



论文

考虑温度记忆效应的形状记忆合金本构模型

周博^{①*}, 赵士成^②^① 中国石油大学(华东) 储运与建筑工程学院, 青岛 266555;^② 哈尔滨工程大学航天与建筑工程学院, 哈尔滨 150001

*联系人, E-mail: zhoubo_heu@163.com

收稿日期: 2013-02-23; 接受日期: 2013-07-18; 网络出版日期: 2013-07-22

中央高校科研基本业务费重大项目培育计划、教育部留学回国人员科研启动基金(第 37 批)、中国博士后科学基金(编号: 20080430933)资助项目

摘要 近年来在形状记忆合金(Shape Memory Alloy, SMA)中发现的由于不完全马氏体逆相变引起的温度记忆效应, 在智能材料与结构等领域具有潜在的应用价值, 建立克服现存 SMA 本构模型不能考虑 SMA 温度记忆效应这一局限性的 SMA 本构模型具有理论和工程实际意义. 本文在前期研究的基础上, 基于作者提出的形状记忆因子的概念, 综合运用热力学、连续介质力学和马氏体相变学的相关理论, 建立了描述 SMA 的形状记忆因子、应力、温度间关系的形状记忆方程和描述 SMA 的应变、应力、温度间关系的力学本构方程. 由形状记忆方程和力学本构方程构成的 SMA 本构模型, 克服了现存 SMA 本构模型不能考虑 SMA 温度记忆效应的局限性. 数值结果表明, 该 SMA 本构模型能有效描述经历不完全马氏体逆相变的 SMA 的热力学行为, 可为 SMA 温度记忆效应的应用研究提供理论基础.

关键词 形状记忆合金, 温度记忆效应, 形状记忆方程, 力学本构方程

PACS: 46.05.+b, 64.70.kb

doi: 10.1360/132011-495

1 引言

形状记忆合金(SMA)不仅具有普通金属所没有的形状记忆效应和超弹性, 而且具有良好的耐腐蚀性、理化性、生物相容性、高阻尼性等优点, 因此在生物医用材料、智能材料与结构、土木工程、航空航天等领域有重要的应用价值. 多年来随着对 SMA 开发与应用研究的不断深入, 各国学者在 SMA 本构模型方面的研究也取得了重要进展. SMA 本构模型包

括描述 SMA 的马氏体体积分数(形状记忆因子)、温度、应力间关系的相变方程(形状记忆方程)和描述 SMA 的应变、应力、温度间关系的力学本构方程. 1986 年, Tanaka^[1]利用描述铁系合金马氏体转变行为的一维形核动力方程, 建立了描述 SMA 相变行为的指数型相变方程, 根据热力学基本定理, 建立了一维增量型 SMA 力学本构方程. 1990 年, Liang 等人^[2]在上述工作的基础上, 构造了余弦型相变方程, 假设 SMA 的弹性模量为常数, 推导了一维全量型力学本

引用格式: 周博, 赵士成. 考虑温度记忆效应的形状记忆合金本构模型. 中国科学: 物理学 力学 天文学, 2013, 43: 1084–1096

Zhou B, Zhao S C. A constitutive model of shape memory alloy with temperature memory effect (in Chinese). Sci Sin-Phys Mech Astron, 2013, 43: 1084–1096, doi: 10.1360/132011-495

构方程. 1993 年, Brinson^[3]将 SMA 马氏体体积分数分解成温度诱发的和应力诱发的两部分, 在余弦型相变方程的基础上构造了 Brinson 相变方程, 建立一个一维 SMA 力学本构方程; Sun 等人^[4]基于指数型相变方程、细观力学、不可逆热力学和对微结构物理机制的分析, 较好地解释了 SMA 在任意非比例加载下的形状记忆效应和超弹性的宏观现象和微观机理, 建立了一个三维 SMA 力学本构方程. 1994 年, Boyd 等人^[5]利用指数型相变方程, 将 SMA 总应变分解为弹性应变、相变应变和热胀应变三部分, 建立了一个三维 SMA 力学本构方程. 2001 年, Peng 等人^[6]利用指数型相变方程, 根据 SMA 中相组成及其在不同温度和应力水平下的动态变化, 建立了一个三维 SMA 力学本构方程. 2002 年, Brocca 等人^[7]利用 Brinson 相变方程, 基于微平面理论建立了一个能描述 SMA 从孪晶马氏体向非孪晶马氏体转变过程的三维 SMA 力学本构方程. 2003 年, 郭扬波等人^[8]在三线性相变模型的基础上, 考虑应变率对相变阻力的影响, 建立了一个一维率相关 SMA 相变方程. 2004 年, 李海涛等人^[9]利用指数型相变方程, 假设 SMA 由马氏体相和奥氏体相动态组成, 其行为是两相各自行为的动态组合, 基于经典塑性理论, 建立了一个三维 SMA 力学本构方程. 2006 年, 周博等人^[10]定义了形状记忆因子的概念, 利用其合理地描述了 SMA 的形状记忆效应和超弹性的热力学过程, 建立了描述形状记忆因子变化规律的形状记忆方程, 并建立了细观力学三维 SMA 力学本构方程. 2009 年, Zhou 等人^[11]完善了形状记忆因子的概念, 解释了其物理意义, 进而将 SMA 的形状记忆效应和超弹性统一归结为形状记忆效应, 并建立了宏观力学三维 SMA 力学本构方程.

近年来研究发现某些 SMA 除具有记忆形状的形状记忆效应, 还具有记忆温度的温度记忆效应. 温度记忆效应是由 SMA 不完全马氏体逆相变引起的, 其过程可描述为: 在 SMA 因加热发生由马氏体向奥氏体转变的马氏体逆相变过程, 如果升温至奥氏体开始温度 A_s 和奥氏体结束温度 A_f 中间的某一温度 T_s 时停止加热, 然后冷却 SMA 至温度低于马氏体结束温度 M_f , 使 SMA 完全处于马氏体相; SMA 将在下一次因加热而发生由马氏体向奥氏体转变的完全马氏体逆相变过程中, 出现一个与上一次不完全马氏体逆相变过程的停止温度 T_s 有定量关系的动力学温度停止点 T_{s1} , 在温度升高到 T_{s2} 后马氏体逆相变才继续进

行. 2004 年, 郑雁军等人^[12,13]研究了钛镍 SMA 的温度记忆效应, 结果表明可通过变形约束手段拓宽钛镍 SMA 的相变温度区间, 进而使其温度记忆效应在更大的温度范围内发挥作用. 2005 年, Wang 等人^[14]研究了钛镍 SMA 和钛镍铜 SMA 的温度记忆效应, 结果表明 SMA 的温度记忆效应有很好的可重复性, 并可以记忆每次不完全马氏体逆相变的不同停止温度; 何向明等人^[15]研究了钛镍铜 SMA 的温度记忆效应, 指出 SMA 不完全马氏体逆相变过程中的弹性能再分布是可能的温度记忆效应机制. 2008 年, 余华军等人^[16]研究了钛镍 SMA 薄膜和钛镍铜 SMA 薄膜的温度记忆效应, 指出温度记忆效应是 SMA 的固有现象、而且与马氏体变体间的弹性能及奥氏体和马氏体之间的共格应变密切相关. SMA 的温度记忆效应在智能材料与结构等领域具有潜在的应用价值. 前述现存 SMA 本构模型都不能考虑 SMA 的温度记忆效应, 这不利于 SMA 的温度记忆效应的工程实际应用, 需要建立可考虑温度记忆效应的 SMA 本构模型, 克服现存 SMA 本构模型的局限性.

本文在前期研究的基础上^[10,11,17], 基于作者提出的形状记忆因子的概念, 综合运用热力学、连续介质力学和马氏体相变学的相关理论, 建立了描述 SMA 的形状记忆因子、温度、应力间关系的形状记忆方程和描述 SMA 的应变、应力、温度间关系的力学本构方程. 由上述形状记忆方程和力学本构方程构成的 SMA 本构模型, 克服了现存 SMA 本构模型不能考虑 SMA 由于不完全马氏体逆相变引起的温度记忆效应的局限性, 能有效描述经历不完全马氏体逆相变的 SMA 的热力学行为, 可为 SMA 的温度记忆效应的应用研究提供理论基础.

