k + C\langle t \rangle^{k+1}(\langle t \rangle^{\frac{k+1}{2}} + \tilde{A}(t))\mathcal{F}(t)^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

其中 C 为与 t 无关的常数.

证明 令 $\tilde{u}_1(t, x, y) = \tilde{u}(t, x + t, y)$ 和 $v_1(t, x, y) = v(t, x + t, y)$, 则 $(\tilde{u}_1, v_1)$ 满足

$$\begin{cases} \partial_t \tilde{u}_1 - \partial_y^2 \tilde{u}_1 = F, \\ \partial_x \tilde{u}_1 + \partial_y v_1 = 0, \\ \tilde{u}_1|_{y=0} = v_1|_{y=0} = 0, \quad \lim_{y \rightarrow +\infty} \tilde{u}_1 = 0, \\ \tilde{u}_1|_{t=0} = \tilde{u}_0, \end{cases} \quad (5.1)$$

其中 $F = -((u^s - 1 + \tilde{u})\partial_x \tilde{u}_1 + v_1 \partial_y u_1)$. 利用解的表达式和分部积分, 可得

$$\begin{aligned} \partial_y \tilde{u}_1 &= \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_0^\infty (e^{-\frac{(y-y')^2}{4t}} + e^{-\frac{(y+y')^2}{4t}}) \partial_{y'} \tilde{u}_0(x, y') dy' \\ &\quad + \int_0^t \int_0^\infty \frac{1}{2\sqrt{\pi(t-s)}} (e^{-\frac{(y-y')^2}{4(t-s)}} + e^{-\frac{(y+y')^2}{4(t-s)}}) \partial_{y'} F(s, x, y') dy' ds \\ &=: I_1 + I_2. \end{aligned}$$

类似引理 3.1 中 I_1 的估计, 容易得到

$$|I_1| \leq CA(0)\langle t \rangle^{\frac{k}{2}} \langle y \rangle^{-k}.$$

利用 Peetre 不等式, 可以推出

$$\begin{aligned} |I_2| &\leq \int_0^t \int_0^\infty \frac{1}{2\sqrt{\pi(t-s)}} e^{-\frac{(y-y')^2}{4(t-s)}} \langle y' \rangle^{-k} dy' \|\langle y' \rangle^k \partial_{y'} F(s, x, y')\|_{L_{x,y}^\infty} ds \\ &\leq C\langle y \rangle^{-k} \int_0^t \langle t-s \rangle^{\frac{k}{2}} \|\langle y' \rangle^k \partial_{y'} F(s, x, y')\|_{L_{x,y}^\infty} ds. \end{aligned}$$

利用解的表达式可知,

$$\begin{aligned} \partial_y^2 \tilde{u}_1 &= \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_0^\infty (e^{-\frac{(y-y')^2}{4t}} - e^{-\frac{(y+y')^2}{4t}}) \partial_{y'}^2 \tilde{u}_0(x, y') dy' \\ &\quad + \int_0^t \int_0^\infty \frac{1}{2\sqrt{\pi(t-s)}} \partial_y (e^{-\frac{(y-y')^2}{4(t-s)}} + e^{-\frac{(y+y')^2}{4(t-s)}}) \partial_{y'} F(s, x, y') dy' ds \end{aligned}$$

$$=: I_3 + I_4$$

和

$$\begin{aligned} \partial_y \partial_x \tilde{u}_1 &= \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_0^\infty (e^{-\frac{(y-y')^2}{4t}} + e^{-\frac{(y+y')^2}{4t}}) \partial_{y'} \partial_x \tilde{u}_0(x, y') dy' \\ &\quad + \int_0^t \int_0^\infty \frac{1}{2\sqrt{\pi(t-s)}} \partial_y (e^{-\frac{(y-y')^2}{4(t-s)}} - e^{-\frac{(y+y')^2}{4(t-s)}}) \partial_x F(s, x, y') dy' ds \\ &=: I_5 + I_6. \end{aligned}$$

