

早期裂纹故障预示中的高精度小波有限元算法*

陈雪峰** 何正嘉 李 兵 向家伟

(西安交通大学机械工程学院机械制造系统工程国家重点实验室, 西安 710049)

摘要 提出了任意尺度 Daubechies 小波一维、二维单元构造方法以及小波有限元自适应提升算法, 采用小波尺度函数作为插值函数, 利用小波多分辨分析了具有变尺度逐层逼近函数的特性, 获得了嵌套递进的多尺度有限元逼近空间.

关键词 裂纹 故障预示 小波有限元 奇异性

典型的结构损伤表现为早期微弱裂纹的萌生与扩展, 裂纹故障是引起大型复杂结构破坏的主要原因之一^[1]. 由于早期初始微小裂纹不易被发现, 但裂纹扩展的恶劣后果往往导致重大灾难事故的发生, 因此, 监测并预示早期裂纹发生的位置与深度, 预防重大事故发生, 是故障诊断领域的一个重要研究方向. 早期故障预示是在状态监测和故障诊断基础上发展起来的一门新的研究课题, 它是对设备运行的状态完全掌握的一种技术, 通过对设备早期故障预示、分析和特征提取, 实时预示故障发展的历程, 指导设备检修以及进一步的故障诊断. 何永勇、褚福磊等人利用有限元模型结合遗传算法开展旋转机械转子裂纹辨识的研究, 该方法具有好的精度与鲁棒性^[2]; Sekhar 多年致力于转子裂纹辨识, 最近提出了基于有限元模型的裂纹辨识方法^[3]; 由于只通过单个固有频率的改变来诊断裂纹的参数较为困难, 因为裂纹在单个固有频率上的改变量往往很小, Lele 与 Maiti 利用解析法求解系统前三阶固有频率, 绘制了裂纹等效刚度与裂纹位置的频率响应曲线, 3 条曲线的交点准确地预知出裂纹的位置与深度^[4].

基于有限元方法建立裂纹转子的精确辨识模型, 分析裂纹转子的动态响应及模态参数, 是裂纹故障诊断的重要理论基础和必备先验知识. 但是, 裂纹奇异

2004-08-25 收稿, 2005-08-29 收修改稿

* 国家重点基础研究发展计划(2005CB724100)、国家自然科学基金重点项目(批准号: 50335030, 50505033)及高校博士点基金(20040698026) 资助项目

** E-mail: chenxf@mail.xjtu.edu.cn

性的出现给传统有限元方法求解造成困难,这是因为裂纹尖端区域位移与应力场都含有 $1/\sqrt{r}$ 奇异性(其中 r 代表裂纹尖端场柱坐标矢径),因此在准均匀的网格上,解不能用分片多项式函数在局部准确逼近^[5].为了得到精确的解,需要在裂纹尖端区域采用十分精细的网格或更高阶的单元,随着裂纹发生扩展,相应的网格需要重新剖分,这样使得计算精度和求解效率大大降低^[6].Belytschko提出了无网格Galerkin法求解裂纹扩展问题^[7],Fan提出了应用非均匀有理B样条曲线作为基函数,应用Petrov-Galerkin方法,构造了裂纹刚度矩阵,求解裂纹梁固有频率^[8],均取得很好的计算效果.

小波分析是近十几年来迅速发展起来的全新数值分析方法,最大的长处是具有多尺度、多分辨特性,小波函数的伸缩和平移可以表示平方可积实数空间 $L^2(R)$ 中的所有函数;而且小波具有优良的紧支性及消失矩,在空间是局部化的,使得小波函数可以聚焦到研究对象的任意细节,被数学家和工程师们誉为“数学显微镜”.利用小波函数可以构造出嵌套递进的多尺度广义有限元逼近空间,使得求解问题可以先用较粗的网格分析,特定奇异区域通过自适应多分辨剖分获得更好的逼近;而且可以根据实际需要任意改变分析尺度,使其在变化梯度小的求解域用大的分析尺度,而变化梯度大的求解域则采用小的分析尺度.这是一种优于传统单元网格加密和阶次升高的自适应有限元算法,这种变尺度算法数值稳定性好、适宜求解奇异性问题^[9].