2 形状记忆方程

SMA 的相变包括马氏体相变和马氏体逆相变. 处于奥氏体相的 SMA 在冷却过程中, 当温度降低到马氏体开始温度 M_s 时, 开始发生由奥氏体向马氏体转变的马氏体相变, 当温度降低到马氏体结束温度 M_f 时, SMA 全部转变为马氏体, 马氏体相变结束. 处于马氏体相的 SMA 在加热过程中, 当温度升高到奥氏体开始温度 A_s 时, 开始发生由马氏体向奥氏体转变的马氏体逆相变, 当温度升高到奥氏体结束温度 A_f 时, SMA 全部转变为奥氏体, 马氏体逆相变结束.

经历不完全马氏体逆相变的 SMA, 在随后的马氏体逆相变过程中, 当温度升高到奥氏体开始温度 A_s 时, SMA 开始发生由马氏体向奥氏体转变的马氏体逆相变, 当温度继续升高到 T_{s1} 时, 马氏体逆相变暂时停止, 当温度继续升高到 T_{s2} 时, 马氏体逆相变又继续进行, 当温度升高到奥氏体结束温度 A_f 时, SMA 全部转变为奥氏体, 马氏体逆相变结束. 在本文, 分别将 T_{s1} 和 T_{s2} 称为 SMA 的奥氏体暂停温度和奥氏体继续温度. 可以通过示差扫描热量分析(DSC)实验研究 SMA 在马氏体相变和马氏体逆相变过程中的相变行为. Zhou 和 Yoon^[17]在研究 SMA 的马氏体相变行为时, 将通过 DSC 测定的 SMA 在马氏体逆相变过程中热流-温度曲线描述为如下函数:

$$\frac{d\Delta Q}{dT} = B_1 \cos \left[\frac{\pi}{A_f - A_s} \left(T - \frac{A_f + A_s}{2} \right) \right] + C_1, \quad (A_s \leq T \leq A_f), \quad (1)$$

其中 ΔQ 和 T 分别为相变热能增量和温度, B_1 和 C_1 为待定常数.

在本文考虑 SMA 的温度记忆效应, 将经历不完全马氏体逆相变的 SMA 在随后的马氏体逆相变过程中处于奥氏体开始温度 A_s 和奥氏体暂停温度 T_{s1} 之间的温度区间内的热流-温度曲线描述为

$$\frac{d\Delta Q}{dT} = b_1 \cos \left[\frac{\pi}{T_{s1} - A_s} \left(T - \frac{T_{s1} + A_s}{2} \right) \right] + c_1, \quad (A_s \leq T \leq T_{s1}), \quad (2)$$

其中 b_1 和 c_1 为待定常数; 而将经历不完全马氏体逆相变 SMA 在随后的马氏体逆相变过程中处于奥氏体继续温度 T_{s2} 和奥氏体结束温度 A_f 之间的温度区间内的热流-温度曲线描述为

$$\frac{d\Delta Q}{dT} = b_2 \cos \left[\frac{\pi}{A_f - T_{s2}} \left(T - \frac{A_f + T_{s2}}{2} \right) \right] + c_2, \quad (T_{s2} \leq T \leq A_f), \quad (3)$$

其中 b_2 和 c_2 为待定常数.

在 SMA 的马氏体相变及马氏体逆相变过程, 其自由能增量 ΔG 、热能增量 ΔQ 、熵变 ΔS 之间的微分关系为

$$\frac{d\Delta G}{dT} = \frac{d\Delta Q}{dT} - \Delta S. \quad (4)$$

而马氏体体积分数 ξ 和自由能增量 ΔG 之间满足

$$\frac{d\xi}{dT} = k \frac{d\Delta G}{dT} + D, \quad (5)$$

其中 k 和 D 为待定常数. 将式(4)代入式(5), 得

$$\frac{d\xi}{dT} = k \frac{d\Delta Q}{dT} + d, \quad (6)$$

其中 $d=D-k\Delta S$ 为待定常数.

将式(2)代入式(6), 并假设在温度 T 等于奥氏体开始温度 A_s 和奥氏体暂停温度 T_{s1} 时, 马氏体体积分数对温度的导数 $d\xi/dT=0$, 得

$$\frac{d\xi}{dT} = a_1 \cos \left[\frac{\pi}{T_{s1} - A_s} \left(T - \frac{T_{s1} + A_s}{2} \right) \right], \quad (A_s \leq T \leq T_{s1}), \quad (7)$$

其中 $a_1=kb_1$ 为待定常数. 类似地将式(3)代入式(6), 并假设在温度 T 等于奥氏体继续温度 T_{s2} 和奥氏体结束温度 A_f 时, 马氏体体积分数对温度的导数 $d\xi/dT=0$, 得

$$\frac{d\xi}{dT} = a_2 \cos \left[\frac{\pi}{A_f - T_{s2}} \left(T - \frac{A_f + T_{s2}}{2} \right) \right], \quad (T_{s2} \leq T \leq A_f), \quad (8)$$

其中 $a_2=kb_2$ 为待定常数.

对式(7)进行积分运算, 并利用边界条件: 在温度 T 等于奥氏体开始温度 A_s 时, 马氏体体积分数 $\xi(A_s)=1$; 在温度 T 等于奥氏体暂停温度 T_{s1} 时, 马氏体体积分数 $\xi(T_{s1})=\xi_s$, 得

$$\xi = -\frac{1-\xi_s}{2} \sin \left[\frac{\pi}{T_{s1} - A_s} \left(T - \frac{T_{s1} + A_s}{2} \right) \right] + \frac{1+\xi_s}{2}, \quad (A_s \leq T \leq T_{s1}), \quad (9)$$

其中 ξ_s 为经历不完全马氏体逆相变的 SMA 在随后的马氏体逆相变过程中马氏体逆相变暂停时的马氏体体积分数. 对式(8)进行积分运算, 并利用边界条件: 在温度 T 等于奥氏体继续温度 T_{s2} 时, 马氏体体积分数 $\xi(T_{s2})=\xi_s$; 在温度 T 等于奥氏体结束温度 A_f 时, 马氏体体积分数 $\xi(A_f)=0$, 得

$$\xi = -\frac{\xi_s}{2} \sin \left[\frac{\pi}{A_f - T_{s2}} \left(T - \frac{A_f + T_{s2}}{2} \right) \right] + \frac{\xi_s}{2}, \quad (T_{s2} \leq T \leq A_f), \quad (10)$$

与用式(1)描述 SMA 马氏体逆相变过程的热流-温度曲线相似, 将 SMA 马氏体相变过程中热流-温度曲线描述为如下余弦函数:

$$\frac{d\Delta Q}{dT} = B_2 \cos \left[\frac{\pi}{M_f - M_s} \left(T - \frac{M_f + M_s}{2} \right) \right] + C_2, \quad (M_s \geq T \geq M_f), \quad (11)$$

其中 B_2 和 C_2 为待定常数. 将式(11)代入式(6), 并假设在温度 T 等于马氏体开始温度 M_s 和马氏体结束温度 M_f 时, 马氏体体积分数对温度的导数 $d\xi/dT=0$, 得

$$\frac{d\xi}{dT} = b \cos \left[\frac{\pi}{M_f - M_s} \left(T - \frac{M_f + M_s}{2} \right) \right] \quad (M_s \geq T \geq M_f), \quad (12)$$

其中 $b = kB_2$ 为待定常数. 对式(12)进行积分运算, 并利用边界条件: 在温度 T 等于马氏体开始温度 M_s 时, 马氏体体积分数 $\xi(M_s)=0$; 在温度 T 等于马氏体结束温度 M_f 时, 马氏体体积分数 $\xi(M_f)=0$, 得

$$\xi = \frac{1}{2} \sin \left[\frac{\pi}{M_f - M_s} \left(T - \frac{M_f + M_s}{2} \right) \right] + \frac{1}{2}, \quad (M_s \geq T \geq M_f). \quad (13)$$

周博等人^[10,11]定义和完善了形状记忆因子的概念, 将 SMA 的形状记忆效应和超弹性统一归结为形状记忆效应. 以形状记忆因子作为内变量, 可以直观地描述 SMA 的形状记忆效应. 在形状改变过程中, 随着形状记忆因子的逐渐增加, 可记忆的变形逐渐产生; 在形状恢复过程中, 随着形状记忆因子的逐渐减小, 被记忆的变形逐渐恢复. 形状记忆因子 η 和马氏体体积分数 ξ 间的关系为

$$\xi = \xi_0 + (1 - \xi_0)\eta, \quad (14)$$

其中 ξ_0 为马氏体体积分数的初值.

