

## 物理张量及其分量矩阵

李传起

(南京气象学院基础科学系, 南京 210044)

**摘 要** 根据物理张量逆变和协变的性质, 对张量角标位置的物理意义作了统一规定, 给出了分量矩阵的具体形式, 从而使得矩阵的运算性质能完全适用于张量运算, 为定量讨论物理张量提供了可靠的数学依据。

**关键词** 张量, 逆变, 协变, 度规, 内积, 外积

**分类号** O412. 3

张量及张量方程是表达相对论物理量及物理规律的数学语言。但由于目前有关相对论的研究主要讨论物理规律(张量方程), 很少涉及方程的解, 进行分量的运算, 使得分量矩阵没有受到应有的重视。已出版的有关相对论的书籍对张量及其运算规则的描述十分抽象, 张量指标的位置与其分量矩阵的对应关系亦缺乏统一, 使得初学相对论时难以正确领会物理张量的意义, 掌握其具体计算。张量具体运算的唯一途径是通过分量矩阵的运算。因此, 笔者拟在本文用矩阵赋予张量及其运算的严格统一的规则。

### 1 矢量的逆变分量和协变分量

文献[1]关于逆变和协变的定义为: 在  $n$  维欧几里德空间中的矢量, 凡在坐标变换时满足

$$A^\alpha = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^i} A^i \quad (1)$$

的矢量称为逆变矢量; 凡满足

$$A_\alpha = \frac{\partial x^i}{\partial x^\alpha} A_i \quad (2)$$

的矢量称为协变矢量。文献[2]和文献[3]则是由坐标微分引入逆变矢量, 由标量函数的梯度引入协变矢量。这些定义均没有直接反映逆变分量和协变分量的区别与联系, 初学者甚至弄不清为什么要有逆变和协变之分。笔者从相对论的最基本原理——间隔不变来解释逆变和协变的意义。

在 Minkowski 空间里, 取定坐标系  $K$ , 则空间内两邻近点的空间间隔矢量可表示为

$$ds = (dx, dy, dz, dt) \quad (c = 1)$$

另有一坐标系  $K'$  以速度  $\beta$  相对  $K$  系沿  $x$  轴运动, 在  $K'$  系中, 间隔矢量为

$$ds' = (dx', dy', dz', dt') \quad (c = 1)$$

两矢量对自身的点积分别为

$$\begin{aligned} ds^2 &= dx^2 + dy^2 + dz^2 + dt^2; \\ ds^3 &= dx^3 + dy^3 + dz^3 + dt^3. \end{aligned}$$

由 Lorentz 变换知

$$\begin{aligned} ds^2 &= \frac{(dx - \beta dt)^2}{1 - \beta^2} + dy^2 + dz^2 + \frac{(dt - \beta dx)^2}{1 - \beta^2} \\ &= \frac{1 + \beta^2}{1 - \beta^2}(dx^2 + dt^2) - \frac{2\beta}{1 - \beta^2}dx dt + dy^2 + dz^2 \end{aligned}$$

显然有

$$ds^3 \neq ds^2$$

为解释这一矛盾, 一般采用  $it$  ( $i = \sqrt{-1}$ ) 替换  $t$ , 从而保证  $ds^2 = ds^2$ 。不加说明地进行替换, 会使人误以为闵氏空间的时间  $t$  的物理意义发生了变化, 不具有客观实在性了。其实并非如此, 实际上, 四维间隔  $ds^2$  并不能写成矢量对自身的点积, 而应写成空间矢的逆变分量与协变分量的积。即

$$ds^2 = dA^i dA_i \quad (A = x, y, z, t) \quad (3)$$

定义 1 在  $n$  维矢量空间中, 矢量在给定坐标系  $K$  的坐标线上的投影构成该矢量的逆变分量, 用上指标表示, 其分量矩阵为单行矩阵。同一矢量在  $K$  系的倒逆系  $K^{-1}$  的坐标线上的投影构成该矢量的协变分量, 用下指标表示, 其矢量矩阵为单列矩阵。其中倒逆系  $K^{-1}$  是以原系  $K$  的基底的倒逆基为基底构成的坐标系。这样, 根据线性代数的常识, 有

$$A_i = A^j g^{-1}_{ji}; \quad A^i = g^i_j A_j \quad (4)$$

其中  $g$  是原坐标系到其倒逆系的过渡矩阵, 称为度规张量。对于任一确定的坐标系, 过渡矩阵是唯一确定的。因此, 同一矢量的逆变分量与协变分量存在一一对应的关系。由于欧氏空间的三维笛氏坐标系的倒逆系就是其自身, 从而有  $g = E$  (单位矩阵)。只有在这种情况下, 逆变分量和对应的协变分量的值才相等, 但其矩阵表达式仍是不同的。定义 1 在本质上是和 (1)、(2) 式一致的。