近年来,国外高度重视小波工程数值分析理论与技术的研究与应用.欧盟开展“数值仿真中的小波多尺度方法”的研究,内容主要包括基于小波的多分辨方法求解重要科学技术领域的微分方程与积分方程^[10];美国麻省理工学院学者Amaratunga一直致力于小波有限元的研究,最近提出了基于第2代小波的多分辨有限单元^[11].国内香港理工大学的Ho研究了小波Galerkin法^[12];暨南大学应用力学研究所张森文教授研究了小波随机有限元^[13],求解了非线性平稳随机振动方程;西安交通大学何正嘉等人构造了一类小波单元,解决了一些工程实际问题^[14~16].这里主要给出任意尺度一维、二维Daubechies小波单元构造方法,随着尺度的提高,小波单元的逼近特性越好,适宜剖分求解裂纹奇异问题.

1 梁单元构造

对于 Euler 弯曲问题,其微分方程可表示为

$$EI \frac{d^4 w}{d\xi^4} = f(\xi), \quad (1)$$

其中, EI 为抗弯刚度, w 为弯曲挠度, ξ 为单元局部坐标.

设挠度 w 由 Daubechies 尺度函数构成,即

$$w = \sum_k c_{j,k} \phi_{j,k} = 2^{j/2} \sum_k c_{j,k} \phi(2^j \xi - k), \quad (2)$$

式中, $c_{j,k}$ 表示插值系数, $\phi_{j,k}$ 表示尺度函数, j 表示分析尺度, k 表示插值函数个数. 那么, $[0, 1]$ 区间单元刚度矩阵 $\tilde{k}_e$ 可由下式计算, 其元素为

$$\tilde{k}_{ekl} = EI \int_0^1 \phi''(2^j \xi - k) \phi''(2^j \xi - l) d\xi. \quad (3)$$

采用文献[14,15]提出的算法可以求出单元刚度矩阵 $\tilde{k}_e$, 显然这个刚度矩阵是小波空间的刚度矩阵, 与之对应的单元自由度为小波系数 $c_{j,k}$. 为了实现复杂结构分析中相邻单元间的连接, 并能方便地引入边界条件, 必须将刚度矩阵由小波空间转换到物理空间, 对应的单元自由度由小波系数转化为节点挠度和转角.

这里以 3 阶消失矩 Daubechies 小波在 V_0 空间(即尺度 $j = 0$)的 $D3_0$ 小波为例, 讨论如何将刚度矩阵由小波空间转换到物理空间. 采用 $D3_0$ 小波时, 标准 $[0, 1]$ 区间的挠度 w 用尺度函数表示为

$$w = \sum_{k=-4}^0 c_{0,k} \phi(2^0 \xi - k). \quad (4)$$

可以看出, 小波空间中单元自由度为 5, 因此, 物理空间也须有 5 个自由度. 为了保证相邻单元共同节点转角相同, 物理空间单元自由度中必须包含两端点转角自由度. 为此, 如图 1 所示布置单元节点. 其中, 单元含有一个内部节点, 其节点自由度为挠度, 两端节点自由度包含转角与挠度:

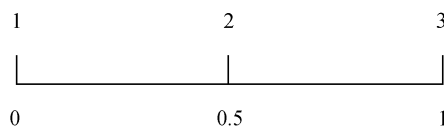


图 1 单元节点布置

$$a = [w_1 \quad \theta_1 \quad w_2 \quad w_3 \quad \theta_3]^T, \quad (5)$$

式中, T 表示矩阵转置. 显然, 物理空间中单元自由度 a 与小波空间单元自由度 C 间关系为

$$a = RC, \quad (6)$$

其中

$$R = \begin{bmatrix} \phi(4) & \phi(3) & \phi(2) & \phi(1) & \phi(0) \\ \phi'(4) & \phi'(3) & \phi'(2) & \phi'(1) & \phi'(0) \\ \phi\left(4 + \frac{1}{2}\right) & \phi\left(3 + \frac{1}{2}\right) & \phi\left(2 + \frac{1}{2}\right) & \phi\left(1 + \frac{1}{2}\right) & \phi\left(\frac{1}{2}\right) \\ \phi(5) & \phi(4) & \phi(3) & \phi(2) & \phi(1) \\ \phi'(5) & \phi'(4) & \phi'(3) & \phi'(2) & \phi'(1) \end{bmatrix}, \quad (7)$$

式中, 尺度函数及其导函数在各点的值可用利用 Daubechies 小波性质求出. 记矩阵 R 的逆阵为 T , 并称 T 为转换矩阵, 则小波空间中的单元刚度矩阵 $\tilde{k}_e$ 可借助下式转换到物理空间^[14]:

$$k_e = T^T \tilde{k}_e T. \quad (8)$$

利用类似的方法可以构造出其它尺度小波单元, 由此获得的小波有限元与传统有限元具有相同的计算格式.