Brinson^[3]阐明了 SMA 相变过程中的相变临界应力和温度的关系, 可等效描述为: 在加载引起的马氏体相变过程中, 马氏体开始应力 σ_{ms} 和温度 T 的关系为

$$\sigma_{ms} = \begin{cases} \sigma_{crs} & (T \leq M_s), \\ \sigma_{crs} + C_M(T - M_s) & (T > M_s), \end{cases} \quad (15a)$$

马氏体结束应力 σ_{mf} 和温度 T 的关系为

$$\sigma_{mf} = \begin{cases} \sigma_{crf} & (T \leq M_s), \\ \sigma_{crf} + C_M(T - M_s) & (T > M_s), \end{cases} \quad (15b)$$

其中 σ_{crs} , σ_{crf} , C_M 为 SMA 的材料常数; 在卸载引起的马氏体逆相变过程中, 奥氏体开始应力 σ_{as} 和温度 T 的关系为

$$\sigma_{as} = C_A(T - A_s), \quad (T > A_s), \quad (16a)$$

奥氏体结束应力 σ_{af} 和温度 T 的关系为

$$\sigma_{af} = C_A(T - A_f), \quad (T > A_f), \quad (16b)$$

其中 C_A 为 SMA 的材料常数.

在本文建立可考虑温度记忆效应的 SMA 形状记忆方程, 将式(16)描述的马氏体逆相变过程中的相变临界应力和温度关系扩展为

$$\sigma_{as} = C_A(T - A_s), \quad (T > A_s), \quad (17a)$$

$$\sigma_{s1} = C_A(T - T_{s1}), \quad (T > T_{s1}), \quad (17b)$$

$$\sigma_{s2} = C_A(T - T_{s2}), \quad (T > T_{s2}), \quad (17c)$$

$$\sigma_{af} = C_A(T - A_f), \quad (T > A_f), \quad (17d)$$

其中 σ_{s1} 和 σ_{s2} 分别称为奥氏体暂停应力和奥氏体继续应力.

类似与式(12)描述 SMA 因冷却引起的马氏体相变过程中马氏体体积分数 ξ 与温度 T 间的微分关系, 将 SMA 因加载引起的马氏体相变过程中形状记忆因子 η 和等效应力 σ_e 间的微分关系描述为

$$\frac{d\eta}{d\sigma_e} = b \cos \left[\frac{\pi}{\sigma_{mf} - \sigma_{ms}} \left(\sigma_e - \frac{\sigma_{mf} + \sigma_{ms}}{2} \right) \right], \quad (\sigma_{ms} \leq \sigma_e \leq \sigma_{mf}), \quad (18)$$

其中 b 为待定常数.

类似与式(7)描述 SMA 因加热引起的马氏体逆相变过程中在奥氏体开始温度 A_s 和奥氏体暂停温度 T_{s1} 之间的温度区间 $A_s \leq T \leq T_{s1}$ 内马氏体体积分数 ξ 和温度 T 间的微分关系, 将 SMA 因卸载引起的马氏体逆相变过程中在奥氏体开始应力 σ_{as} 和奥氏体暂停应力 σ_{s1} 之间的应力区间 $\sigma_{as} \geq \sigma_e \geq \sigma_{s1}$ 内形状记忆因子 η 和等效应力 σ_e 间的微分关系描述为

$$\frac{d\eta}{d\sigma_e} = a_1 \cos \left[\frac{\pi}{\sigma_{s1} - \sigma_{as}} \left(\sigma_e - \frac{\sigma_{s1} + \sigma_{as}}{2} \right) \right], \quad (\sigma_{as} \leq \sigma_e \leq \sigma_{s1}), \quad (19)$$

其中 a_1 为待定常数.

类似与式(8)描述 SMA 因加热引起的马氏体逆相变过程中在奥氏体继续温度 T_{s2} 和奥氏体结束温度 A_f 之间的温度区间 $T_{s1} \leq T \leq A_f$ 内马氏体体积分数 ξ 和温度 T 间的微分关系, 将 SMA 因卸载引起的马氏体逆相变过程中在奥氏体继续应力 σ_{s2} 和奥氏体结束应力 σ_{af} 之间的应力区间 $\sigma_{s1} \geq \sigma_e \geq \sigma_{af}$ 内形状记忆因子 η 和等效应力 σ_e 间的微分关系描述为

$$\frac{d\eta}{d\sigma_e} = a_2 \cos \left[\frac{\pi}{\sigma_{af} - \sigma_{s2}} \left(\sigma_e - \frac{\sigma_{af} + \sigma_{s2}}{2} \right) \right], \quad (\sigma_{s2} \geq \sigma_e \geq \sigma_{af}), \quad (20)$$

其中 a_2 为待定常数.

对式(18)进行积分运算, 并利用边界条件: 在加载引起的马氏体相变过程中, 当等效应力 σ_e 等于马氏体开始应力 σ_{ms} 时, SMA 的形状记忆因子 $\eta(\sigma_{ms}) = \eta_{l0}$; 当等效应力 σ_e 等于马氏体结束应力 σ_{mf} 时, SMA 的形状记忆因子 $\eta(\sigma_{mf}) = 1$, 得

$$\eta = \frac{1 - \eta_{l0}}{2} \sin \left[\frac{\pi}{\sigma_{mf} - \sigma_{ms}} \left(\sigma_e - \frac{\sigma_{mf} + \sigma_{ms}}{2} \right) \right] + \frac{1 + \eta_{l0}}{2}, \quad (\sigma_{ms} \leq \sigma_e \leq \sigma_{mf}), \quad (21)$$

其中 η_{l0} 为加载开始时形状记忆因子 η 的初值.

对式(19)进行积分运算, 并利用边界条件: 在卸载引起的马氏体逆相变过程中, 当等效应力 σ_e 等于奥氏体开始应力 σ_{as} 时, SMA 的形状记忆因子 $\eta(\sigma_{as}) = \eta_{u0}$; 当等效应力 σ_e 等于奥氏体暂停应力 σ_{s1} 时, SMA 的形状记忆因子 $\eta(\sigma_{s1}) = \xi_s$, 得

$$\eta = -\frac{\eta_{u0} - \xi_s}{2} \sin \left[\frac{\pi}{\sigma_{s1} - \sigma_{as}} \left(\sigma_e - \frac{\sigma_{s1} + \sigma_{as}}{2} \right) \right] + \frac{\eta_{u0} + \xi_s}{2}, \quad (\sigma_{as} \geq \sigma_e \geq \sigma_{s1}), \quad (22)$$

其中 η_{u0} 为卸载开始时形状记忆因子的初值.

对式(20)进行积分, 并利用边界条件: 在卸载引起的马氏体逆相变过程中, 当等效应力 σ_e 等于奥氏体继续应力 σ_{s2} 时, SMA 的形状记忆因子 $\eta(\sigma_{s2}) = \xi_s$; 当等效应力等于奥氏体结束应力 σ_{af} 时, SMA 的形状记忆因子 $\eta(\sigma_{af}) = 0$, 得

$$\eta = -\frac{\xi_s}{2} \sin \left[\frac{\pi}{\sigma_{af} - \sigma_{s2}} \left(\sigma_e - \frac{\sigma_{af} + \sigma_{s2}}{2} \right) \right] + \frac{\xi_s}{2}, \quad (\sigma_{s2} \geq \sigma_e \geq \sigma_{af}). \quad (23)$$

根据连续介质力学, 在式(21), (22)和式(23)中用到的等效应力

$$\sigma_e = \sqrt{\frac{3}{2} \left(\sigma_{ij} - \frac{1}{3} \sigma_{kk} \right) \left(\sigma_{ij} - \frac{1}{3} \sigma_{kk} \right)}, \quad (24)$$

其中 σ_{ij} 为应力张量.

式(15), (21), (17), (22), (23)和式(14)构成了描述 SMA 的形状记忆因子、马氏体体积分数、温度、应力间关系的形状记忆方程, 其中式(15), (21)和式(14)

描述了 SMA 马氏体相变过程中形状记忆因子、马氏体体积分数、温度、应力间的关系; 式(17), (22), (23)和式(14)描述了 SMA 马氏体逆相变过程中形状记忆因子、马氏体体积分数、温度、应力间的关系.

