共形平坦的 Randers 度量

康琳

浙江大学数学系, 杭州 310027
E-mail: mumu_0@163.com

收稿日期: 2010-11-19; 接受日期: 2011-04-20
国家自然科学基金 (批准号: 108717117) 资助项目

摘要 本文研究共形平坦的 Randers 度量的性质. 证明了具有数量旗曲率的共形平坦的 Randers 度量都是局部射影平坦的, 并且给出了这类度量的分类结果. 本文还证明了不存在非平凡的共形平坦且具有近迷向 S 曲率的 Randers 度量.

关键词 共形平坦 Randers 度量 数量旗曲率 迷向 S 曲率

MSC (2000) 主题分类 53B40

1 引言

Finsler 度量的共形性质一直受到特别的关注^[1-4]. Rund 曾经指出一个 Finsler 度量的共形性质和射影性质唯一地决定了这个度量^[5]. Bácsó 和 Cheng^[2] 及 Vincze^[6] 分别用不同的方法证明了这一结论.

在 Riemann 几何中, 所有具有常截面曲率的 Riemann 流形即是共形平坦且射影平坦的. 实际上, 一个 Riemann 度量是射影平坦的充分必要条件是它具有常截面曲率. 不幸的是, 这些结论在 Finsler 几何中不再成立. 因此一个自然的问题是刻画共形平坦且射影平坦的 Finsler 度量.

关于射影平坦的 Finsler 度量有许多优秀的结果^[7,8]. 本文主要关注共形平坦的 Finsler 度量. 截面曲率推广到 Finsler 几何中即为旗曲率. 若一个 Finsler 度量是射影平坦的, 则必定具有数量旗曲率, 因此, 自然地考虑共形平坦且具有数量旗曲率的 Finsler 度量的分类问题.

Randers 度量是型如 $F = \alpha + \beta$ 的 Finsler 度量, 其中 α 是一个 Riemann 度量, β 是一个关于 α 的模长小于 1 的 1- 形式. 一个 Randers 度量共形平坦的充要条件最先由 Ichijyo 和 Hashiguchi 在 [1] 中给出. 另一方面, Shen 和 Yildirim 在 [9] 中给出了刻画 Randers 度量具有数量旗曲率的偏微分方程. 本文主要证明了下面的结果:

定理 1 设 F 是 $n (n \geq 3)$ 维流形 M 上一个共形平坦的 Randers 度量. 如果 F 具有数量旗曲率, 则 F 是局部射影平坦的.

利用以上的定理, 我们得到共形平坦且具有数量旗曲率的 Randers 度量的分类定理, 即

定理 2 令 F 是 $n (n \geq 3)$ 维流形 M 上的 Randers 度量. 则 F 局部共形平坦且具有数量旗曲率的充分必要条件是下列情形之一成立:

- 1) F 是常曲率 Riemann 度量.

2) 存在局部坐标系 (x^i, y^i) , 使得在该坐标系下 F 可以表示为

$$F = \frac{1}{|A + Bb_s x^s|} (\sqrt{\delta_{ij} y^i y^j} + b_i y^i),$$

这里 A, B 是两个在所选坐标邻域内保证 $|A + Bb_s x^s| > 0$ 的常数, b_i 为常数.

S 曲率是 Finsler 几何中一个非常重要的非 Riemann 几何量, 它由 Shen^[10] 最早发现. S 曲率刻画了体积畸变沿着测地线的变化率, 它在体积比较定理中占有非常重要的地位. Bácsó 和 Cheng 在 [2] 中首先研究了 S 曲率在共形变换下的变换规律. 对于 Randers 度量, 我们得到以下刚性结果:

定理 3 设 F 是共形平坦的 Randers 度量. 如果 F 具有近迷向的 S 曲率, 则它或者是 Minkowski 的, 或者是 Riemann 的.

上面的定理说明, 不存在非平凡的共形平坦且具有近迷向 S 曲率的 Randers 度量.