2 小波薄板弯曲单元构造

薄板弯曲的总势能泛函为

$$\pi_p = \frac{1}{2} \iint_{\Omega} \kappa^T D \kappa dx dy - \iint_{\Omega} w^T q dx dy, \quad (9)$$

式中, κ 为广义应变, D 为弹性矩阵, w 为薄板挠度, q 为载荷列阵. 基于经典薄板理论的板单元, 即基于(9)式所表达的位能泛函、以 w 为场函数的板单元. 基于 Kirchhoff 假设将平板弯曲问题简化为二维问题, 且全部应力和应变可用板中面的挠度 w 表示. 下边给出小波矩形单元的构造方法.

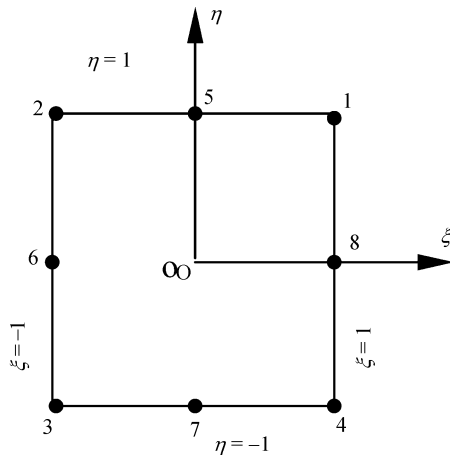


图 2 八节点矩形单元

如图 2 所示, 局部坐标系取值范围是 $[-1, 1]$, 当采用 N 阶 Daubechies 小波在 V_j 空间的尺度函数插值, 可得

$$w = 2^j \sum_{k,l=2-2N}^{2^j-2} c_{j,k} \phi(2^j \xi - k) \sum_{l=2-2N}^{2^j-1} c_{j,l} \phi(2^j \eta - l) = \Phi_k \otimes \Phi_l C, \quad (10)$$

式中, $\otimes$ 是 Kronecker 符号. 把(10)式代入(9)式中, 可以获得小波空间的单元刚度矩阵. 采用 3 阶 Daubechies 小波 V_0 空间的尺度函数插值, 列向量 C 中含有 16 个

尺度函数空间展开系数. 首先取图 2 中 4 个角节点各有 3 个自由度:

$$a_i = \begin{Bmatrix} w_i \\ \theta_{xi} \\ \theta_{yi} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} w_i \\ \frac{\partial w_i}{\partial y} \\ \frac{\partial w_i}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad (i=1,2,3,4). \quad (11)$$

4 个中节点各有一个挠度自由度, 则单元自由度为

$$a = [a_1^T \ a_2^T \ a_3^T \ a_4^T \ w_5 \ w_6 \ w_7 \ w_8]^T. \quad (12)$$

由(11)式可以获得单元自由度 a 与尺度函数空间展开系数 C 的关系式

$$a = RC, \quad (13)$$

其中,

$$R = [R_1 \ \cdots \ R_8]^T, \quad (14)$$

$$R_i = \begin{Bmatrix} \phi(2^j \xi_i - k) \otimes \phi(2^j \eta_i - k) \\ \phi(2^j \xi_i - k) \otimes \phi^{(1)}(2^j \eta_i - k) \\ \phi^{(1)}(2^j \xi_i - k) \otimes \phi(2^j \eta_i - k) \end{Bmatrix} \quad (i=1,2,3,4), \quad (15)$$

$$R_i = \phi(2^j \xi_i - k) \otimes \phi(2^j \eta_i - k) \quad (i=5,6,7,8), \quad (16)$$

式中, i 表示单元节点号, (ξ_i, η_i) 为其对应局部坐标. 这样就可以求得类似(8)式中的转换矩阵 T , 从而获得物理空间的单元刚度矩阵.