3 力学本构方程

固体材料的相变是一个能量耗散过程, 借助内变量可有效描述相变固体材料的应力、应变、温度间的关系, 本文将 SMA 的内变量取为形状记忆因子 η . 根据热力学基本定理, SMA 的 Gibbs 自由能可以描述为应力、温度和内变量的函数, 即

$$G = G(\sigma_{ij}, \eta, T), \quad (25)$$

其中 G 为 Gibbs 自由能、 σ_{ij} 为应力张量. 应变与 Gibbs 自由能间的微分关系为

$$\varepsilon_{ij} = -\frac{\partial G}{\partial \sigma_{ij}}, \quad (26)$$

其中 ε_{ij} 为应变张量, 对式(26)进行微分运算, 得

$$d\varepsilon_{ij} = -\frac{\partial^2 G}{\partial \sigma_{ij} \partial \sigma_{kl}} d\sigma_{kl} - \frac{\partial^2 G}{\partial \sigma_{ij} \partial \eta} d\eta - \frac{\partial^2 G}{\partial \sigma_{ij} \partial T} dT, \quad (27)$$

令

$$S_{ijkl}(\xi) = -\frac{\partial^2 G}{\partial \sigma_{ij} \partial \sigma_{kl}}, \quad (28)$$

为 SMA 的柔度系数张量. 令

$$B_{ij} = -\frac{\partial^2 G}{\partial \sigma_{ij} \partial \eta}, \quad (29)$$

称为 SMA 的形状记忆系数张量. 令

$$\Lambda_{ij} = -\frac{\partial^2 G}{\partial \sigma_{ij} \partial T}, \quad (30)$$

为 SMA 的热胀系数张量. 将式(28), (29), (30)代入式(27), 得

$$d\varepsilon_{ij} = S_{ijkl}(\xi) d\sigma_{kl} + B_{ij} d\eta + \Lambda_{ij} dT. \quad (31)$$

对式(31)进行不定积分运算, 得

$$\varepsilon_{ij} = S_{ijkl}(\xi) \sigma_{kl} + B_{ij} \eta + \Lambda_{ij} T + c_{ij}(\xi), \quad (32)$$

其中 $c_{ij}(\xi)$ 为待定积分常数. 对于任意初始状态, 式(32)可表示为

$$\varepsilon_{ij}^0 = S_{ijkl}(\xi_0) \sigma_{kl}^0 + B_{ij} \eta_0 + \Lambda_{ij} T_0 + c_{ij}(\xi_0), \quad (33)$$

将式(32)和式(33)左右两边相减, 得

$$\varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^0 = S_{ijkl}(\xi)\sigma_{kl} - S_{ijkl}(\xi_0)\sigma_{kl}^0 + B_{ij}(\eta - \eta_0) + \Lambda_{ij}(T - T_0) + c_{ij}(\xi) - c_{ij}(\xi_0). \quad (34)$$

为确定式(34)中的待定积分常数, 考虑初始状态为完全马氏体的 SMA 的一个加载-卸载过程, 加载开始条件和卸载结束条件为

$$\begin{cases} \sigma_{ij}^0 = 0, \varepsilon_{ij}^0 = 0, \xi_0 = 1, \eta_0 = 0, T_0 = T_0, \\ \sigma_{ij} = 0, \varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^L, \xi = 1, \eta = 1, T = T_0, \end{cases} \quad (35)$$

其中 ε_{ij}^L 称为 SMA 的极限残余应变张量. 将式(35)描述的加载开始条件和卸载结束条件代入式(34), 得

$$B_{ij} = \varepsilon_{ij}^L, \quad (36)$$

再将式(36)代入式(34), 得

$$\varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^0 = S_{ijkl}(\xi)\sigma_{kl} - S_{ijkl}(\xi_0)\sigma_{kl}^0 + \varepsilon_{ij}^L(\eta - \eta_0) + \Lambda_{ij}(T - T_0) + c_{ij}(\xi) - c_{ij}(\xi_0). \quad (37)$$

再考虑初始状态为奥氏体与马氏体混合体的 SMA 的一个加载-卸载过程, 加载开始条件和卸载结束条件为

$$\begin{cases} \sigma_{ij}^0 = 0, \varepsilon_{ij}^0 = 0, \xi_0 = \xi, \eta_0 = 0, T_0 = T_0, \\ \sigma_{ij} = 0, \varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^L, \xi = 1, \eta = 1, T = T_0, \end{cases} \quad (38)$$

将式(38)描述的加载开始条件和卸载结束条件代入式(37), 得

$$c_{ij}(\xi) - c_{ij}(1) = 0, \quad (39)$$

将 $\xi = \xi_0$ 代入式(39), 得

$$c_{ij}(\xi_0) - c_{ij}(1) = 0, \quad (40)$$

将式(39)和式(40)左右两边相减, 得

$$c_{ij}(\xi) - c_{ij}(\xi_0) = 0, \quad (41)$$

将式(41)代入式(37), 得

$$\varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^0 = S_{ijkl}(\xi)\sigma_{kl} - S_{ijkl}(\xi_0)\sigma_{kl}^0 + \varepsilon_{ij}^L(\eta - \eta_0) + \Lambda_{ij}(T - T_0). \quad (42)$$

根据连续介质力学, 若假设 SMA 为各向同性材料, 则其弹性柔度系数张量

$$S_{ijkl}(\xi) = \frac{1}{E(\xi)} \left[\frac{1}{2}(1 + \nu)(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{jk}\delta_{il}) + \nu\delta_{ij}\delta_{kl} \right], \quad (43)$$

其中

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & (i = j), \\ 0 & (i \neq j), \end{cases} \quad (44)$$

为 Kronecker 符号, $E(\xi)$ 为一维应力状态下 SMA 的弹性模量, Brinson^[3]研究表明:

$$E(\xi) = E_a + (E_m - E_a)\xi, \quad (45)$$

其中 E_a 和 E_m 分别为 SMA 奥氏体和马氏体的弹性模量. SMA 的热胀系数张量

$$\Lambda_{ij} = \alpha\delta_{ij}, \quad (46)$$

其中 α 为一维应力状态下 SMA 的热胀系数. SMA 的极限残余应变张量

$$\varepsilon_{ij}^L = D_{ai}D_{aj}\varepsilon_L, \quad (47)$$

其中 ε_L 为一维应力状态下 SMA 的最大残余应变, D_{ai} 和 D_{aj} 为坐标转换张量, 下标 a 代表最大主应力方向, 下标 i 和 j 代表坐标轴方向. 将式(43), (45), (46), (47)代入式(42), 得

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^0 = & \left[\frac{1}{2}(1 + \nu)(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{jk}\delta_{il}) + \nu\delta_{ij}\delta_{kl} \right] \\ & \times \left[\frac{\sigma_{kl}}{E_a + (E_m - E_a)\xi} - \frac{\sigma_{kl}^0}{E_a + (E_m - E_a)\xi_0} \right] \\ & + D_{ai}D_{aj}\varepsilon_L(\eta - \eta_0) + \alpha\delta_{ij}(T - T_0). \end{aligned} \quad (48)$$

式(48)即为描述 SMA 的应力、应变、温度间关系的力学本构方程, 它与描述 SMA 的形状记忆因子、应力、温度间关系的形状记忆方程(式(15), (21), (17), (22), (23)和式(14))一起构成了本文建立的 SMA 本构模型. 该 SMA 本构模型克服了现存 SMA 本构模型不能考虑 SMA 由于不完全马氏体逆相变引起的温度记忆效应的局限性, 能有效地描述经历不完全马氏体逆相变的 SMA 的热力学行为, 可为 SMA 温度记忆效应的应用研究提供理论基础.

4 数值算例

利用本文建立的 SMA 本构模型, 即形状记忆方程(式(15), (21), (17), (22), (23)和式(14))和力学本构方程(式(48)), 数值模拟了经历不完全马氏体逆相变的 SMA 的热力学行为. 在数值模拟中用到的 SMA 材料参数列于表 1 中.