类似引理 3.1 中 I_1 的估计, 容易得到

$$\begin{aligned} I_3 &\leq CA(0) \langle t \rangle^{\frac{k+1}{2}} \langle y \rangle^{-k-1}, \\ I_5 &\leq CA(0) \langle t \rangle^{\frac{k}{2}} \langle y \rangle^{-k}. \end{aligned}$$

利用 Peetre 不等式, 可以推出

$$\begin{aligned} |I_4| &\leq \int_0^t \int_0^\infty \frac{1}{2\sqrt{\pi(t-s)}} \frac{y-y'}{t-s} e^{-\frac{(y-y')^2}{4(t-s)}} \langle y' \rangle^{-k-1} dy' \|\langle y' \rangle^{k+1} \partial_{y'} F(s, x, y')\|_{L_{x,y}^\infty} ds \\ &\leq C \langle y \rangle^{-k-1} \int_0^t (t-s)^{-\frac{1}{2}} \langle t-s \rangle^{\frac{k+1}{2}} \|\langle y' \rangle^{k+1} \partial_{y'} F(s, x, y')\|_{L_{x,y}^\infty} ds, \\ |I_6| &\leq C \langle y \rangle^{-k} \int_0^t (t-s)^{-\frac{1}{2}} \langle t-s \rangle^{\frac{k}{2}} \|\langle y' \rangle^k \partial_x F(s, x, y')\|_{L_{x,y}^\infty} ds. \end{aligned}$$

接下来估计 $\|\langle y' \rangle^{k+1} \partial_{y'} F(s)\|_{L_{x,y}^\infty}$ 和 $\|\langle y' \rangle^k \partial_x F(s)\|_{L_{x,y}^\infty}$. 由 F 的定义可知,

$$\begin{aligned} \partial_y F &= (u^s - 1 + \tilde{u}) \partial_x \partial_y \tilde{u} + v \partial_y^2 u, \\ \partial_x F &= (u^s - 1 + \tilde{u}) \partial_x^2 \tilde{u} + v \partial_y \partial_x u + (\partial_x \tilde{u})^2 + \partial_x v \partial_y u. \end{aligned}$$

于是由引理 3.1, 得到

$$\begin{aligned} \|\langle y' \rangle^{k+1} \partial_y F(s)\|_{L_{x,y}^\infty} &\leq \|\langle y \rangle^{k-1} (u-1)\|_{L_{x,y}^\infty} \|\langle y \rangle^2 \partial_x \partial_y \tilde{u}\|_{L_{x,y}^\infty} + \|v\|_{L_{x,y}^\infty} \|\langle y \rangle^{k+1} \partial_y^2 u\|_{L_{x,y}^\infty} \\ &\leq C(\langle s \rangle^{\frac{k+1}{2}} + A(s)) (\|\langle y \rangle^2 \partial_x \partial_y u\|_{L_{x,y}^\infty} + \|v\|_{L_{x,y}^\infty}) \end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned} \|\langle y' \rangle^k \partial_x F(s)\|_{L_{x,y}^\infty} &\leq \|\langle y \rangle^{k-1} (u-1)\|_{L_{x,y}^\infty} \|\langle y \rangle^2 \partial_x^2 \tilde{u}\|_{L_{x,y}^\infty} + \|v\|_{L_{x,y}^\infty} \|\langle y \rangle^k \partial_y \partial_x \tilde{u}\|_{L_{x,y}^\infty} \\ &\quad + \|\langle y \rangle^{k-1} \partial_x \tilde{u}\|_{L_{x,y}^\infty} \|\langle y \rangle \partial_x \tilde{u}\|_{L_{x,y}^\infty} + \|\partial_x v\|_{L_{x,y}^\infty} \|\langle y \rangle^k \partial_y u\|_{L_{x,y}^\infty} \\ &\leq C(\langle s \rangle^{\frac{k}{2}} + A(s)) (\|\langle y \rangle \tilde{u}\|_{L_y^\infty(H_x^3)} + \|v\|_{L_y^\infty(W_x^{1,\infty})}). \end{aligned}$$