3 小波有限元自适应提升计算

小波函数由于具有多分辨的性质, 随着尺度的增加, 对原函数逼近的误差也就越小, 考虑这种由粗到精的逼近特性, 可以推导出小波有限元计算中的自适应提升算法, 在求解变化平缓区域采用较小的分析尺度, 而在求解存在大的变化梯度区域采用较大的分析尺度. 这种性质为开展基于小波分析的自适应数值算法提供了基础.

当选定小波单元插值函数的尺度 j 时, 即在低阶空间 V_j 中分析求解, 利用小波两尺度^[17]可得

$$\phi(2^j x - k) = \sum_s p_s \phi(2^{j+1} x - 2k - s), \quad (17)$$

$$\psi(2^j x - k) = \sum_s q_s \phi(2^{j+1} x - 2k - s), \quad (18)$$

式中, p_s 表示低通小波滤波器系数, q_s 表示高通小波滤波器系数^[17]. 表示成矩阵形式

$$\Phi_j^T = \Phi_{j+1}^T Z_{j,0}, \quad (19)$$

$$\Psi_j^T = \Phi_{j+1}^T Z_{j,1}, \quad (20)$$

式中, Φ_j^T 是由 $\{\phi_{j,k}(x)\}$ 组成的向量, Φ_{j+1}^T 是由 $\{\phi_{j+1,2k+s}(x)\}$ 组成的向量; 矩阵 $Z_{j,0}$ 与 $Z_{j,1}$ 分别由序列 $\{p_s\}$ 与 $\{q_s\}$ 构成. 利用(17)和(18)式可得

$$\Phi_j^T c_j + \Psi_j^T d_j = \Phi_{j+1}^T (Z_{j,0} c_j + Z_{j,1} d_j). \quad (21)$$

从而可以获得由低阶空间(设为 V_0)提升到高阶空间(设为 V_J)的提升过程如图 3 所示.

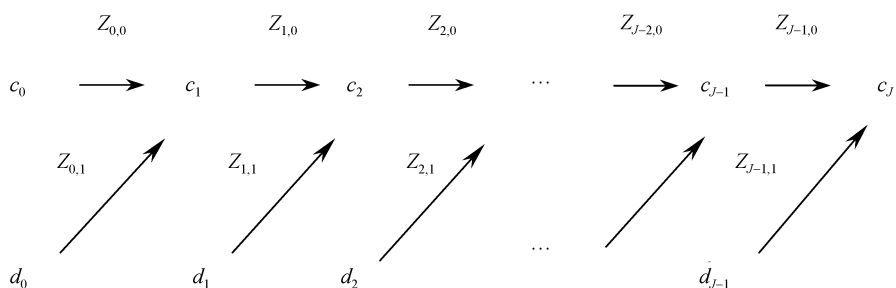


图 3 小波自适应提升算法

令

$$Z_j := (Z_{j,0} \ Z_{j,1}), \quad (22)$$

$$d^J := (c_0^T, d_0^T, \dots, d_{j-1}^T)^T, \quad j = 0, 1, \dots, J, \quad (23)$$

则提升变换 $L_J: d^J \rightarrow c_J$ 可表示为

$$L_J = L_{J,J-1} \cdots L_{J,j} \cdots L_{J,0}, \quad (24)$$

式中,

$$L_{J,j} = \begin{pmatrix} Z_j & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}. \quad (25)$$

Daubechies小波的紧支性保证了自适应提升算法的变换矩阵 Z_j 的带状稀疏; 正交特性保证了自适应提升算法的变换 L_j 正交, 并且具有良好的条件数^[9]; 且利用小波分解与重构快速塔形算法^[17], 可以很好地实现上述提升计算过程¹⁾.

小波变尺度多分辨的特性, 提供了除传统有限元中 h 网格法与 p 多项式法之外的另一种提高精度的细化算法, 即在不改变网格的剖分下提高分辨率. 文献

1) 陈雪峰. 小波有限元理论与裂纹故障诊断研究. 西安: 西安交通大学博士学位论文, 2004

[15]利用经典有限元考题验证了基于多分辨原理的自适应小波有限元数值稳定性好、收敛性可靠;文献[16]利用小波有限元开展了裂纹故障诊断与预示的仿真研究,取得了理想的诊断效果. 这里在验证小波有限元适宜求解裂纹梁固有频率的基础上,开展了基于小波有限元模型的悬臂梁早期裂纹故障诊断与预示的实验研究与工程应用.