图 1 中线型为实线的曲线是本文 SMA 本构模型

表 1 数值计算中 SMA 的材料参数^[11]

Table 1 Material constants used for numerical calculations^[11]

A_s (°C)	T_{s1} (°C)	T_{s2} (°C)	A_f (°C)	ξ_s
63.28	70.50	75.30	82.91	0.50
M_s (°C)	M_f (°C)	E_a (GPa)	E_m (GPa)	ε_L (%)
49.47	36.21	230.00	67.00	6.70
σ_{crs} (MPa)	σ_{crf} (MPa)	C_M (MPa/°C)	C_A (MPa/°C)	
100.00	170.00	8.00	13.80	

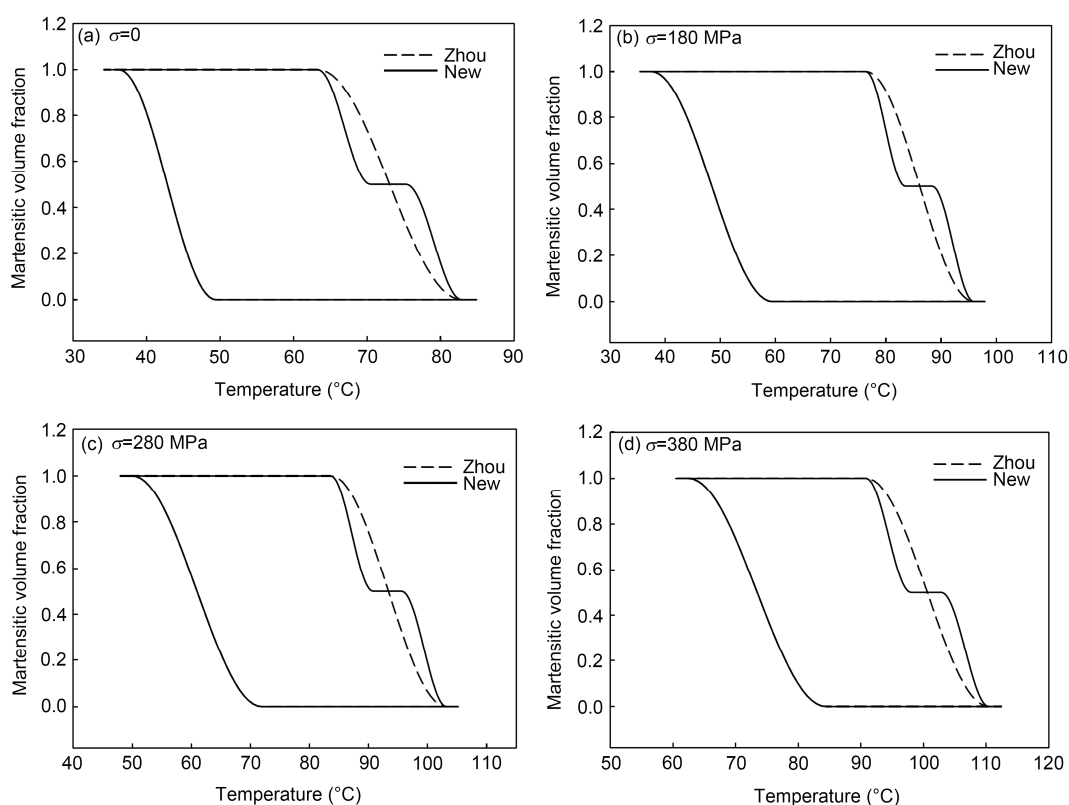


图 1 SMA 的马氏体体积分数-温度曲线

Figure 1 Curves of martensitic volume fraction versus temperature of SMA.

描述的, SMA 在不同常应力下的马氏体体积分数和温度间关系曲线. 图 1(a)为无应力作用下 SMA 的马氏体体积分数和温度间的关系曲线, 在冷却诱发的马氏体相变过程中: 当温度降低到马氏体开始温度时, SMA 开始由奥氏体向孪晶马氏体转变, 马氏体体积分数由 0 开始逐渐增加; 当温度降低到马氏体结束温度时, SMA 全部转变为孪晶马氏体, 马氏体体积分数增加到 1, 马氏体相变结束. 在加热诱发的马氏体逆相变过程中: 当温度升高到奥氏体开始温度, SMA 开始由孪晶马氏体向奥氏体转变, 马氏体体积分数开始由 1 逐渐减小; 当温度升高到奥氏体暂停温度时, 马氏体逆相变暂时停止, 马氏体体积分数暂时保持不变; 当温度升高到奥氏体继续温度时, 马氏体逆相变继续进行, 马氏体体积分数继续减小; 当温度升高到奥氏体结束温度时, SMA 全部转变为奥氏体, 马氏体体积分数减小到 0, 马氏体逆相变结束. 图 1(b), (c)和(d)分别为应力等于 180, 280 和 380 MPa 时 SMA 的马氏体体积分数和温度间的关系曲线, 在

冷却诱发的马氏体相变过程中: 随着温度从马氏体开始温度降低到马氏体结束温度, SMA 逐渐从奥氏体转变为非孪晶马氏体, 马氏体体积分数从 0 逐渐增加到 1. 在加热诱发的马氏体逆相变过程中: 随着温度从奥氏体开始温度升高到奥氏体暂停温度, SMA 逐渐由非孪晶马氏体向奥氏体转变, 马氏体体积分数由 1 逐渐减小; 在温度处于奥氏体暂停温度和奥氏体继续温度之间, 马氏体逆相变暂时停止, 马氏体体积分数暂时保持不变; 随着温度从奥氏体继续温度升高到奥氏体结束温度, 马氏体逆相变继续进行直到结束, 马氏体体积分数继续减小直到 0. 马氏体相变临界温度(马氏体开始温度、马氏体结束温度)和马氏体逆相变临界温度(奥氏体开始温度、奥氏体暂停温度、奥氏体继续温度、奥氏体结束温度)随着应力的增加而升高.

图 1 中线型为虚线的曲线是 Zhou 等人^[11]建立的 SMA 本构模型描述的 SMA 的马氏体体积分数和温度间的关系曲线, 它与本文 SMA 本构模型描述的马

氏体体积分数和温度间的关系曲线的主要区别在加热引起的马氏体逆相变过程. 这是因为 Zhou 等人^[11]建立的 SMA 本构模型不能考虑由于不完全马氏体逆相变引起的 SMA 的温度记忆效应; 而本文 SMA 本构模型考虑了 SMA 的温度记忆效应, 能有效地描述经历不完全马氏体逆相变的 SMA 由于温度改变引起的马氏体相变和马氏体逆相变过程.

图 2 中线型为实线的曲线为本文 SMA 本构模型描述的, SMA 在不同常温度下的形状记忆因子和应力间的关系曲线. 图 2(a)为温度 $T=90^{\circ}\text{C}$ 时的形状记忆因子-应力曲线, 在加载引起的马氏体相变过程中: 当应力升高到马氏体开始应力时, SMA 开始发生由奥氏体向非孪晶马氏体转变的马氏体相变, 形状记忆因子由 0 开始逐渐增加; 当应力升高到马氏体结束应力时, SMA 完全转变为非孪晶马氏体, 形状记忆因子增加到 1, 马氏体相变结束. 在卸载引起的马氏体逆相变过程中: 当应力降低到奥氏体开始应力时, SMA 开始发生由非孪晶马氏体向奥氏体转变的马氏体逆相变, 形状记忆因子开始由 1 逐渐减小; 当应力降低到奥氏体暂停应力时, 马氏体逆相变暂时停止, 形状记忆因子暂时保持不变; 当应力降低到奥氏体继续应力时, 马氏体逆相变继续进行, 形状记忆因子继续减小; 当应力降低到奥氏体结束应力时, SMA 全部转变为奥氏体, 形状记忆因子减小到 0, 马氏体逆相变结束. 图 2(b)为温度 $T=80^{\circ}\text{C}$ 时的形状记忆因子-应力曲线, 在加载引起的马氏体相变过程中: 随着应力从马氏体开始应力升高到马氏体结束应力, 形状记忆因子从 0 逐渐增加到 1. 在卸载引起的马氏体逆相变过程中: 当应力降低到奥氏体开始应力时, SMA 开始发生由非孪晶马氏体向奥氏体转变的马氏体逆相变, 形状记忆因子开始由 1 逐渐减小; 当应力降低到奥氏体暂停应力时, 马氏体逆相变暂时停止, 形状记忆因子暂时保持不变; 当应力降低到奥氏体继续应力时, 马氏体逆相变继续进行, 形状记忆因子继续减小, 卸载后马氏体逆相变停止, 形状记忆因子保持不变. 图 2(c)为温度 $T=75^{\circ}\text{C}$ 时的形状记忆因子-应力曲线, 在加载引起的马氏体相变过程中: 随着应力从马氏体开始应力升高到马氏体结束应力, 形状记忆因子从 0 逐渐增加到 1. 在卸载引起的马氏体逆相变过程中: 当应力降低到奥氏体开始应力时, SMA 开始发生由非孪晶马氏体向奥氏体转变的马氏体逆相变, 形状记忆因子开始由 1 逐渐减小; 当应力降低到奥氏

体暂停应力后, 马氏体逆相变停止, 形状记忆因子保持不变. 图 2(d)为 $T=67^{\circ}\text{C}$ 时的形状记忆因子-应力曲线, 在加载引起的马氏体相变过程中: 随着应力从马氏体开始应力升高到马氏体结束应力, 形状记忆因子从 0 逐渐增加到 1. 在卸载引起的马氏体逆相变过程中: 当应力降低到奥氏体开始应力时, SMA 发生由非孪晶马氏体向奥氏体转变的马氏体逆相变, 形状记忆应变开始由 1 逐渐减小, 卸载后马氏体逆相变停止, 形状记忆因子保持不变. 图 2(e)和(f)分别为温度 $T=60^{\circ}\text{C}$ 和 $T=45^{\circ}\text{C}$ 时 SMA 的形状记忆因子-应力曲线, 在加载引起的马氏体相变过程中: 随着应力从马氏体开始应力升高到马氏体结束应力, 形状记忆因子从 0 逐渐增加到 1. 在卸载过程中: 由于非孪晶马氏体在温度 $T < A_s$ 时是稳定的, 卸载不会引起马氏体逆相变, 形状记忆因子保持不变.