现在回到上文中的间隔问题。根据光速不变原理, 矢量组  $a_1 = (1, 0, 0, 0), a_2 = (0, 1, 0, 0), a_3 = (0, 0, 1, 0), a_4 = (0, 0, 0, i)$  ( $i = \sqrt{-1}$ ) 构成平坦闵氏空间的一个基底。在这个基底上建立坐标系  $K$ , 容易求出倒逆系  $K^{-1}$  的基底为  $b_1 = (1, 0, 0, 0), b_2 = (0, 1, 0, 0), b_3 = (0, 0, 1, 0), b_4 = (0, 0, 0, i)$ 。这样, 从原系到倒逆系的过渡矩阵为

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (5)$$

据定义 1, 对于  $K$  系

$$\begin{aligned} dA^i &= (dx, dy, dz, dt) \\ dA_i &= (dx, dy, dz, -dt) \end{aligned}$$

对于  $K$  系

$$\begin{aligned} dA^i &= (dx', dy', dz', dt') \\ dA_i &= (dx', dy', dz', -dt') \end{aligned}$$

从而

$$ds^2 = [dx \ dy \ dz \ dt] \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \\ -dt \end{pmatrix} = dx^2 + dy^2 + dz^2 - dt^2$$

$$ds'^2 = [dx' \ dy' \ dz' \ dt'] \begin{pmatrix} dx' \\ dy' \\ dz' \\ -dt' \end{pmatrix} = dx'^2 + dy'^2 + dz'^2 - dt'^2$$

由洛氏变换立即得到  $ds'^2 = ds^2$ , 即四维间隔是不变量。尽管读者对上述内容十分熟悉, 但这里要强调的是逆变和协变之分对于相对论物理的重要意义。一些书籍上出现  $A^u{}_u, B_{uu}$  等写法是不妥的。因为按照爱因斯坦约定, 重复指标自动求和。而下文会说明不能就两个逆变(或协变)指标求内积, 也就谈不上求和。

## 2 高阶张量的分量矩阵

如果说在欧氏空间里矢量(一阶张量)之间的运算可看成对应分量的运算, 尚看不出区分逆变指标和协变指标的重要性。那么进入广义相对论领域后, 物理张量的阶数可以是二阶、三阶, 甚至更高, 求积的两张量的分量之间没有一一对应的关系。这时必须严格区分逆变与协变, 才能避免概念上的混淆和计算上的错误。文献[1]指出, 二阶张量可用方阵表示, 其实不然。例如, 二阶协变张量  $A_{\alpha\beta}$  对协变矢量  $B_\gamma$  的外积  $A_{\alpha\beta}B_\gamma = C_{\alpha\beta\gamma}$  显然是一个三阶协变张量, 如将  $A_{\alpha\beta}$  表示为方阵, 通过分量矩阵的运算必然得到一阶协变张量。事实上, 能用方阵表示的仅是二阶混变张量

$$A_k^j = \begin{pmatrix} A_1^1 & A_1^2 & \cdots & A_1^n \\ A_2^1 & A_2^2 & \cdots & A_2^n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_n^1 & A_n^2 & \cdots & A_n^n \end{pmatrix} \quad (6)$$

定义 2  $n$  维  $r$  阶逆变张量的分量(全是逆变的)矩阵为单行矩阵, 其列数为  $n^r$  ( $r$  为指数)。  
 $n$  维  $s$  阶协变张量的分量(全是协变的)矩阵为单列矩阵, 其行数为  $n^s$  ( $s$  为指数)。

如二阶逆变张量的分量矩阵为

$$A^j_i = \left( A^{11} \ A^{12} \ \cdots \ A^{1n} \ A^{21} \ \cdots \ A^{2n} \ \cdots \ \cdots \ A^{n1} \ \cdots \ A^{nn} \right) \quad (7)$$

定义 2'  $n$  维空间中, 高阶张量的分量有的满足逆变规则, 有的满足协变规则, 这样的张量叫混变张量。 $(r+s)$  阶混变张量(其中  $r$  为逆变阶数,  $s$  为协变阶数)的分量矩阵为  $n^s$  行,  $n^r$  列的矩阵。