2 准备工作

设 M 是 n 维光滑流形, TM 是其切丛. 在 M 上取局部坐标系 $\{x^i\}$, 则 TM 中的任意向量可表示为 $y = y^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, 从而 $\{x^i, y^i\}$ 构成 TM 上的局部坐标系. 记 TM 上的点为 (x, y) . 流形 M 上的一个 Finsler 度量是定义在 TM 上的连续函数

$$F : TM \rightarrow [0, +\infty),$$

满足以下三条:

- (1) (正则性) F 在 $TM \setminus \{0\}$ 上光滑;
- (2) (正齐次性) 对任意实数 $\lambda > 0$, 有 $F(x, \lambda y) = \lambda F(x, y)$;
- (3) (强凸性) 基本二次型 $g = g_{ij}(x, y) dx^i \otimes dx^j$ 正定, $g_{ij} := \frac{1}{2}(F^2)_{y^i y^j}$.

这里 $(F^2)_{y^i y^j}$ 表示对 F^2 关于 y^i, y^j 求偏导数, 本文均沿用此约定. 赋予了 Finsler 度量 F 的流形 (M, F) 称为 Finsler 流形. 显然, 对 Riemann 度量来说, $g_{ij}(x, y)$ 仅与流形上的点 x 有关. 若存在一个坐标系使得 $g_{ij}(x, y)$ 与 x 无关, 则称 F 为 Minkowski 度量.

令 F 是流形 M 上的一个 Finsler 度量. 关于 F 的测地线由下面的方程刻画,

$$\frac{d^2 c^i}{dt^2} + 2G^i(c(t), \dot{c}(t)) = 0,$$

其中 $G^i := \frac{1}{4} g^{il} \{ [F^2]_{x^k y^l} y^k - [F^2]_{x^l} \}$, $(g^{ij}) = (g_{ij})^{-1}$, 称 G^i 为 Finsler 度量 F 的射系数 (测地系数). 如果在某个坐标系下, F 的测地线都是直线, 则称 F 是 (局部) 射影平坦的.

关于 F 的旗曲率张量由下式定义,

$$R^i_k = 2 \frac{\partial G^i}{\partial x^k} - y^j \frac{\partial^2 G^i}{\partial x^j \partial y^k} + 2G^j \frac{\partial^2 G^i}{\partial y^j \partial y^k} - \frac{\partial G^i}{\partial y^j} \frac{\partial G^j}{\partial y^k}.$$

如果

$$R^i_k = \lambda(x, y) F^2 \{ \delta_k^i - F^{-1} F_{y^k} y^i \},$$

则称 F 具有数量旗曲率. 更特殊地, 如果 λ 是一个常数, 则称 F 具有常旗曲率.

在自然坐标系下, 我们定义 Finsler 几何中的 Busemann-Hausdorff 体积形式,

$$d\mu = \sigma_{BH} dx^1 \wedge dx^2 \wedge \cdots \wedge dx^n,$$

其中

$$\sigma_{BH} = \frac{\text{Vol}(B^1)}{\text{Vol}\{(y^i) \in R^n \mid F(y = y^i \frac{\partial}{\partial x^i}) = 1\}},$$

Vol 表示标准欧氏体积. 可以看出体积形式在坐标变换下是不变的, 因此这个体积元的定义与坐标选取无关 (参见 [10]).

F 的 S 曲率 S 由下式定义,

$$S(x, y) := \frac{\partial G^m}{\partial y^m} - y^m \frac{\partial}{\partial x^i} (\ln \sigma).$$

显然 S 曲率由体积测度 σ 决定, 对于不同的体积元, 有不同的 S 曲率. 本节中提到的 S 曲率, 都是指对应于 Busemann-Hausdorff 的体积元 σ_{BH} . S 曲率是体积函数沿着测地线的变化率 [8]. 如果存在 M 上的函数 $c(x)$ 和 1- 形式 η 使得 $S = (n+1)c(x)F(x, y) + \eta$, 则称 F 具有弱迷向的 S 曲率. 如果 η 是闭的, 则称 F 为近迷向的. 特别地, 如果 $\eta = 0$, 则称 F 有迷向 S 曲率. 更特别地, 如果 $\eta = 0$ 且 c 是一个常数, 则称 F 有常数 S 曲率.

令 F 和 $\tilde{F}$ 都是 M 上的 Finsler 度量. 如果两个 Finsler 度量的基本张量之间只相差一个比例系数, 即

$$\tilde{g}_{ij}(x, y) = e^{2\rho} g_{ij}(x, y),$$

则称 F 和 $\tilde{F}$ 是共形等价的. 在 [3] 中 Knebelman 证明了 $e^{2\rho}$ 是只关于点的函数. 因此 $\tilde{F}$ 共形等价于 F 当且仅当 $\tilde{F}(x, y) = e^{\rho(x)} F(x, y)$. 称 ρ 为共形因子.