4 早期裂纹故障诊断与预示

4.1 裂纹梁固有频率计算

文献[18]给出了两端自由裂纹梁的固有频率实验测试结果,如表 1 所示. 其中 β 表示裂纹相对位置,即裂纹位置与裂纹梁总长度的比值; r 表示裂纹相对深度,即裂纹深度与裂纹梁总高度的比值. 文献[19]利用这些实验值开展了裂纹辨识研究. 其试件参数为:梁长 720 mm,矩形截面宽 32 mm,高 16 mm,弹性模量 $E = 206 \text{ GPa}$, Possion 比 $\nu = 0.29$, 密度 $\rho = 7650 \text{ kg/m}^3$.

表 1 两端自由裂纹梁固有频率测试

裂纹工况	相对位置 β	相对深度 r	f_1/Hz	f_2/Hz	f_3/Hz
1	0.125	0.125	316.0	859.4	1649.0
2	0.125	0.250	316.1	857.8	1632.5
3	0.125	0.375	316.6	851.4	1593.5
4	0.125	0.500	313.0	826.6	1515.0
5	0.250	0.125	315.9	855.2	1647.5
6	0.250	0.250	314.1	840.6	1626.5
7	0.250	0.375	308.8	805.2	1580.5
8	0.250	0.500	305.4	870.4	1534.0

表 2 是采用 10 个小波单元与 40 个传统的梁单元计算结果比较,从比较结果可以看出,小波有限元求解固有频率具有较高的计算精度.

表 2 小波有限元与传统有限元计算对比

裂纹工况	小波有限元 (误差%)			传统有限元 (误差%)		
	f_1/Hz	f_2/Hz	f_3/Hz	f_1/Hz	f_2/Hz	f_3/Hz
1	315.9(0.03)	859.0(0.05)	1648.9(0.01)	315.8(0.06)	860.6(0.14)	1657.3(0.50)
2	316.0(0.03)	857.9(0.01)	1635.7(0.20)	316.0(0.03)	859.4(0.19)	1644.5(0.74)
3	316.7(0.03)	852.6(0.14)	1605.8(0.77)	316.8(0.06)	854.2(0.33)	1614.5(1.32)
4	313.0(0.00)	831.2(0.56)	1535.3(1.34)	313.1(0.03)	834.3(0.93)	1544.0(1.91)
5	316.0(0.03)	855.7(0.06)	1648.0(0.03)	316.0(0.03)	857.4(0.26)	1656.5(0.55)
6	314.3(0.06)	841.4(0.10)	1627.1(0.04)	314.5(0.13)	843.4(0.32)	1635.1(0.53)
7	309.7(0.29)	810.7(0.68)	1587.1(0.42)	310.2(0.45)	814.5(1.15)	1595.6(0.96)
8	306.8(0.46)	867.5(0.33)	1559.7(1.68)	307.7(0.75)	782.0(10.16)	1570.0(2.35)

4.2 早期裂纹预示实验研究

为了研究基于小波有限元的早期裂纹故障诊断预示,我们搭建了裂纹实验

台(如图 4 所示), 其中底座上加工有两个平行的 T 型槽, 用于固定支架座, 支架座可以左右各安装一个, 其上可以安装固支架或简支架, 从而可以完成梁的固支与简支等组合边界条件实验, 固支边界采用 4 个 M5 的螺钉紧固垫片, 从而夹紧试件.