利用 $v = -\int_0^y \partial_x u dy'$ 、 $k-\ell \geq 2$ 和 Sobolev 嵌入, 有

$$\begin{aligned} \|v\|_{L_y^\infty(W_x^{1,\infty})} &\leq C \|\langle y \rangle^{\frac{1}{2}} + \partial_x u\|_{L_y^2(H_x^2)} \leq E(s)^{\frac{1}{2}}, \\ \|\langle y \rangle \tilde{u}\|_{L_y^\infty(H_x^3)} &\leq C(\|\langle y \rangle \tilde{u}\|_{H^{3,0}} + \|\langle y \rangle \partial_y \tilde{u}\|_{H^{3,0}}) \leq CE(s)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

和

$$\|\langle y \rangle^2 \partial_x \partial_y u\|_{L_{x,y}^\infty} \leq C(\|\langle y \rangle^2 \partial_y^2 \tilde{u}\|_{H^{2,0}} + \|\langle y \rangle^2 \partial_y \tilde{u}\|_{H^{2,0}})$$

$$\begin{aligned} &\leq C(\|\langle y \rangle^{4-(k-\ell)} \partial_y^3 \tilde{u}\|_{H^{1,0}}^{\frac{1}{2}} \|\langle y \rangle^{k-\ell} \partial_y \tilde{u}\|_{H^{3,0}}^{\frac{1}{2}} + \|\langle y \rangle^{k-\ell} \partial_y \tilde{u}\|_{H^{2,0}}) \\ &\leq C(E(s)^{\frac{1}{4}} \|\langle y \rangle^{k-\ell+1} \partial_y^3 \tilde{u}\|_{H^{1,0}}^{\frac{1}{2}} + E(s)^{\frac{1}{2}}). \end{aligned}$$

综上可得

$$\|\langle y' \rangle^{k+1} \partial_y F(s)\|_{L_{x,y}^\infty} \leq C(\langle s \rangle^{\frac{k+1}{2}} + A(s))(E(s)^{\frac{1}{4}} \|\langle y \rangle^{k-\ell+1} \partial_y^3 \tilde{u}\|_{H^{1,0}}^{\frac{1}{2}} + E(s)^{\frac{1}{2}}), \quad (5.2)$$

$$\|\langle y' \rangle^k \partial_x F(s)\|_{L_{x,y}^\infty} \leq C(\langle s \rangle^{\frac{k}{2}} + A(s))E(s)^{\frac{1}{2}}. \quad (5.3)$$

因此, 有

$$\begin{aligned} |I_4| &\leq C\langle y \rangle^{-k-1} \int_0^t (t-s)^{-\frac{1}{2}} \langle t-s \rangle^{\frac{k+1}{2}} (\langle s \rangle^{\frac{k+1}{2}} + A(s))(E(s)^{\frac{1}{4}} \|\langle y \rangle^{k-\ell+1} \partial_y^3 \tilde{u}\|_{H^{1,0}}^{\frac{1}{2}} + E(s)^{\frac{1}{2}}) ds \\ &\leq C\langle y \rangle^{-k-1} (\langle t \rangle^{\frac{k+1}{2}} + A(t)) \left(\mathcal{F}(t)^{\frac{1}{2}} \langle t \rangle^{\frac{k}{2}+1} + \mathcal{F}(t)^{\frac{1}{4}} \int_0^t (t-s)^{-\frac{1}{2}} \langle t-s \rangle^{\frac{k+1}{2}} \|\langle y \rangle^{k-\ell+1} \partial_y^3 \tilde{u}\|_{H^{1,0}}^{\frac{1}{2}} ds \right) \\ &\leq C\langle y \rangle^{-k-1} (\langle t \rangle^{\frac{k+1}{2}} + A(t)) (\langle t \rangle^{\frac{k+2}{2}} \mathcal{F}(t)^{\frac{1}{2}} + t^{\frac{k}{2}+\frac{3}{4}} \mathcal{F}(t)^{\frac{1}{2}}) \\ &\leq C\langle y \rangle^{-k-1} (\langle t \rangle^{\frac{k+1}{2}} + A(t)) \mathcal{F}(t)^{\frac{1}{2}} \langle t \rangle^{\frac{k}{2}+1}. \end{aligned}$$