一个 Finsler 度量 F 如果共形等价于一个 Minkowski 度量, 则称它是共形平坦的 [1], 即在某个坐标系下, F 可以表示为 $F(x, y) = e^{\rho(x)} \tilde{F}(y)$.

对于 Randers 度量, 我们有以下引理.

引理 4 令 $\tilde{F}$ 是个 Randers 度量. $\tilde{F}$ 是共形平坦的充要条件是存在一个局部坐标系, 在这个坐标系下, $\tilde{F}$ 可以表示为

$$\tilde{F} = e^{\rho} (\sqrt{\delta_{ij} y^i y^j} + b_i y^i), \quad (2.1)$$

这里 ρ 是 M 上的一个函数, b_i 都是常数.

证明 一个 Randers 度量 $F = \alpha + \beta$ 是局部 Minkowski 的, 条件为 α 是平坦的且 β 关于 α 是平行的 [1]. 则存在一个局部坐标系, 使得在这个坐标系下, F 可以局部表示为 $F = \sqrt{\delta_{ij} y^i y^j} + b_i y^i$, 其中 b_i 都是常数. 则 $\tilde{F}$ 是共形平坦的当且仅当在这个坐标系下, 它可以表示为 $\tilde{F} = e^{\rho} (\sqrt{\delta_{ij} y^i y^j} + b_i y^i)$. 证毕.

引理 5 [9] 令 $F = \alpha + \beta$ 是一个 Randers 度量. F 具有数量旗曲率当且仅当以下两式成立:

$$R^i_k = \kappa(\alpha^2 \delta_k^i - y_k y^i) + \alpha^2 t_k^i + t_{00} \delta_k^i - t_{k0} y^i - t_0^i y_k - 3s^i_0 s_{k0}, \quad (2.2)$$

$$s_{ij|k} = \frac{1}{n-1} (a_{ik} s^m_{j|m} - a_{jk} s^m_{i|m}), \quad (2.3)$$

其中 R^i_k 是 α 的旗曲率张量, κ 是一个函数,

$$t_{ij} = s_{ik} s^k_j, \quad s_{ij} = \frac{1}{2} (b_{i|j} - b_{j|i}), \quad s^i_j = a^{ih} s_{hj}.$$

引理 6 [11] 一个 Randers 度量 $F = \alpha + \beta$ 是 Douglas 型的充分必要条件是 β 是闭的.

3 定理 1 和 2 的证明

我们首先证明下面的引理:

引理 7 一个非 Riemann 的 Randers 度量是共形平坦且具有数量旗曲率的, 则它是 Douglas 型的.

证明 设 $F = \alpha + \beta$ 是一个 Randers 型度量, 根据引理 6, 我们只需要证明 β 是一个闭形式. F 是共形平坦的, 因此 F 可以表示为 $F = e^\rho(\tilde{\alpha} + \tilde{\beta})$, 其中 $\tilde{\alpha} = \sqrt{\tilde{a}_{ij}y^iy^j}$ 是平坦的 Riemann 度量, $\beta = \tilde{b}_iy^i$ 是关于 $\tilde{\alpha}$ 平行的 1- 形式.

由于 F 具有数量旗曲率, 根据引理 5 可得方程 (2.2) 和 (2.3) 同时成立. 对 (2.2) 求迹, 再对 y^i, y^j 求偏导数可得

$$\bar{R}_{ij} = ((n-1)\kappa + t_m^m)a_{ij} + (n+1)t_{ij}, \quad (3.1)$$

其中 $\bar{R}_{ij}$ 是 α 的 Ricci 张量. 在上式两边同时用 a^{ij} 缩并可得

$$\bar{R} = n(n-1)\kappa + (n+1)t_m^m, \quad (3.2)$$

其中 $\bar{R}$ 是 α 的数量曲率.