如  $(2+1)$  阶混变张量的分量矩阵

$$A^{ij}_k = \begin{pmatrix} A^{11}_1 & A^{12}_1 & \cdots & A^{1n}_1 & A^{21}_1 & \cdots & A^{2n}_1 & \cdots & \cdots & A^{n1}_1 & \cdots & A^{nn}_1 \\ A^{11}_2 & A^{12}_2 & \cdots & A^{1n}_2 & A^{21}_2 & \cdots & A^{2n}_2 & \cdots & \cdots & A^{n1}_2 & \cdots & A^{nn}_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A^{11}_n & A^{12}_n & \cdots & A^{1n}_n & A^{21}_n & \cdots & A^{2n}_n & \cdots & \cdots & A^{n1}_n & \cdots & A^{nn}_n \end{pmatrix} \quad (8)$$

定义 2 及 2' 赋予高阶张量鲜明的直观性。由定义 2 可见, 在  $n$  维空间中, 同阶张量仅仅是分量的个数相等, 它们的矩阵形式并不一致。用矩阵将张量的分量明确地表示出来, 才能将张量运

算转化为矩阵运算。Kronecker 张量  $\delta$  和度规张量  $g$  亦有逆变、混变和协变三种形式。如果对  $\delta$  张量的三种形式  $\delta^\mu{}_\nu$ 、 $\delta^\mu{}_\nu$ 、 $\delta_{\mu\nu}$  不加区分, 拿来使用, 以  $\delta_{\mu\nu} = \begin{cases} 1 & \text{当 } \mu = \nu \text{ 时} \\ 0 & \text{当 } \mu \neq \nu \text{ 时} \end{cases}$  统一称呼, 则会引起运算上的错误。其实三者的作用完全不同, 逆变形式  $\delta^{\mu\nu}$  表示两逆变变量的正交性

$$\delta^{\mu\nu} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{n\uparrow} \underbrace{\quad}_{n\uparrow} \quad (9)$$

混变形式  $\delta^\mu{}_\nu$  表示逆变矢量与另一协变矢量的正交性

$$\delta^\mu{}_\nu = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \text{-----} \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \quad (10)$$

而协变形式  $\delta_{\mu\nu}$  则表示两协变变量的正交性, 其形式为  $\delta^{\mu\nu}$  的转置。

度规张量的逆变形式为  $g^{\mu\nu}$

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} g^{11} & g^{12} & \cdots & g^{1n} & g^{21} & \cdots & g^{2n} & \cdots & \cdots & g^{nn} \end{pmatrix} \quad (11)$$

它与张量相互作用, 可实现张量指标的上升。协变度规张量  $g_{\mu\nu}$  的分量矩阵为  $g^{\mu\nu}$  的转置, 可以用来实现指标的下降。而混变度规张量

$$g^\mu{}_\nu = \begin{bmatrix} g^1_1 & g^2_1 & \cdots & g^n_1 \\ g^1_2 & g^2_2 & \cdots & g^n_2 \\ \text{-----} \\ g^1_n & g^2_n & \cdots & g^n_n \end{bmatrix} \quad (12)$$

实现物理张量的逆变与协变指标的互换。很明显, 三种形式不加区分, 则指标升降的过程就不能通过矩阵运算来实现。

### 3 张量指标的升降、外积、内积

#### 3.1 矩阵的广义积

初等矩阵求积必须满足左乘矩阵的列数等于右乘矩阵的行数。在广义相对论中, 张量的分量矩阵有时不满足此条件。这时, 可将矩阵求积稍加延拓。

(1) 当单行  $n^r$  列矩阵左乘  $n^s$  行  $m$  列矩阵时, 可将  $n^r$  列(或  $n^s$  行)划分为  $n^{r-s}$ (或  $n^{s-r}$ ) 块, 然后分块相乘, 得结果按原顺序排列起来。

(2) 当单列  $n^r$  行矩阵右乘  $n^s$  列  $m$  行矩阵时, 作同样的处理。

后面会看到, 在物理张量的运算中, 只会出现以上两种超出初等矩阵运算范围的情况, 且  $r, s$  只取 1、2 两个值。例如

$$\begin{aligned} g^{ij} &= \begin{pmatrix} g^{11} & \cdots & g^{1n} & g^{21} & \cdots & g^{2n} & \cdots & \cdots & g^{n1} & \cdots & g^{nn} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} A^1_1 & A^2_1 & \cdots & A^n_1 \\ A^1_2 & A^2_2 & \cdots & A^n_2 \\ \text{-----} \\ A^1_n & A^2_n & \cdots & A^n_n \end{bmatrix} \\ &= \left( \begin{bmatrix} g^{11} \cdots g^{1n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A^1_1 \\ A^1_2 \\ \vdots \\ A^1_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g^{21} \cdots g^{2n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A^2_1 \\ A^2_2 \\ \vdots \\ A^2_n \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} g^{n1} \cdots g^{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A^n_1 \\ A^n_2 \\ \vdots \\ A^n_n \end{bmatrix} \right) \end{aligned} \quad (13)$$