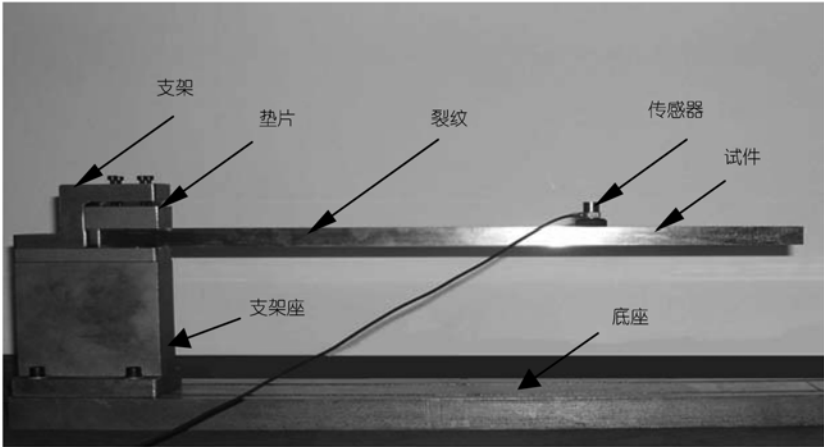


图 4 裂纹辨识实验台

试件有效长度为 515 mm, 高 20 mm, 宽 12 mm, 弹性模量 $E=206\text{ GPa}$, Possion 比 $\nu=0.3$, 密度 $\rho=7917\text{ kg/m}^3$. 试件裂纹的制作: 在数控线切割机用直径 0.02 mm 的超细钨丝预先加工一定深度的槽, 切槽宽度取 0.1 mm. 考虑钨丝直径和电火花放电间隙, 这样加工后的槽宽介于 0.1~0.12 mm 之间. 然后用胶单边固定 0.1 mm 的金属片, 用以模拟裂纹宽度约为 0.02 mm 的真实裂纹, 这样可以很好地控制裂纹的位置和深度¹⁾. 对于图示悬臂梁试件, 分别加工了 2 个完好梁, 28 个裂纹梁, 用于模拟 4 种裂纹工况, 即分别在距梁的一端 100 和 200 mm 处加工了两条深 4 和 8 mm 的裂纹. 表 3 给出了 4 种裂纹工况下的前三阶测试固有频率.

利用这些固有频率, 代入裂纹梁的小波有限元模型中, 并定义裂纹等效刚度 k :

$$k=\frac{L}{EIc}, \tag{26}$$

表 3 悬臂裂纹梁的测试固有频率

固有频率			f_1/Hz	f_2/Hz	f_3/Hz
无裂纹			59.09	369.84	1025.14
裂 纹 工 况	I	$\beta=0.0777, r=0.2$	57.85	363.24	1020.23
	II	$\beta=0.0777, r=0.4$	54.32	354.14	1011.24
	III	$\beta=0.272, r=0.2$	58.15	364.12	1013.23
	IV	$\beta=0.272, r=0.4$	57.04	363.23	992.26

1) 曾复. 裂纹转子非线性振动机理及实验研究. 杭州: 浙江大学博士学位论文, 2001

式中, L 为裂纹梁长度, c 为裂纹柔度系数^[16]. 建立悬臂梁的小波有限元模型, 代入系统测试前三阶固有频率, 利用三线相交诊断原理^[4,16], 计算裂纹等效刚度 k 与裂纹位置 β 曲线. 图 5 给出了裂纹工况 I 的图例. 利用文献[4]的知识, 我们取 3 条曲线形成的小三角形的形心来诊断裂纹参数, 表 4 给出了相应诊断结果.

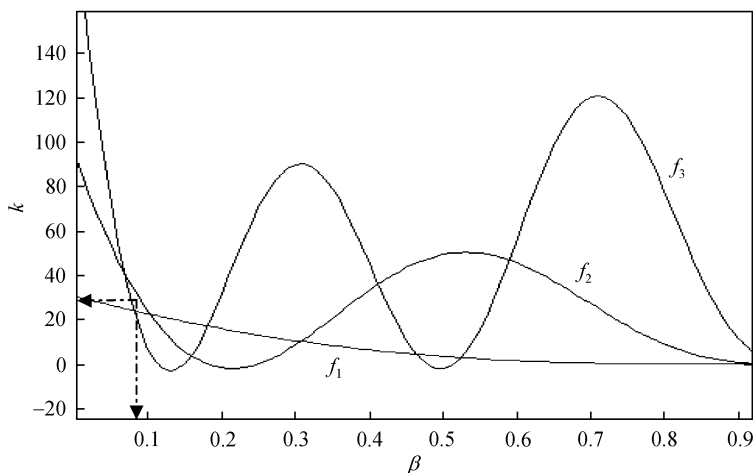


图 5 裂纹工况 I 的三线诊断

表 4 裂纹深度位置诊断结果

裂纹工况	裂纹位置 β	误差/%	裂纹深度 r	误差/%
I	0.091	1.33	0.310	10.0
II	0.084	0.63	0.492	9.2
III	0.310	3.80	0.302	10.2
IV	0.293	2.10	0.460	6.0

表 4 中裂纹位置与深度误差均表示相对于悬臂梁总长度或总高度的计算误差, 可以看出, 裂纹位置预测相对误差不超过 4%, 裂纹深度的相对误差不超过 11%, 这表明基于小波有限元的裂纹故障诊断预示算法可靠易行.