同理可得

$$\begin{aligned} |I_6| &\leq C\langle y \rangle^{-k} (\langle t \rangle^{\frac{k}{2}} + A(t)) \mathcal{F}(t)^{\frac{1}{2}} \langle t \rangle^{\frac{k+1}{2}}, \\ |I_2| &\leq C\langle y \rangle^{-k} (\langle t \rangle^{\frac{k+1}{2}} + A(t)) \mathcal{F}(t)^{\frac{1}{2}} \langle t \rangle^{\frac{k+2}{2}}. \end{aligned}$$

综上可得

$$\begin{aligned} |\partial_y \tilde{u}| &\leq CA(0) \langle t \rangle^{\frac{k}{2}} \langle y \rangle^{-k} + C\langle y \rangle^{-k} (\langle t \rangle^{\frac{k+1}{2}} + A(t)) \mathcal{F}(t)^{\frac{1}{2}} \langle t \rangle^{\frac{k+2}{2}}, \\ |\partial_x \partial_y \tilde{u}| &\leq CA(0) \langle t \rangle^{\frac{k}{2}} \langle y \rangle^{-k} + C\langle y \rangle^{-k} (\langle t \rangle^{\frac{k}{2}} + A(t)) \mathcal{F}(t)^{\frac{1}{2}} \langle t \rangle^{\frac{k+1}{2}}, \\ |\partial_y^2 \tilde{u}| &\leq CA(0) \langle t \rangle^{\frac{k+1}{2}} \langle y \rangle^{-k-1} + C\langle y \rangle^{-k-1} (\langle t \rangle^{\frac{k+1}{2}} + A(t)) \mathcal{F}(t)^{\frac{1}{2}} \langle t \rangle^{\frac{k}{2}+1}. \end{aligned}$$

从而得到

$$\begin{aligned} A(t) &\leq CA(0) \langle t \rangle^{\frac{k+1}{2}} + \langle t \rangle^{\frac{k}{2}+1} (\langle t \rangle^{\frac{k+1}{2}} + \tilde{A}(t)) \mathcal{F}(t)^{\frac{1}{2}}, \\ \langle t \rangle^{\frac{k}{2}} \langle y \rangle^k |\partial_y \tilde{u}(t, y)| &\leq CA(0) \langle t \rangle^k + C\langle t \rangle^{k+1} (\langle t \rangle^{\frac{k+1}{2}} + A(t)) \mathcal{F}(t)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

命题证毕. □

从命题 5.1 的证明可以直接推出下面解的短时间衰减估计.

命题 5.2 设 $\tilde{u}$ 是方程 (1.3) 在时间区间 $[0, T]$ ($T \leq 1$) 上的光滑解. 假设初值 u_0 和 $\tilde{u}_0$ 满足

$$\sum_{m=1}^2 |\langle y \rangle^{k-1+m} \partial_y^m \tilde{u}_0(x, y)| + |\langle y \rangle^k \partial_x \partial_y \tilde{u}_0| \leq C, \quad \partial_y u_0(x, y) \geq c \langle y \rangle^{-k}, \quad (5.4)$$

则成立

$$\begin{aligned} A(t) &\leq C + Ct^{\frac{1}{4}} (1 + A(t)) \mathcal{F}(t)^{\frac{1}{2}}, \\ \langle y \rangle^k \partial_y u(t, x, y) &\geq c - Ct^{\frac{3}{4}} (1 + A(t)) \mathcal{F}(t)^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

其中 C 为与 t 无关的常数.

6 主要定理的证明

首先证明速度 $\tilde{u}$ 的高阶切向导数可以被 w 控制.