图 2 中线型为虚线的曲线为 Zhou 等人^[11]建立的 SMA 本构模型描述的形状记忆因子和应力间的关系曲线, 它们与本文 SMA 本构模型描述的状记忆因子和应力间的关系曲线的主要区别在卸载引起的马氏体逆相变过程. 这是因为 Zhou 等人^[11]建立的 SMA 本构模型不能考虑由于不完全马氏体逆相变引起的 SMA 的温度记忆效应; 而本文建立的 SMA 本构模型考虑了 SMA 的温度记忆效应, 能有效描述经历不完全马氏体逆相变的 SMA 由于应力变化诱发的马氏体相变和马氏体逆相变过程.

图 3(a)中线型为实线的曲线是本文 SMA 本构模型描述的, 单向应力状态下初始状态为奥氏体的 SMA, 在温度区间 $T > A_f$ 内的温度 $T=90^{\circ}\text{C}$ 时的应力-应变曲线. 在加载过程中: SMA 首先表现为线弹性行为; 当应力升高到马氏体开始应力 424.24 MPa 时, SMA 开始发生由奥氏体向非孪晶马氏体转变的马氏体相变, 形状记忆应变逐渐产生; 当应力升高到马氏体结束应力 494.24 MPa 时, SMA 完全转变为非孪晶马氏体, 形状记忆应变达到最大值, 马氏体相变结束; 当应力高于马氏体结束应力时, SMA 又表现为线弹性行为. 在卸载过程中: SMA 首先表现为线弹性行为; 当应力降低到奥氏体开始应力 368.74 MPa 时, SMA 开始发生由非孪晶马氏体向奥氏体转变的马氏体逆相变, 形状记忆应变开始逐渐恢复; 当应力降低到奥氏体暂停应力 269.10 MPa 时, 马氏体逆相变暂时停止, 形状记忆应变暂时保持不变, SMA 暂时表现为线弹性行为; 当应力降低到奥氏体继续应力 202.86 MPa 时,

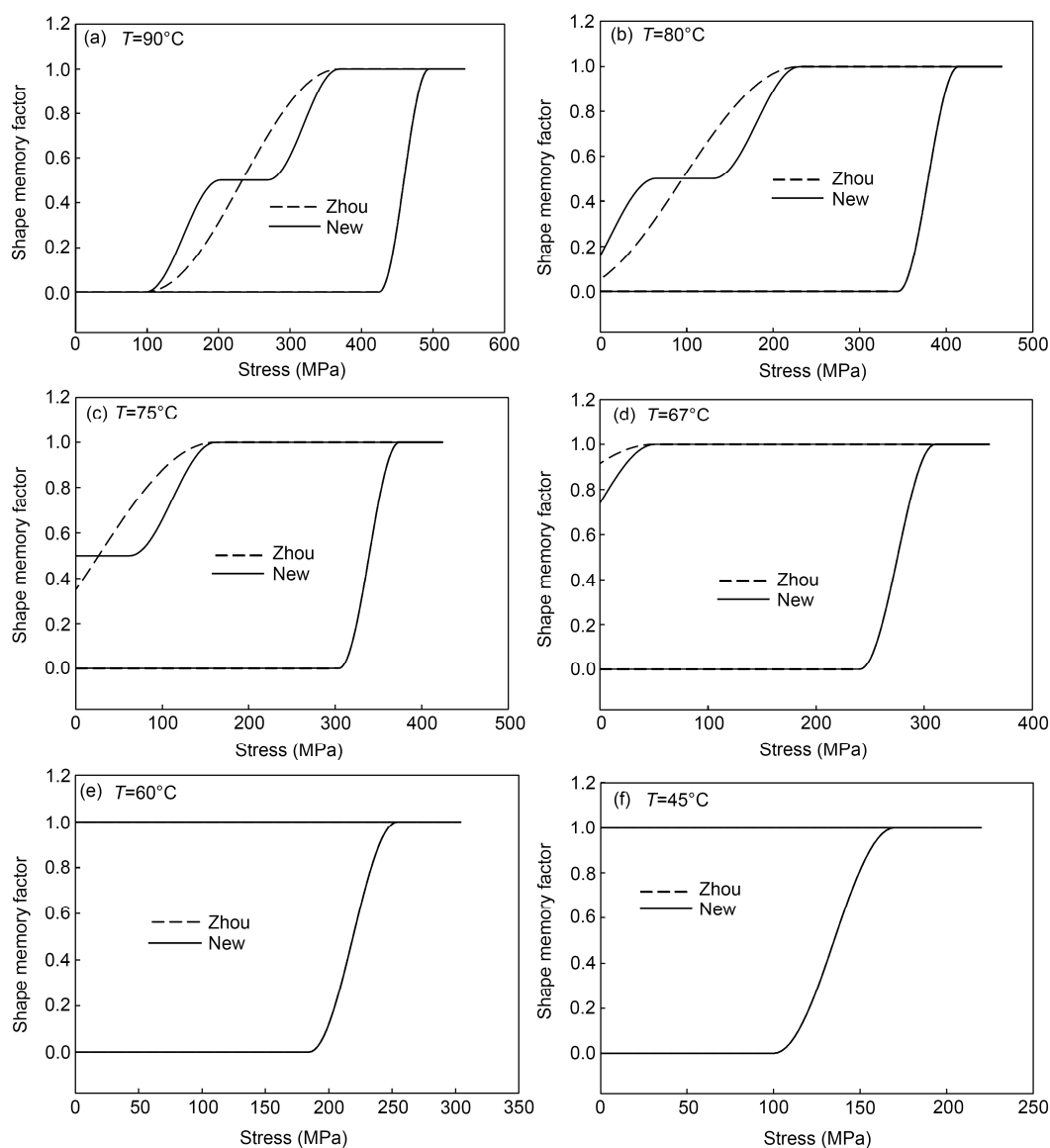


图 2 SMA 的形状记忆因子-应力曲线

Figure 2 Curves of shape memory factor versus stress of SMA.

马氏体逆相变继续进行, 形状记忆应变继续恢复; 当应力降低到奥氏体结束应力 97.84 MPa 时, SMA 全部转变为奥氏体, 形状记忆应变完全恢复, 马氏体逆相变结束; 当应力低于奥氏体结束应力时, SMA 又表现为线弹性行为. 卸载后 SMA 无残余应变, 表现为超弹性.