#### 3.2 张量指标的升降

张量指标的升降指张量的逆变和协变性质的互换, 对应于分量矩阵的行列之间的转换。在

第 2 节中已经说过度规张量的参与可实现这一操作。用逆变度规左乘实现指标的上升

$$T^{\mu} = g^{\mu\nu} T_{\nu}; \quad T^{\mu\nu} = g^{\mu\alpha} T^{\nu}_{\alpha} \quad (14)$$

用协变度规右乘实现指标的下降

$$T_{\mu} = T^{\nu} g_{\mu\nu}; \quad T_{\mu\nu} = T^{\alpha}_{\mu} g_{\alpha\nu} \quad (15)$$

文献[4]关于指标的升降一律用度规张量左乘被操作张量,是不严格的。以下谈内积时会说明这一点。张量经过指标升降的操作后,性质量值都发生了变化。因此,必须同时施行反向的升降以使张量的性质量值不变。一般有

$$g^{\mu\nu} g_{\nu\lambda} = \delta^{\mu}_{\lambda} = E \quad (\det|g| \neq 0) \quad (16)$$

由上式可知,张量指标经一次上升,一次下降的操作后,保持原有的性质和量值

$$g^{\mu\nu} T g_{\mu\nu} = T \quad (17)$$

### 3.3 张量的外积和内积

文献[1]中定义两张量的外积为各分量积的集合

$$A^i_j B^m_{kl} = C^m_{jkl}{}^i$$

很明显,上式左端两张量的分量矩阵不满足矩阵运算规则。退一步讲,即使张量的分量矩阵可以相乘,乘的结果恐怕也难以反映右端张量的性质,连阶数都发生了变化。

定义 3 两张量外积的分量矩阵等于协变张量的矩阵(列阵)左乘逆变张量的矩阵(行阵)

$$C^{i_1 i_2 \dots i_p}_{j_1 j_2 \dots j_q} = A_{j_1 j_2 \dots j_q} B^{i_1 i_2 \dots i_p} \quad (18)$$

若参与外积运算的张量有混变张量,则需要利用(14)、(15)式进行指标的升降转换为逆变形式或协变形式。

定义 4 两张量的内积必须就一个张量的指定上标和另一张量的指定下标求出,指定上标和下标的个数必须相等;必须通过指标的升降使得指定上标的张量的上标只含指定上标,指定下标的张量的下标只含指定下标;必须用指定上标的张量左乘指定下标的张量。

$$C^{i_1 i_2 \dots i_p}_{j_1 j_2 \dots j_q} = A^{i_1 i_2 \dots i_p}_{j_1 j_2 \dots j_q} B^{i_1 i_2 \dots i_p}_{j_1 j_2 \dots j_q} \quad (19)$$

(19)式是就指标  $l, k$  求内积的结果。

由(19)式可知,指标升降的过程本身就是度规张量与被操作张量就相同指标求内积(爱因斯坦约定)。因此,指标上升(或下降)的操作必须以度规张量左乘(或右乘)。

按照定义 4,求内积的两张量必须满足(19)式右端的形式。在指标升降过程中,会遇到对度规张量自身指标的升降问题,这时会出现指标升降的循环。此时应根据(13)式求矩阵的广义积来完成运算。

物理张量的运算无非是求内积和外积。张量场的散度是坐标微商算子矢量与张量的内积;梯度则是坐标微商算子矢量与张量的外积。必须注意,微商算子矢量  $\frac{\partial}{\partial x^i}$ ,虽然指标是上指标,但  $x^i$  出现在分母上,使得  $\frac{\partial}{\partial x^i}$  是协变矢量。同理,  $\frac{\partial}{\partial x_i}$  是逆变矢量。在(18)、(19)式定义的内积、外积运算中,已经考虑了矩阵的乘法规则,因此,张量在求积过程中满足结合律和交换律。例如四维电磁场张量的协变散度为(高斯制)

$$\nabla_{\mu} F^{\mu\nu} = \frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x^{\mu}} = F^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} = \begin{pmatrix} 0 & H_z & -H_y & -E_x \\ -H_z & 0 & H_x & -E_y \\ H_y & -H_x & 0 & -E_z \\ E_x & E_y & E_z & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial t} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \partial H_z / \partial y - \partial H_y / \partial z - \partial E_x / \partial t \\ - \partial H_z / \partial x + \partial H_x / \partial z - \partial E_y / \partial t \\ \partial H_y / \partial x - \partial H_x / \partial y - \partial E_z / \partial t \\ \partial E_x / \partial x + \partial E_x / \partial y + \partial E_z / \partial t \end{pmatrix} \quad (\text{其中 } c = 1) \quad (20)$$