引理 6.1 我们有

$$\begin{aligned}\|\langle y \rangle^{k-\ell-1} \tilde{u}\|_{H^{3,0}} &\leq C(\langle t \rangle^{\frac{k}{2}} + A(t))\|w\|_{H_{-\ell}^{3,0}} + C\langle t \rangle^{2k} A(t)^4 \|\langle y \rangle^{k-\ell-1} \tilde{u}\|_{H^{1,0}}, \\ \|\langle y \rangle^{k-\ell} \partial_y \tilde{u}\|_{H^{3,0}} &\leq C\langle t \rangle^k (\langle t \rangle^{\frac{3(k+1)}{2}} + A(t)^3) \|w\|_{H_{-\ell}^{3,0}} + C\langle t \rangle^{3k} A(t)^4 (\langle t \rangle^{k+1} + A(t)^2) \|\langle y \rangle^{k-\ell-1} \tilde{u}\|_{H^{1,0}} \\ &\quad + C\langle t \rangle^{2k} A(t)^4 \|\langle y \rangle^{k-\ell} \partial_y \tilde{u}\|_{H^{1,0}}.\end{aligned}$$

证明 由 w 的定义知,

$$\tilde{u} = T_b T_a \tilde{u} + (T_{ba} - T_b T_a) \tilde{u} = T_b \left(\int_0^y w dy' \right) + (T_{ba} - T_b T_a) \tilde{u}.$$

由引理 2.1 得

$$\begin{aligned}\|\langle y \rangle^{k-\ell-1} \tilde{u}\|_{H^{3,0}} &\leq C\|\langle y \rangle^k b\|_{L^\infty} \left\| \frac{1}{\langle y \rangle} \int_0^y \frac{\langle y' \rangle^\ell}{\langle y \rangle^\ell} \langle y' \rangle^{-\ell} w dy' \right\|_{H^{3,0}} \\ &\quad + \|\langle y \rangle^k \tilde{b}\|_{L_y^\infty(W_x^{1,\infty})} \|\langle y \rangle^{-k} \tilde{a}\|_{L_y^\infty(W_x^{1,\infty})} \|\langle y \rangle^{k-\ell-1} \tilde{u}\|_{H^{2,0}} \\ &\leq C(\langle t \rangle^{\frac{k}{2}} + A(t)) \|\langle y \rangle^{-\ell} w\|_{H^{3,0}} + C\langle t \rangle^k A(t)^2 \|\langle y \rangle^{k-\ell-1} \tilde{u}\|_{H^{2,0}} \\ &\leq C(\langle t \rangle^{\frac{k}{2}} + A(t)) \|\langle y \rangle^{-\ell} w\|_{H^{3,0}} + C\langle t \rangle^k A(t)^2 \|\langle y \rangle^{k-\ell-1} \tilde{u}\|_{H^{3,0}}^{\frac{1}{2}} \|\langle y \rangle^{k-\ell-1} \tilde{u}\|_{H^{1,0}}^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

再应用 Young 不等式可以推出

$$\|\langle y \rangle^{k-\ell-1} \tilde{u}\|_{H^{3,0}} \leq C(\langle t \rangle^{\frac{k}{2}} + A(t)) \|\langle y \rangle^{-\ell} w\|_{H^{3,0}} + C\langle t \rangle^{2k} A(t)^4 \|\langle y \rangle^{k-\ell-1} \tilde{u}\|_{H^{1,0}}. \quad (6.1)$$

注意到

$$\partial_y \tilde{u} = T_b w - T_b T_{\partial_y a} \tilde{u} + (T_{ba} - T_b T_a) \partial_y \tilde{u},$$