图 3(b)中线型为实线的曲线是本文 SMA 本构模型描述的, 单向应力状态下初始状态为奥氏体的 SMA, 在温度区间 $T_{s2} < T < A_f$ 内的温度 $T=80^\circ\text{C}$ 时的应力-应变曲线. 在加载过程中: 马氏体开始应力为

344.24 MPa, 马氏体结束应力为 414.24 MPa. 在卸载过程中: SMA 首先表现为线弹性行为; 当应力降低到奥氏体开始应力 230.74 MPa 时, SMA 开始发生由非孪晶马氏体向奥氏体转变的马氏体逆相变, 形状记忆应变开始逐渐恢复; 当应力降低到奥氏体暂停应力 131.10 MPa 时, 马氏体逆相变暂时停止, 形状记忆应变暂时保持不变, SMA 暂时表现为线弹性行为; 当应力降低到奥氏体继续应力 64.86 MPa 时, 马氏体逆相变又继续进行, 形状记忆应变继续恢复. 卸载后马氏体逆相变停止, SMA 转变为奥氏体和非孪晶马

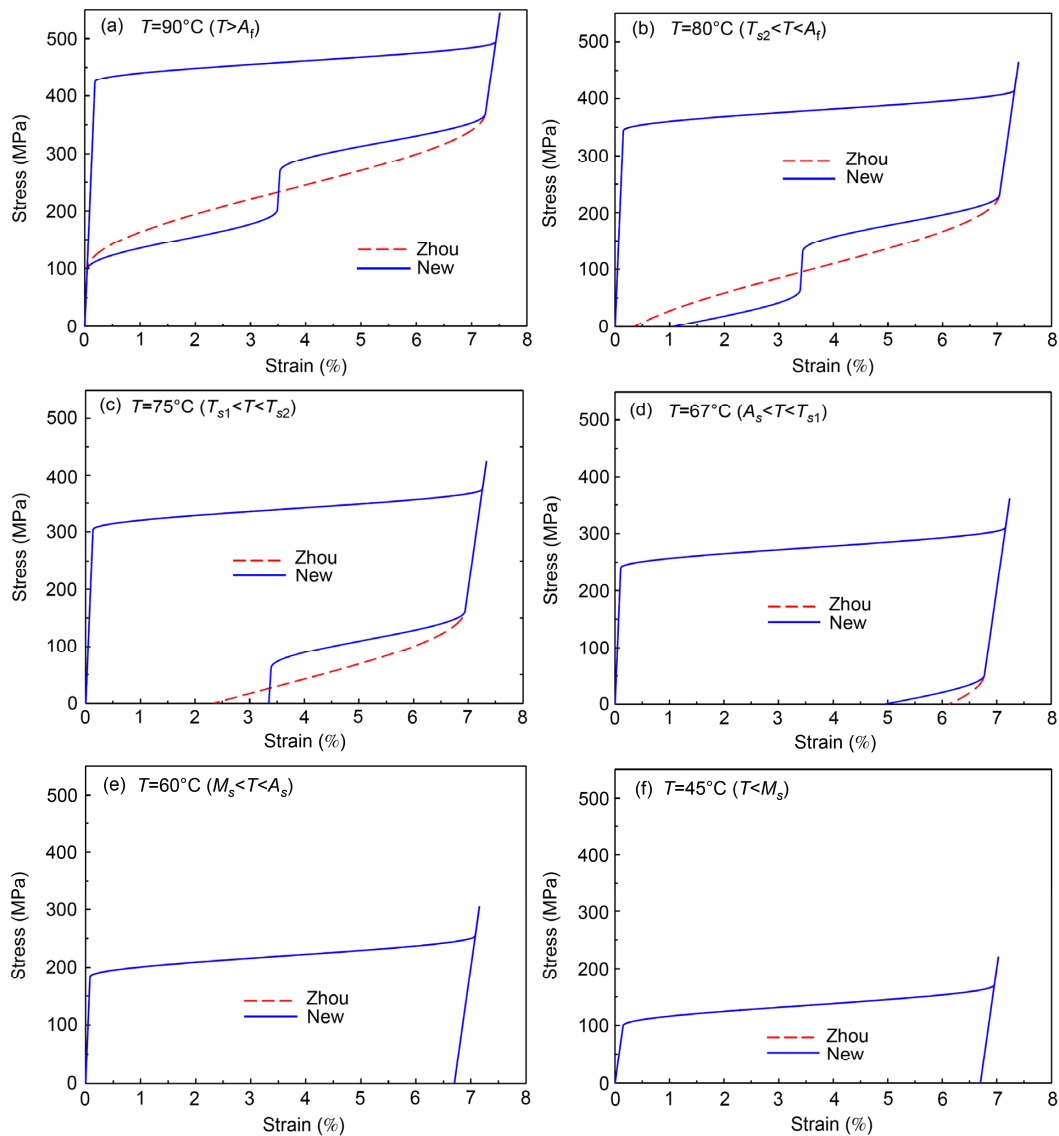


图 3 (网络版彩图)不同温度下 SMA 的应力-应变曲线

Figure 3 (Color online) Curves of stress versus strain of SMA at various temperatures.

氏体的混合体, 部分形状记忆应变转变为残余应变.

图 3(c)中线型为实线的曲线是本文 SMA 本构模型描述的, 单向应力状态下初始状态为奥氏体的 SMA, 在温度区间 $T_{s1} < T < T_{s2}$ 内的温度 $T=75^\circ\text{C}$ 时的应力-应变曲线. 在加载过程中: 马氏体开始应力为 304.24 MPa, 马氏体结束应力为 374.24 MPa. 在卸载过程中: SMA 首先表现为线弹性行为; 当应力降低到奥氏体开始应力 161.74 MPa 时, SMA 开始发生由非孪晶马氏体向奥氏体转变的马氏体逆相变, 形状记忆应变开始逐渐恢复; 当应力降低到奥氏体暂停应

力 62.10 MPa 后, 马氏体逆相变停止, SMA 又表现为线弹性行为. 卸载后 SMA 变为奥氏体和非孪晶马氏体的混合体, 部分形状记忆应变转变为残余应变.

图 3(d)中线型为实线的曲线是本文 SMA 本构模型描述的, 单向应力状态下初始状态为奥氏体的 SMA, 在温度区间 $A_s < T < T_{s1}$ 内的温度 $T=67^\circ\text{C}$ 时的应力-应变曲线. 在加载过程中: 马氏体开始应力为 240.24 MPa, 马氏体结束应力为 310.24 MPa. 在卸载过程中: SMA 首先表现为线弹性; 当应力降低到奥氏体开始应力 51.34 MPa 时, SMA 发生由非孪晶马氏体

向奥氏体转变的马氏体逆相变, 形状记忆应变开始逐渐恢复. 卸载后马氏体逆相变停止, SMA 变为奥氏体和非孪晶马氏体的混合体, 部分形状记忆应变转变为残余应变.

图 3(e)中线型为实线的曲线是本文 SMA 本构模型描述的, 单向应力状态下初始状态为奥氏体的 SMA, 在温度区间 $M_s < T < A_s$ 内的温度 $T=60^\circ\text{C}$ 时的应力-应变曲线. 在加载过程中: 马氏体开始应力为 184.24 MPa, 马氏体结束应力为 254.24 MPa. 在卸载过程中: 由于非孪晶马氏体在温度 $T < A_s$ 时是稳定的, 卸载不会引起马氏体逆相变, SMA 表现为线弹性行为. 卸载后形状记忆应变全部转变为残余应变, 通过加热残余应变可完全恢复, SMA 表现为形状记忆效应.

图 3(f)中线型为实线的曲线是本文 SMA 本构模型描述的, 单向应力状态下初始状态为孪晶马氏体的 SMA, 在温度区间 $T < M_s$ 内的温度 $T=45^\circ\text{C}$ 时的应力-应变曲线. 在加载过程中: 与前面应力-应变曲线不同的是, 随着应力从马氏体开始应力 100 MPa 升高到马氏体结束应力 170 MPa, SMA 完成由孪晶马氏体向非孪晶马氏体转变的马氏体相变. 在卸载过程中: SMA 不发生马氏体逆相变, 表现为线弹性行为. 卸载后形状记忆应变全部转变为残余应变, 通过加热残余应变可完全恢复, SMA 表现为形状记忆效应.

图 3 中线型为虚线的各曲线为 Zhou 等人^[11]建立的 SMA 本构模型描述的 SMA 在不同常温度下的应力-应变曲线, 它们与本文 SMA 本构模型描述的 SMA 在不同常温度下的应力-应变曲线的主要区别在卸载引起的马氏体逆相变过程. 这是因为 Zhou 等人^[11]建立的 SMA 本构模型不能考虑由于不完全马氏体逆相变引起的 SMA 的温度记忆效应; 而本文建立的 SMA 本构模型考虑了 SMA 的温度记忆效应, 能有效地描述经历不完全马氏体逆相变的 SMA 的热力学行为.