由上式立即可看出, 电磁张量的协变散度为协变矢量。很明显, 该矢量对自身的点积不能构成不变量。而用逆变微商算子

$$\nabla^i = \left[ \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}, - \frac{\partial}{\partial t} \right]$$

对  $F^\mu$  求内积得到的逆变散度与协变散度的内积则是闵氏空间的一个不变量。利用 Maxwell 方程可以证明这一点。

根据 1 的内容可知, 对于某空间的任一矢量, 其逆变分量对协变分量的内积必然为该空间的不变量, 即矢量场的任一矢量总是与一个不变量相联系。如闵氏空间中速度矢量与光速不变相联系; 时空矢量与间隔不变相联系; 电流密度矢量与电荷不变量相联系等等。笔者通过对相对论力学、相对论电磁学及广义相对论中诸多张量的反复研究, 认为某空间的任一张量必然与该空间的一个不变量相联系, 张量上下指标全部对换后与原张量的内积构成该空间的一个不变量。限于篇幅, 笔者仅以电磁张量为例来说明这一点。闵氏空间中电磁张量的分量矩阵为

$$F^\mu_\nu = \begin{pmatrix} 0 & H_z & -H_y & -E_x \\ -H_z & 0 & H_x & -E_y \\ H_y & -H_x & 0 & -E_z \\ E_x & E_y & E_z & 0 \end{pmatrix} \quad (21)$$

根据(14)式和(15)式, 利用度规张量的作用使上标下降, 再使下标上升后得到

$$F^\nu_\mu = \begin{pmatrix} 0 & H_z & -H_y & E_x \\ -H_z & 0 & H_x & E_y \\ H_y & -H_x & 0 & E_z \\ -E_x & -E_y & -E_z & 0 \end{pmatrix} \quad (22)$$

(21)式与(22)式分别就指标  $\mu$ 、 $\nu$  求取内积, 则得

$$F^\mu F_\mu = 2(-H_z^2 - H_y^2 - H_x^2 + E_x^2 + E_y^2 + E_z^2) = 2(E^2 - H^2) \quad (23)$$

即与电磁场张量相联系的不变量为  $E^2 - H^2$ 。参考文献[2]曾利用 Maxwell 方程组和 Lorentz 变换式得到这一不变量, 但过程比较复杂。

我们知道, 坐标变换下的不变量在相对论研究中有着重要的意义。而准确地掌握度规, 严格区分逆变和协变, 则可以找到与任一张量相联系的不变量。从这一点可以看出, 张量符号的严格和分量矩阵的准确是十分必要的。

## 4 小 结

尽管张量是表达相对论物理的优美语言, 但纵观有关书籍, 张量自身却并不优美。上下指标位置不分, 会导致逆变、协变的混淆。目前, 上标表示逆变, 下标表示协变已经为大家普遍接受, 但上标对应分量矩阵的行, 下标对应分量矩阵的列却没有受到应有的重视。本文给出统一的规定, 张量的运算和矩阵的运算完整地统一起来。张量也就变得不仅好看, 而且实用, 我们才能运用矩阵这一浅显的工具来研究复杂的事物。

参 考 文 献

1 盛正华. 线性代数与张量解析. 长沙: 湖南科学技术出版社, 1984. 136, 137, 125, 140  
2 张永立. 相对论导论. 昆明: 云南人民出版社, 1978. 298, 164~168  
3 赵展岳. 相对论导引. 长春: 吉林人民出版社, 1984. 148  
4 俞允强. 广义相对论引论. 北京: 北京大学出版社, 1985. 27

PHYSICAL TENSOR AND ITS COMPONENT MATRICES

Li Chuanqi

(Department of Basic Sciences, NIM, Nanjing 210044)

**Abstract** According to the contravariance and covariance characteristics of physical tensors, the author has made a uniform regulation on the physical meaning of subscript and superscript in the expression of a tensor. Thus, a clear display of tensor matrix is given, the operational rule of matrix is made completely suitable for tensor calculus, and a reliable mathematic base is provided for quantitative analysis of the physical tensor.

**Keywords** tensor, contravariance, covariance, metric tensor, internal product, external product