则由引理 2.1 可得

$$\begin{aligned}\|\langle y \rangle^{k-\ell} \partial_y \tilde{u}\|_{H^{3,0}} &\leq C\|\langle y \rangle^k b\|_{L^\infty} \|\langle y \rangle^{-\ell} w\|_{H^{3,0}} + C\|\langle y \rangle^k b\|_{L^\infty} \|\langle y \rangle^{-k+1} \partial_y a\|_{L^\infty} \|\langle y \rangle^{k-\ell-1} \tilde{u}\|_{H^{3,0}} \\ &\quad + \|\langle y \rangle^k \tilde{b}\|_{L_y^\infty(W_x^{1,\infty})} \|\langle y \rangle^{-k} \tilde{a}\|_{L_y^\infty(W_x^{1,\infty})} \|\langle y \rangle^{k-\ell} \partial_y \tilde{u}\|_{H^{2,0}} \\ &\leq C(\langle t \rangle^{\frac{k}{2}} + A(t)) \|\langle y \rangle^{-\ell} w\|_{H^{3,0}} + C(\langle t \rangle^{\frac{k}{2}} + A(t)) \langle t \rangle^k (\langle t \rangle^{\frac{k+1}{2}} + A(t)) \|\langle y \rangle^{k-\ell-1} \tilde{u}\|_{H^{3,0}} \\ &\quad + C\langle t \rangle^k A(t)^2 \|\langle y \rangle^{k-\ell} \partial_y \tilde{u}\|_{H^{3,0}}^{\frac{1}{2}} \|\langle y \rangle^{k-\ell} \partial_y \tilde{u}\|_{H^{1,0}}^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

再应用 Young 不等式和 (6.1) 可以得到

$$\begin{aligned}\|\langle y \rangle^{k-\ell} \partial_y \tilde{u}\|_{H^{3,0}} &\leq C\langle t \rangle^k (\langle t \rangle^{\frac{3(k+1)}{2}} + A(t)^3) \|\langle y \rangle^{-\ell} w\|_{H^{3,0}} \\ &\quad + C\langle t \rangle^{3k} A(t)^4 (\langle t \rangle^{k+1} + A(t)^2) \|\langle y \rangle^{k-\ell-1} \tilde{u}\|_{H^{1,0}} + C\langle t \rangle^{2k} A(t)^4 \|\langle y \rangle^{k-\ell} \partial_y \tilde{u}\|_{H^{1,0}}.\end{aligned}$$

引理证毕. □

下面证明主要定理 1.1.

定理 1.1 的证明 系统 (1.3) 的逼近解可以通过添加黏性项 $\kappa \partial_x^2 \tilde{u}$ 来构造, 这里只给出解的一致估计. 因此假设方程 (1.3) 在时间区间 $[0, T^*)$ 上存在光滑解 $\tilde{u}$, 其中 $T^* > 0$ 为解的最大存在时间. 定义能量

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(t) &= \|w\|_{H_{-\ell}^{3,0}}^2 + \|\tilde{u}(t)\|_{H_{k-\ell-1}^{1,0}}^2 + \|\partial_y \tilde{u}(t)\|_{H_{k-\ell}^{1,0}}^2 + \|\partial_y^2 \tilde{u}(t)\|_{H_{k-\ell+1}^{1,0}}^2, \\ \mathcal{D}(t) &= \|\partial_y w\|_{H_{-\ell}^{3,0}}^2 + \|\partial_y \tilde{u}(t)\|_{H_{k-\ell-1}^{1,0}}^2 + \|\partial_y^2 \tilde{u}(t)\|_{H_{k-\ell}^{1,0}}^2 + \|\partial_y^3 \tilde{u}(t)\|_{H_{k-\ell+1}^{1,0}}^2.\end{aligned}$$

首先假设存在 $0 < T_1 \leq T^*$ 使得

$$\mathcal{F}(t) \leq C_2, \quad t \in [0, T_1], \quad (6.2)$$

其中常数 $C_2 > 0$ 待定. 选取 $T_1 < 1$ 充分小, 由命题 5.2 可以得到

$$\begin{aligned}c_1 \langle y \rangle^{-k} &\leq \partial_y u(t, x, y) \leq C_1 \langle y \rangle^{-k}, \quad \text{当 } (t, x, y) \in [0, T_1] \times \mathbb{R}_+^2 \text{ 时,} \\ A(t) &\leq C_1, \quad \text{当 } t \in [0, T_1] \text{ 时.}\end{aligned}$$

由命题 3.1 和 4.1 可推出

$$\frac{d}{dt} \mathcal{E}(t) + \mathcal{D}(t) \leq C \mathcal{E}(t) + C E(t)^{\frac{1}{2}} \|w\|_{H_{-\ell}^{3,0}}. \quad (6.3)$$