记 $\tilde{b} = e^{-\rho}b_i, \tilde{a}_{ij} = e^{-2\rho}a_{ij}, f = \tilde{b}^s\rho_s, f_i = \frac{\partial f}{\partial x^i}, \rho^s = \tilde{a}^{is}\rho_i, \rho_i = \frac{\partial \rho}{\partial x^i}, \rho_{ik} = \frac{\partial \rho_i}{\partial x^k}$. 通过直接地计算及 $\tilde{\alpha}$ 是局部欧氏的可以得到下列关系,

$$\begin{aligned} r_{ij} &:= \frac{1}{2}(b_{i|j} + b_{j|i}) = \frac{e^\rho}{2}(2f\tilde{a}_{ij} - \tilde{b}_i\rho_j - \tilde{b}_j\rho_i), \\ s_{ij} &:= \frac{1}{2}(b_{i|j} - b_{j|i}) = \frac{e^\rho}{2}(\tilde{b}_i\rho_j - \tilde{b}_j\rho_i), \\ t_{ij} &= \frac{1}{4}(f\tilde{b}_i\rho_j + f\tilde{b}_j\rho_i - \tilde{b}_i\tilde{b}_j\rho_s\rho^s - \rho_i\rho_jb^2), \\ s_{ij|k} &= \frac{1}{2}e^\rho\{-2(\tilde{b}_i\rho_j - \tilde{b}_j\rho_i)\rho_k + \tilde{b}_i\rho_{jk} - \tilde{b}_j\rho_{ik} \\ &\quad + f(\tilde{a}_{ik}\rho_j - \tilde{a}_{jk}\rho_i + \rho_s\rho^s(\tilde{b}_i\tilde{a}_{jk} - \tilde{b}_j\tilde{a}_{ik}))\}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

由于 $\alpha = e^\rho\tilde{\alpha}$ 是共形因子为 ρ 的共形平坦的 Riemann 度量, 因此 α 的 Ricci 张量和数量曲率分别满足

$$\bar{R}_{ij} = -(n-2)(\rho_{ij} - \rho_i\rho_j) - (\Delta\rho + (n-2)\rho^s\rho_s)\tilde{a}_{ij}, \quad (3.4)$$

$$\bar{R} = -2(n-1)\Delta\rho - (n-1)(n-2)\rho_s\rho^s. \quad (3.5)$$

将 (3.5) 代入 (3.2) 可得

$$\kappa = \frac{e^{-2\rho}}{n(n-1)}\left\{-2(n-1)\left(\Delta\rho + \frac{n-2}{2}\rho^s\rho_s\right) - \frac{2n+1}{2}(f^2 - b^2\rho^s\rho_s)\right\}. \quad (3.6)$$

再利用 (3.4) 和 (3.1) 可得

$$\begin{aligned} \tilde{a}_{jk}\left\{\frac{n-2}{n}(\Delta\rho - \rho^s\rho_s) + \frac{n+1}{2n}(f^2 - b^2\rho^s\rho_s)\right\} \\ = \frac{n+1}{4}(f\tilde{b}_k\rho_j + f\tilde{b}_j\rho_k - \tilde{b}_j\tilde{b}_k\rho_s\rho^s) - b^2\rho_j\rho_k + (n-2)(\rho_{jk} - \rho_k\rho_j). \end{aligned} \quad (3.7)$$

对上式两边同时用 $\tilde{b}^k = \tilde{a}^{ks}\tilde{b}_s$ 缩并可得

$$f_j - f\rho_j = \tilde{b}_j \left\{ \frac{1}{n}(\Delta\rho - \rho^s\rho_s) + \frac{n+1}{2n(n-2)}(f^2 - b^2\rho^s\rho_s) - \frac{n+1}{4(n-2)}(f^2 - b^2\rho^s\rho_s) \right\}. \quad (3.8)$$

将 (3.3) 代入 (2.3) 可得

$$\begin{aligned} \tilde{a}_{ik}f_j - \tilde{a}_{jk}f_i - \Delta\rho(\tilde{a}_{ik}\tilde{b}_j - \tilde{a}_{jk}\tilde{b}_i) &= -2(n-1)(\tilde{b}_i\rho_j - \tilde{b}_j\rho_i)\rho_k + (n-1)(\tilde{b}_i\rho_{jk} - \tilde{b}_j\rho_{ik}) \\ &\quad + 2f(\tilde{a}_{ik}\rho_j - \tilde{a}_{jk}\rho_i) + 2\rho_s\rho^s(\tilde{b}_i\tilde{a}_{jk} - \tilde{b}_j\tilde{a}_{ik}), \end{aligned} \quad (3.9)$$