4.3 烫金模切机裂纹诊断预示

包装印刷行业使用的烫金模切机主要是由送纸、模切、烫金、排屑、收纸等工序组成, 其机械精度通常要求很高, 在香烟盒的烫金中, 对送纸机构的横向窜动精度通常要求在 0.01 mm 左右, 因为过大的横向窜动将会导致烫金重影模糊. 因此, 影响烫金模切精度的关键在于要保证送纸机构的运动平稳, 而该运动主要是由凸轮分度机构驱动实现的. 某型号烫金模切机使用的凸轮分度机构已经使用多年, 出现分度定位不准确, 直接影响了模切的精度以及烫金的质量, 需要检修并诊断其原因, 我们对其开展了动态测试分析, 如图 6 所示.

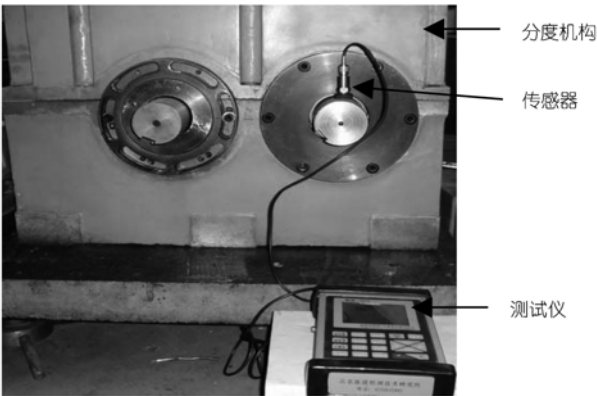


图 6 凸轮分度机构动态测试

考虑主要是凸轮分度机构输出轴影响烫金模切精度，敲击凸轮分度机构输出轴测试其振动信号，求得输出轴前三阶固有频率分别为 740.2 Hz、1470 Hz 以及 2025 Hz. 凸轮分度机构输出轴是一典型的阶梯梁结构，取两端轴承支撑处为简支边界条件，建立其小波梁单元数值模型，利用实际测试分析所得的前三阶固有频率，代入输出轴小波有限元模型中，获得其裂纹等效刚度 k 与裂纹位置 β 相对图如图 7 所示.

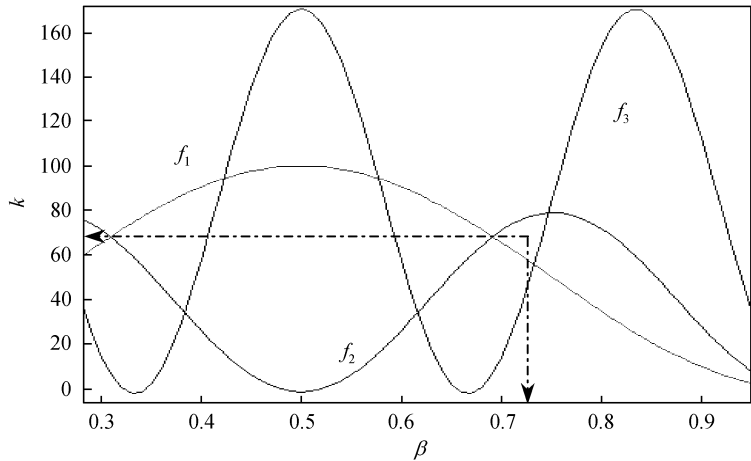


图 7 凸轮分度机构三线诊断

利用图 7 诊断出在距输出轴相对位置 0.724 处存在相对深度为 0.2 的裂纹. 打开分度机构上箱体查看检修，裂纹的位置与诊断相吻合；裂纹深度利用塞片测试其为 5 mm，输出轴在此处的轴直径为 40 mm，裂纹相对深度为 0.125，其裂纹深度预测误差为 7.5%.