图 4 为本文所建立的形状记忆方程与 Zhou 和 Yoon^[17]建立的 SMA 马氏体相变模型分别描述的无应力状态下 SMA 在马氏体逆相变过程中马氏体体积分数和温度间的关系曲线、以及郑雁军和崔立山^[12]的实验结果曲线, 其中奥氏体开始温度 $A_s=325.5\text{ K}$ 、奥氏体结束温度 $A_f=343.3\text{ K}$ 、奥氏体暂停温度 $T_{s1}=333.9\text{ K}$ 、奥氏体继续温度 $T_{s2}=337.2\text{ K}$. 图 4 中线型为实线的曲

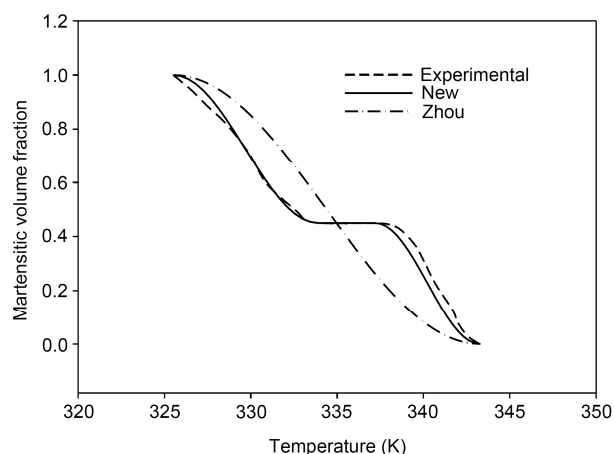


图 4 SMA 在马氏体逆相变过程中马氏体体积分-温度曲线

Figure 4 Curves of martensitic volume fraction versus temperature of SMA during inverse phase transformation.

线为本文形状记忆方程描述的曲线, 线型为虚线的曲线为郑雁军和崔立山^[12]的实验结果曲线, 线型为点划线的曲线为 Zhou 和 Yoon^[17]建立的 SMA 马氏体相变模型所描述的曲线; 比较这三条曲线可以见, 本文所建立的形状记忆方程描述的马氏体体积分数和温度间的关系曲线和实验结果曲线吻合得较好, 克服了 Zhou 和 Yoon^[17]建立的 SMA 马氏体相变模型不能描述 SMA 温度记忆效应的局限性.

5 结论

基于 SMA 相变自由能和马氏体体积分数的微分关系和对 DSC 实验测定的热流-温度曲线的近似描述, 建立了描述复杂应力状态下 SMA 的马氏体体积分、形状记忆因子、应力、温度间关系的形状记忆方程. 利用热力学和连续介质力学, 以形状记忆因子作为内变量, 建立了描述复杂应力状态下 SMA 的应变、应力、温度间关系的三维宏观力学本构方程. 数值模拟结果表明, 本文建立的由形状记忆方程和力学本构方程构成的 SMA 本构模型, 克服了现存 SMA 本构模型不能考虑由于不完全马氏体逆相变引起的温度记忆效应的局限性, 能有效地描述经历一次不完全马氏体逆相变的 SMA 的热力学行为, 可为 SMA 温度记忆效应的应用研究提供理论基础.

参考文献

- 1 Tanaka K. A thermomechanical sketch of shape memory effects: One-dimension tensile behavior. *Res Mech*, 1986, 18: 251–253
- 2 Liang C, Rogers C A. One-dimensional thermomechanical constitutive relations for shape memory materials. *J Intell Mater Syst Struct*, 1990, 1: 207–234
- 3 Brinson L C. One-dimension constitutive behavior of shape memory alloys: Thermomechanical derivation with non-constant material functions and martensite internal variable. *J Intell Mater Syst Struct*, 1993, 4: 229–242
- 4 Sun Q P, Hwang K C. Micromechanics modeling for the constitutive behaviors of polycrystalline shape memory alloys. *J Mech Phys Solids*, 1993, 41: 1–33
- 5 Boyd J G, Lagoudas D C. Thermomechanical response of shape memory composites. *J Intell Mater Syst Struct*, 1994, 5: 333–346
- 6 Peng X, Yang Y, Huang S. A Comprehensive description for shape memory alloys with a two-phase constitutive model. *Int J Solids Struct*, 2001, 38: 6925–6940
- 7 Brocca M, Brinson L C, Bazant Z P. Three-dimension constitutive model for shape memory alloys based on microplane model. *J Mech Phys Solids*, 2002, 50: 1051–1077
- 8 Guo Y B, Liu F P, Zai X Y, et al. Dynamic pseudoelastic behavior of TiNi alloys and a strain rate dependent phase transition constitutive model (in Chinese). *Explosion Shock Waves*, 2003, 23(2): 105–110 [郭扬波, 刘方平, 载翔宇, 等. TiNi 合金的动态伪弹性行为和率相关相变本构模型. *爆炸与冲击*, 2003, 23(2): 105–110]
- 9 Li H T, Peng X H, Huang S Q. A conventional plasticity based two- phase constitutive model for shape memory alloys (in Chinese). *Acta Solida Mech Sin*, 2004, 25(1): 58–62 [李海涛, 彭向和, 黄尚廉. 形状记忆合金的一种基于经典塑性理论的两相混合本构模型. *固体力学学报*, 2004, 25(1): 58–62]
- 10 Zhou B, Wang Z Q, Liang W Y. Micromechanical constitutive model of shape memory alloys (in Chinese). *Acta Metall Sin*, 2009, 42(9): 919–924 [周 博, 王振清, 梁文彦. 形状记忆合金的细观力学本构模型. *金属学报*, 2009, 42(9): 919–924]
- 11 Zhou B, Liu Y, Leng J, et al. A macro-mechanical constitutive model of shape memory alloys. *Sci China Ser G-Phys Mech Astron*, 2009, 52(9): 1382–1391
- 12 Zhen Y J, Cui L S. Temperature memory effect of partial transformation in TiNi alloys (in Chinese). *Acta Metall Sin*, 2004, 40(9): 915–919 [郑雁军, 崔立山. TiNi 合金不完全相变的温度记忆效应. *金属学报*, 2004, 40(9): 915–919]
- 13 Zheng Y J, Cui L S, Schrooten J. Temperature memory effect of a nickel–titanium shape memory alloy. *Appl Phys Lett*, 2004, 84: 31–34
- 14 Wang Z G, Zu X T, Fu Y Q, et al. Temperature memory effect in NiTi-based memory alloys. *Thermochimica Acta*, 2005, 428: 199–205
- 15 He X M, Zhang R F, Xiang J H, et al. Temperature memory effect of Ti-Ni-Cu shape memory alloy (in Chinese). *Chin J Nonferrous Metals*, 2005, 15(11): 1750–1754 [何向明, 张荣发, 向军淮, 等. Ti-Ni-Cu 形状记忆合金的温度记忆效应. *中国有色金属学报*, 2005, 15(11): 1750–1754]
- 16 Yu H J, Feng X D, Wang Z G, et al. Study of temperature memory effect in TiNi-based shape memory alloys thin films (in Chinese). *J Univ Electronic Sci Tech China*, 2008, 37(1): 128–130 [余华军, 封向东, 王治国, 等. TiNi 和 TiNiCu 记忆合金薄膜的温度记忆效应研究. *电子科技大学学报*, 2008, 37(1): 128–130]
- 17 Zhou B, Yoon S H. Study on phase transformation constitutive behaviors of shape memory alloy. *Key Eng Mater*, 2006, 324-325: 335–338

A constitutive model of shape memory alloy with temperature memory effect

ZHOU Bo^{1*} & ZHAO ShiCheng²

¹ College of Pipeline and Civil Engineering, China University of Petroleum (East China), Qingdao 266555, China;

² College of Aerospace and Civil Engineering, Harbin Engineering University, Harbin 150001, China

Temperature memory effect occurring in some shape memory alloys has potential values in various fields such as smart materials and structures, and so on. It is of theoretical and practical interests to develop a new constitutive model of shape memory alloy to overcome the limitation that the previous constitutive models of shape memory alloy failed to express the temperature memory effect of shape memory alloy. This paper focuses on the foregoing issue based on the previous work of the authors. A new shape memory equation is developed to describe the relationship of shape memory factor, stress and temperature in shape memory alloy using the differential relationship of phase transformation free energy and martensitic volume fraction and the concept of shape memory factor defined by the author of this paper. A new mechanical constitutive equation is developed to predict the relationship of strain, stress and temperature in shape memory alloy based on the thermodynamics and continuum medium mechanics. The supposed constitutive model of shape memory alloy, which includes the new shape memory equation and new mechanical constitutive equation, is able to overcome the limitation that previous constitutive models of shape memory alloy failed to express the temperature memory effect of shape memory alloy. This work can provide a theoretical basis for the practical applications of temperature memory effect of shape memory alloy in various fields.

shape memory alloy, temperature memory effect, shape memory equation, mechanical constitutive equation

PACS: 46.05.+b, 64.70.kb

doi: 10.1360/132011-495