用 $\tilde{b}^k$ 缩并可得

$$2f(\tilde{b}_i\rho_j - \tilde{b}_j\rho_i) = \tilde{b}_if_j - \tilde{b}_jf_i, \quad (3.10)$$

因此可以假设存在函数 $p(x)$ 使得 $2f\rho_j - f_j = \tilde{b}_jp(x)$. 由此及 (3.8) 可假设存在函数 $q(x)$ 使得

$$f\rho_j = b_jq(x). \quad (3.11)$$

如果 $f \neq 0$, 由 (3.11) 和 (3.3) 可直接验证 β 是闭的. 如果 $f = 0$, 对 (3.9) 式两边用 $\tilde{b}^k$ 缩并, 再利用 $2f\rho_j - f_j = \tilde{b}_jp(x)$ 可得

$$\tilde{a}_{jk}(\tilde{b}^2\Delta\rho + b^2p(x) - 2\rho_s\rho^sb^2) = -2(n-1)b^2\rho_k\rho_j + b^2\rho_{jk} + (\Delta\rho + np(x) - 2\rho_s\rho^s)\tilde{b}_j\tilde{b}_k. \quad (3.12)$$

再结合 (3.7) 消去 ρ_{jk} 可得

$$\begin{aligned} b^2\tilde{a}_{jk} \left\{ \frac{n-2}{n}\Delta\rho - \frac{(n+1)(n-2)}{n}\rho^s\rho_s + \frac{n^2-1}{2n}b^2\rho^s\rho_s \right\} \\ = \tilde{b}_k\tilde{b}_j \left\{ \left[-2(n-2) + \frac{n^2-1}{4}b^2 \right] \rho^s\rho_s + (n-2)\Delta\rho \right\} \\ + b^2 \left\{ \frac{b^2}{4}(n^2-1) - (n-1)(n-2) \right\} \rho_j\rho_k. \end{aligned} \quad (3.13)$$

注意到方程 (3.13) 是一个矩阵方程, $\tilde{a}_{ij}$ 的秩为 $n \geq 3$, 而矩阵 $(\tilde{b}_i\tilde{b}_j)$ 和 $(\rho_i\rho_j)$ 的秩都是 1, 因此 (3.13) 成立的条件是 $\tilde{a}_{jk}$ 前面的系数都为 0. 因此有

$$\begin{aligned} 0 &= \tilde{b}_k\tilde{b}_j \left\{ \left[-2(n-2) + \frac{n^2-1}{4}b^2 \right] \rho^s\rho_s + (n-2)\Delta\rho \right\} \\ &\quad + b^2 \left\{ \frac{b^2}{4}(n^2-1) - (n-1)(n-2) \right\} \rho_j\rho_k. \end{aligned} \quad (3.14)$$

用 $\rho^j\rho^k$ 缩并可得

$$b^2 \left\{ \frac{b^2}{4} - (n-2)(n-1) \right\} \rho_s\rho^s = 0,$$

由于 F 是非 Riemann 的 Randers 度量, 即 $b^2 \neq 0$, 因此有 $\rho_i = 0$, β 也是闭的. 证毕.

利用 [7] 中的定理 13.5.1 和推论 13.4.2 可知, 一个 Finsler 度量是局部射影平坦的充分必要条件是它是具有数量旗曲率的 Douglas 度量. 因此定理 1 可以作为引理 7 的直接推论.

下面我们证明定理 2. 首先我们需要下面的引理:

引理 8^[12] 令 $F = \alpha + \beta$ 是一个 Randers 度量. 则 F 是射影平坦的当且仅当 α 是常曲率 Riemann 度量 (等价地, 局部射影平坦的) 且 β 是闭的.

注意到常曲率 Riemann 度量是平凡的结果, 因此我们只关注定理 2 中的情形 2), 即非 Riemann 的情况. 因为 F 是共形平坦的, 因此存在局部坐标系使得 $F = e^\rho(\alpha + \beta)$, 其中 $\alpha = \sqrt{\delta_{ij}y^i y^j}$ 是欧氏度量, $\beta = b_i y^i$ 是关于 α 平行的 1- 形式, 即 b_i 都是常数. 又因为 F 是局部射影平坦的, 根据引理 8 可得 $\tilde{\alpha} = e^\rho \alpha$ 有常截面曲率, 同时 $\tilde{\beta} = e^\rho \beta$ 为闭的 1- 形式. 由 $\tilde{\beta}$ 是闭的可得