5 结论

小波具有紧支、多分辨等优良特性, 由此构造的小波有限元可以很好地实现自适应提升计算, 提升过程中运算速度快、数值稳定性好. 本文给出了任意尺度的小波单元构造方法, 利用该单元多分辨特性可以更好地求解裂纹奇异性问题, 从而建立裂纹结构的精确数值模型. 从悬臂裂纹梁固有频率测试结果表 3 中可以看出, 单个固有频率, 如第一阶固有频率 f_1 在无裂纹与有裂纹的情况下相差很小, 且变化没有明确的规律可寻, 因而通常只利用单个固有频率来诊断裂纹较为困难, 而利用三个固有频率的变化, 并结合裂纹梁小波有限元数值模型, 来综合诊断预示裂纹参数可以取得很好效果.

参 考 文 献

- 1 张敬芬, 赵德有. 工程结构裂纹损伤振动诊断的发展现状和展望. 振动与冲击, 2002, 21(4): 22~25
- 2 何永勇, 褚福磊, 郭 丹, 等. 基于遗传算法的旋转机械转子裂纹识别的研究. 机械工程学报, 2001, 37(10): 69~74
- 3 Sekhar A S. Crack identification in a rotor system: a model-based approach. Journal of Sound and Vibration, 2004, 270: 887~902[DOI]
- 4 Lele S P, Maiti S K. Modelling of transverse vibration of short beams for crack detection and measurement of crack extension. Journal of Sound and Vibration, 2002, 257(3): 559~583[DOI]
- 5 Kardestuncer H. 有限元法手册, 诸德超等译. 北京: 科学出版社, 1996
- 6 姜路亮, 曾 攀, 聂 蕾. 裂纹扩展的无网格数值模拟方法. 航空材料学报, 2001, 21(3): 51~55
- 7 Belytschko T, Organ D, Gerlach C. Element-free Galerkin methods for dynamic fracture in concrete. Comput. Methods Appl Mech Engrg, 2000, 187: 385~399[DOI]
- 8 Fan S, Sheng N. Meshless formulation using NURBS basis functions for eigenfrequency changes of beam having multiple open-cracks. Journal of Sound and Vibration, 2004, 269: 781~793[DOI]
- 9 Dahmen W. Wavelet methods for PDEs — some recent developments. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2001, 128: 133~185[DOI]
- 10 Bertoluzza S, Verani M. Convergence of a nonlinear wavelet algorithm for the solution of PDEs. Applied Mathematics Letters, 2003, 16(1): 113~118[DOI]
- 11 Sudarshan R, Heedene S, Amaratunga K. A multiresolution finite element method using second generation Hermite multiwavelets. Second MIT Conference on Computational Fluid and Solid Mechanics, 2003: 1~6
- 12 Ho S L, Yang S Y. Wavelet-Galerkin method for solving parabolic equations in finite domains. Finite Elements in Analysis and Design, 2001, 37: 1023~1037[DOI]
- 13 梅树立, 张森文, 雷廷武. 求解非线性平稳随机振动 FPK 方程的小波数值方法. 暨南大学学报, 2002, 23(1): 29~33
- 14 Ma J X, Xue J J, He Z J, et al. A study of the construction and application of a Daubechies wavelet-based beam element. Finite Elements in Analysis and Design, 2003, 39(10): 965~975[DOI]
- 15 Chen X F, Yang S J, He Z J, et al. The construction of wavelet finite element and its application. Finite Elements in Analysis and Design, 2004, 40: 541~554[DOI]
- 16 陈雪峰, 李 兵, 何正嘉, 等. 基于小波有限元的裂纹故障诊断. 西安交通大学学报, 2004, 38(3): 295~298
- 17 Daubechies I. Orthonormal basis of compactly supported wavelets. Comm Pure and Appl Math, 1988, 41: 909~996
- 18 Silva J M, Gomes A. Experimental dynamic analysis of cracked free-free beams. Experimental Mechanics, 1990, 30 (1): 20~25
- 19 Kim J T, Stubbs N. Crack detection in beam-type structures using frequency data. Journal of Sound and Vibration, 2003, 259 (1): 145~160[DOI]