由引理 6.1 和假设 (6.2) 知, 当 $t \leq 1$ 时, 有

$$E(t) \leq C \mathcal{E}(t).$$

从而由 (6.3) 得到

$$\frac{d}{dt} \mathcal{E}(t) + \mathcal{D}(t) \leq C \mathcal{E}(t).$$

这推出存在仅依赖于 c 和 C 及初值 $\|\partial_y^s \tilde{u}_0\|_{H_{k-\ell-1+s}^{3,0}}$ 和 $\|\partial_y^{k-\ell-1+m} \tilde{u}_0\|_{H_{k-\ell-1+m}^{1,0}}$ ($s = 0, 1, m = 0, 1, 2$) 的常数 $T > 0$, 使得当 $t \in [0, \min(T_1, T)]$ 时, 成立

$$\mathcal{E}(t) + \int_0^t \mathcal{D}(s) ds \leq 2\mathcal{E}(0) \leq C.$$

结合引理 6.1, 取 $C_2 = 2C_3$, 可以得到

$$\mathcal{F}(t) \leq C_3 \leq \frac{C_2}{2},$$

从而推出 $T^* \geq T$. 定理 1.1 证毕. □

最后给出定理 1.2 的证明.

定理 1.2 的证明 首先假设存在 $0 < T_2 \leq T^*$ 使得

$$\mathcal{F}(t) \leq \varepsilon^{2\alpha}, \quad t \in [0, T_2], \quad (6.4)$$

其中 $0 < \alpha < 1$ 待定. 根据引理 3.1 和命题 5.1, 当 $T_1 \leq \varepsilon^{-\gamma}$ 时, 成立

$$c_1 \langle y \rangle^{-k} \langle t \rangle^{-\frac{k}{2}} \leq \partial_y u(t, x, y) \leq C_1 \langle t \rangle^{\frac{k}{2}} \langle y \rangle^{-k}, \quad \text{当 } (t, x, y) \in [0, T_1] \times \mathbb{R}_+^2 \text{ 时,}$$

$A(t) \leq \delta$, 当 $t \in [0, T_1]$ 时,

其中 $\delta \in (0, 1)$ 是一个很小的常数, $\gamma = \gamma(\alpha, k, \delta) \in (0, 1)$. 于是, 由命题 3.1 和 4.1 推出

$$\frac{d}{dt}\mathcal{E}(t) + \mathcal{D}(t) \leq \mathcal{P}(\langle t \rangle)E(t) + \mathcal{P}(\langle t \rangle)E(t)^{\frac{1}{2}}\|w\|_{H_{-\ell}^{3,0}},$$

其中 $P(t)$ 为某一关于 t 增长的多项式. 由引理 6.1 和假设 (6.4) 知, 当 $t \leq \varepsilon^{-\gamma}$ 时, 有

$$E(t) \leq \mathcal{P}(\langle t \rangle)\mathcal{E}(t).$$

因此得到

$$\frac{d}{dt}\mathcal{E}(t) + \mathcal{D}(t) \leq \mathcal{P}(\langle t \rangle)\mathcal{E}(t).$$

这意味着存在仅依赖于 c 和 C 及初值 $\|\partial_y^s \tilde{u}_0\|_{H_{k-\ell-1+s}^{3,0}}$ 和 $\|\partial_y^{k-\ell-1+m} \tilde{u}\|_{H_{k-\ell-1+m}^{1,0}}$ ($s = 0, 1, m = 0, 1, 2$) 的常数 $T \sim (\ln \varepsilon^{-1})^\beta$, 使得当 $t \in [0, T]$ 时, 成立

$$\mathcal{E}(t) + \int_0^t \mathcal{D}(s)ds \leq e^{C\langle t \rangle^\beta} \mathcal{E}(0) \leq e^{C\langle t \rangle^\beta} \varepsilon^2 \leq C\varepsilon^{2\tilde{\alpha}},$$