$$b_i \rho_j - b_j \rho_i = 0, \quad (3.15)$$

因此我们可以假设存在函数 $c(x)$ 使得

$$\rho_i = b_i c(x). \quad (3.16)$$

在上式两边对 x^j 求导可得 $\rho_{ij} = c_i b_j = c_j b_i$. 同样可以假设存在函数 $d(x)$ 使得 $c_j = b_j d(x)$, 显然有

$$\rho_{ij} = d(x) b_i b_j. \quad (3.17)$$

显然 $\tilde{\alpha} = e^\rho \alpha$ 是共形平坦的. 又因为 M 的维数大于等于 3, 因此 $\tilde{\alpha}$ 具有常截面曲率当且仅当存在函数 $K(x)$ 使得

$$\rho_{ij} - \rho_i \rho_j = K(x) \delta_{ij}. \quad (3.18)$$

利用 (3.15)、(3.17) 和 (3.18) 可得

$$b_i b_j (d - c^2) = K(x) \delta_{ij}. \quad (3.19)$$

因为矩阵 (a_{ij}) 的秩为 $n \geq 3$, 矩阵 $(b_i b_j)$ 的秩为 1, 因此 (3.19) 式说明 $d - c^2 = 0$. 因此可以得到

$$\rho_{ij} - \rho_i \rho_j = 0. \quad (3.20)$$

令 $\varphi = -e^\rho$, (3.20) 可以改写为 $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^i \partial x^j} = 0$, 再由 (3.16) 可得

$$e^\rho = \varphi^{-1} = \frac{1}{|A + B b_s x^s|}, \quad (3.21)$$

这里 A 和 B 都是常数.

反过来, 如果 F 有定理 2 中情形 2 的形式, 则显然 F 是共形平坦的. 只需要令

$$\tilde{\alpha} = \frac{B}{|A + b_s x^s|} \sqrt{\delta_{ij} y^i y^j}, \quad \tilde{\beta} = \frac{B}{|A + b_s x^s|} b_i y^i.$$

通过直接计算可得 $\tilde{\alpha}$ 有常曲率且 $\tilde{\beta}$ 是闭的. 再由引理 8 可得 $F = \tilde{\alpha} + \tilde{\beta}$ 是射影平坦的. 这样我们就证明了定理 2.

4 定理 3 的证明

Bácsó 和 Cheng 在 [2] 中研究了 S 曲率在共形变化下的变化规律, 他们得到:

引理 9^[2] 令 $\tilde{F}$ 和 F 是流形 M 上两个 Finsler 度量. 如果 $\tilde{F} = e^\rho F$, 则它们的 S 曲率有如下关系,

$$\tilde{S} = S + F^2 I^t \rho_t, \quad (4.1)$$

其中 I^t 是 F 的平均 Cartan 张量.

利用上面的引理, 我们可以得到下面的命题:

命题 10 令 F 是一个共形平坦的 Randers 度量. 如果 F 的 S 曲率为 0, 则或者它是个 Riemann 度量或者它是个局部 Minkowski 度量.

证明 假设 $F = \alpha + \beta$ 是一个非 Riemann 的共形平坦的 Randers 度量, 即存在函数 ρ 使得 $e^\rho F$ 是一个局部 Minkowski 度量.

在 [13] 中, Shen 证明了 Berwald 度量的 S 曲率都为 0. 度量 $e^\rho F$ 是局部 Minkowski 的, 自然是 Berwald 的, 因此 F 和 $e^\rho F$ 的 S 曲率都为 0, 再由引理 9 可得

$$I^t \rho_t = 0. \quad (4.2)$$

而 Randers 度量有以下性质 (参见 [8]):

$$I_i = \frac{n+1}{2F} \left(b_i - \frac{a_{ij} y^j \beta}{\alpha^2} \right), \quad (4.3)$$

$$g^{ij} = \frac{\alpha}{F} \left\{ a^{ij} - (1 - b^2) \frac{y^i y^j}{F^2} + \frac{\alpha}{F} \left[\left(b^i - \frac{y^i}{\alpha} \right) \left(b^j - \frac{y^j}{\alpha} \right) - b_i b_j \right] \right\}, \quad (4.4)$$

将 (4.3) 和 (4.4) 代入到 (4.2) 中, 通过直接计算可得

$$f - \frac{b^2 \alpha + \beta}{\alpha F} \rho_0 = 0, \quad (4.5)$$

这里 $\rho_0 = \rho_i y^i$. 对于某个固定的点 x , 取特殊的方向 y 使得 $\rho_0 = 0$, 立刻就可以得到 $f = 0$. 再利用 (4.5) 式可得对于任意的 $y \neq 0$ 有 $(b^2 \alpha + \beta) \rho_0 = 0$. 因为 $b^2 \alpha + \beta = 0$ 只在 $T_x M$ 上的一个零测集上成立, 因此有 $\rho_0 = 0$. 这样我们就得到了 $\rho_i = 0$. 再由 x 的任意性可得 ρ 是一个常数, F 是一个局部 Minkowski 度量. 证毕.

对于一般的 Finsler 度量, 以下命题成立:

命题 11 设 F 是一个共形平坦的 Finsler 度量, 如果 F 具有迷向 S 曲率, 则 F 的 S 曲率为 0.

证明 令 $\tilde{F} = e^\rho F$ 是局部 Minkowski 度量. 根据引理 9 有 F 的 S 曲率为

$$S = -F^2 I^t \rho_t = (n+1)c(x)F, \quad (4.6)$$

这里 c 是一个函数, 其中第二个等号是因为 F 具有迷向 S 曲率. (4.6) 式对任意的方向 y 都成立, 因此只要取 $y = \nabla \rho$ 即可得到 $c = 0$. 因此 F 的 S 曲率为 0. 证毕.

对于 Randers 度量, 具有迷向 S 曲率和具有近迷向 S 曲率是等价的 [14]. 因此, 利用命题 10 和 11 可以直接得到定理 3 成立.

致谢 作者要特别感谢导师沈一兵教授, 感谢他对作者的指导和帮助, 他的意见和建议帮助作者改善了文中的结果. 作者还要感谢审稿人的辛勤劳动, 感谢他们对文章的意见和建议.

参考文献

- 1 Ichijyo Y, Hashiguchi M. On the condition that a Randers space be conformally flat Rep. Fac Sci Kagoshima Univ, 1989
- 2 Bácsó S, Cheng X. Finsler conformal transformations and the curvature invariances. Publ Math Debrecen, 2007, 70: 221–231
- 3 Knebelman M S. Conformal geometry of generalised metric spaces. Proc Natl Acad Sci USA, 15: 376–379
- 4 Matsumoto M. Conformally closed Finsler spaces. Balkan J Geom Appl, 1999, 4: 117–128

- 5 Rund H. The Differential Geometry of Finsler Spaces. Berlin: Springer-Verlag, 1959
- 6 Vincze C. On conformal equivalence of Riemann-Finsler metrics. Publ Math Debrecen, 1998, 52: 167–185
- 7 Shen Z. Differential Geometry of Spray and Finsler Spaces. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2001
- 8 Shen Z. Landsberg curvature, S-curvature and Riemann curvature. In: A Sampler of Riemann-Finsler Geometry. Math Sci Res Inst Publ, 50. Cambridge: Cambridge Univ Press, 2004
- 9 Shen Z, Yildirim G C. A characterization of Randers metrics of scalar flag curvature. Preprint
- 10 Shen Z. Volume comparison and its applications in Riemann-Finsler geometry. Adv Math, 1997, 128: 306–328
- 11 Bácsó S, Masumoto M. On Finsler spaces of Douglas type: A generalization of the notion of Berwald space. Publ Math Debrecen, 1997, 51: 385–406
- 12 Bácsó S, Cheng X, Shen Z. Curvature properties of (α, β) -metrics. Adv Stud Pure Math, 2007, 48: 73–110
- 13 Shen Z. Lectures on Finsler Geometry. Singapore: World Scientific, 2001
- 14 Cheng X, Shen Z. Randers metrics with special curvature properties. Osaka J Math, 2003, 40: 87–101

On conformally flat Randers metrics

KANG Lin

Abstract In this paper, the properties of conformally flat Randers metrics are studied. It is proved that any conformally flat Randers metric of scalar curvature is projectively flat. Moreover, the complete classification of such Randers metrics is given. It is also shown that there is no non-trivial conformally flat Randers metrics of almost isotropic S-curvature.

Keywords: conformally flat, Randers metric, scalar flag curvature, isotropic S-curvature

MSC(2000): 53B40

doi: 10.1360/012010-910