其中 $\beta = \beta(k) \in (0, 1)$, $0 < \alpha < \tilde{\alpha} < 1$. 再结合引理 6.1, 当 $t \leq T$ 时, 可以得到

$$\mathcal{F}(t) \leq \mathcal{P}(\langle t \rangle)\varepsilon^{2\tilde{\alpha}} \leq \frac{1}{2}\varepsilon^{2\alpha},$$

从而推出 $T^* \geq T \sim (\ln \varepsilon^{-1})^\beta$. 定理 1.2 证毕. $\square$

参考文献

- Oleinik O A, Samokhin V N. Mathematical Models in Boundary Layer Theory. Applied Mathematics and Mathematical Computation 15. Boca Raton: Chapman & Hall/CRC, 1999
- Xin Z, Zhang L. On the global existence of solutions to the Prandtl's system. Adv Math, 2004, 181: 88–133
- Sammartino M, Caffisch R E. Zero viscosity limit for analytic solutions of the Navier-Stokes equation on a half-space, I: Existence for Euler and Prandtl equations. Comm Math Phys, 1998, 192: 433–461
- Gérard-Varet D, Dormy E. On the ill-posedness of the Prandtl equation. J Amer Math Soc, 2010, 23: 591–609
- Gérard-Varet D, Masmoudi N. Well-posedness for the Prandtl system without analyticity or monotonicity. Ann Sci Éc Norm Supér (4), 2015, 48: 1273–1325
- Chen D, Wang Y, Zhang Z. Well-posedness of the linearized Prandtl equation around a non-monotonic shear flow. Ann Inst H Poincaré Anal Non Linéaire, 2018, 35: 1119–1142
- Li W X, Yang T. Well-posedness in Gevrey function spaces for the Prandtl equations with non-degenerate critical points. J Eur Math Soc (JEMS), 2020, 22: 717–775
- Dietert H, Gérard-Varet D. Well-posedness of the Prandtl equations without any structural assumption. Ann PDE, 2019, 5: 8
- Alexandre R, Wang Y, Xu C J, et al. Well-posedness of the Prandtl equation in Sobolev spaces. J Amer Math Soc, 2015, 28: 745–784
- Masmoudi N, Wong T K. Local-in-time existence and uniqueness of solutions to the Prandtl equations by energy methods. Comm Pure Appl Math, 2015, 68: 1683–1741
- Chen D, Wang Y, Zhang Z. Well-posedness of the Prandtl equation with monotonicity in Sobolev spaces. J Differential Equations, 2018, 264: 5870–5893
- Chen D, Ren S, Wang Y, et al. Global well-posedness of the 2-D magnetic Prandtl model in the Prandtl-Hartmann regime. Asymptot Anal, 2020, 120: 373–393
- Zhang P, Zhang Z. Long time well-posedness of Prandtl system with small and analytic initial data. J Funct Anal, 2016, 270: 2591–2615

- 14 Ignatova M, Vicol V. Almost global existence for the Prandtl boundary layer equations. *Arch Ration Mech Anal*, 2016, 220: 809–848
- 15 Xu C J, Zhang X. Long time well-posedness of Prandtl equations in Sobolev space. *J Differential Equations*, 2017, 263: 8749–8803
- 16 Wang Y, Zhang Z. Blow-up criterion for the 2-D Prandtl equation. *arXiv:2002.06327*, 2020
- 17 Bahouri H, Chemin J Y, Danchin R. *Fourier Analysis and Nonlinear Partial Differential Equations*. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, vol. 343. Berlin-Heidelberg: Springer-Verlag, 2011

Paralinearization method about the well-posedness of the Prandtl equation

Yuxi Wang & Zhifei Zhang

Abstract In this paper, by using the paralinearization method, we study the local well-posedness and its lifespan of the Prandtl equation for monotonic data in Sobolev space. Compared with the Nash-Moser iteration method, the main advantages include that the compatibility conditions are removed and the regularity of the initial data is weaker, and the proof is much more concise.

Keywords paralinearization, Prandtl equation, lifespan of solution

MSC(2020) 35D35, 35Q35

doi: 10.1360/SSM-2020-0231