

在算子 Fuzzy 逻辑中带有相等关系的 Fuzzy 推理

刘 叙 华

(吉林大学计算机科学系, 长春)

摘 要

本文提出了处理带有相等谓词的子句集的 λ -Paramodulation 方法. 使得在 Fuzzy 推理过程中可以做 Fuzzy 等量替换. 本文证明了: λ -Paramodulation 与 λ -锁语义归结方法相结合是完备的.

一、引 言

作者于 1984 年提出了算子 Fuzzy 逻辑的概念和 λ -归结方法(即 λ -Resolution). 在 1985—1986 年间, 作者与肖红^[1], Fang 和 Jeff, J.-P. Tsai^[2,3] 一起, 对 λ -归结方法做了进一步的研究, 并得到一系列结果. 我们不仅证明了: 两个 Fuzzy 子句的 λ -归结式是该两个 Fuzzy 子句的 λ -逻辑结果和 λ -归结方法对于 λ -恒假子句集是完备的这两个基本事实, 我们还对算子 Fuzzy 逻辑系统中, 以 λ -归结为基本方法的 Fuzzy 推理的实际意义给出了解释. 从解释中, 我们可以看到: 在精确意义下证明不了的定理, 在我们的系统中, 只要增大一些命题的模糊性和舍弃另一些模糊命题, 就可以在模糊意义下证明出该定理.

相等关系是数学中一个最基本、最常用的关系. 相等关系的一个重要特性是可以进行等量替换以及等量的传递. 那么在模糊定理证明中, 很自然地也就需要模糊等量的传递和进行模糊等量替换. 本文提出了处理模糊等量的 λ -Paramodulation 方法, 并且使该方法与 λ -归结方法配合去证明算子 Fuzzy 逻辑中所描述的 Fuzzy 定理. 本文证明了, 这两种方法的配合, 对于 λ -恒假公式是完备的.

二、基本概念与性质

从文献 [1—3] 知, 算子 Fuzzy 逻辑是建立在算子格上. 可以证明: 区间 $[0, 1]$ 在如下定义的运算上: 对任意 $x, y \in [0, 1]$,

$$x * y = \min\{x, y\},$$

$$x \oplus y = \max\{x, y\},$$

$$x \circ y = (x + y)/2,$$

$$x' = 1 - x$$

* 本文 1986 年 4 月 3 日收到, 1987 年 4 月 28 日收到修改稿.

组成一个算子格。

我们下面的讨论,为方便计,将限制在建立在 $[0, 1]$ 区间上的算子 Fuzzy 逻辑系统中,并且假设 λ 只取 $[0, 1]$ 中有限个值。

关于算子格, Fuzzy 文字,公式,解释,公式 G 在解释 I 下的真值 $T_I(G)$, λ -互补文字, λ -一致文字等概念,均可在文献 [1—3] 中找到。

为了下面讨论的方便,我们写出下面两个定义:

定义 1. 任取 $\lambda \in [0, 1]$. 公式 G 称为 λ -恒真,如果对任意解释 I , 都有 $T_I(G) \geq \lambda$; G 称为 λ -恒假,如果对任意 I , 都有 $T_I(G) \leq \lambda$.

显然, G 是 λ -恒真的当且仅当 $\sim G$ 是 $(1 - \lambda)$ -恒假的。

定义 2. 设 C_1, C_2 是两个无公共变元的子句, $\lambda_1 L_1, \lambda_2 L_2$ 分别是 C_1, C_2 中两个 Fuzzy 文字. 如果 L_1 和 L_2 有 MGU (Most General Unifier) σ , 并且 $\lambda_1 L_1^\sigma$ 与 $\lambda_2 L_2^\sigma$ 是 λ -互补文字,则

$$(C_1^\sigma - S_1) \cup (C_2^\sigma - S_2)$$

称为 C_1 和 C_2 的二元 λ -归结式,记为 $R_\lambda(C_1, C_2)$, 其中

$$S_1 = \{\lambda^* L^\sigma \mid (\lambda^* L^\sigma \in C_1^\sigma) \wedge (\lambda^* L^\sigma \text{ 与 } \lambda_1 L_1^\sigma \text{ 是 } \lambda\text{-一致的})\},$$

$$S_2 = \{\lambda^* L^\sigma \mid (\lambda^* L^\sigma \in C_2^\sigma) \wedge (\lambda^* L^\sigma \text{ 与 } \lambda_2 L_2^\sigma \text{ 是 } \lambda\text{-一致的})\}.$$

由于下面一些基本性质的简单性,所以都略去了证明。

性质 1. 设 P 是原子,于是, $\sim(1P) = 0P$.

性质 2. 设 P 是原子,于是, $\sim(0P) = 1P$.

今后,在算子 Fuzzy 逻辑中, $1P$ 可以简写为 P .

性质 3. 设 P 是原子,于是, $\sim\lambda P = (1 - \lambda)P$.

性质 4. 设 P 是原子,于是,

$$\sim(\lambda_1 \cdots \lambda_n P) = (1 - \lambda_1) \cdots (1 - \lambda_n)P.$$

性质 5. 设 G 是公式,于是,

$$\sim G \approx 0G.$$

例如,取 $G = 0.3P$, $I = \{P\}$, 于是

$$T_I(\sim G) = T_I(0.7P) = 0.7,$$

$$T_I(0G) = T_I(0(0.3P)) = 0.15.$$

性质 6. 设 G 是公式,于是

$$\sim\lambda G = (1 - \lambda)(\sim G).$$

性质 7. 设 G 是公式,于是

$$\sim(\lambda_1 \cdots \lambda_n G) = (1 - \lambda_1) \cdots (1 - \lambda_n)(\sim G).$$

性质 8. 设 P 是原子,于是

$$\lambda_1 \lambda_2 P \approx (\lambda_1 \circ \lambda_2)P.$$

例如, $0.8(0.6P) \approx (0.8 \circ 0.6)P = 0.7P$.

性质 9. 设 G 是公式,于是, $\lambda_1 \lambda_2 G \approx (\lambda_1 \circ \lambda_2)G$.

定义 3. 设 G, H 是两个公式. 对任意解释 I , 若 $T_I(G) > 1 - \lambda$, 则 $T_I(H) \geq \lambda$. 则称 G 是 λ -蕴涵 H , 记为 $G \Rightarrow H$.

定义 4. 设 G, H 是两个公式. 对任意解释 I , 若 $T_I(G) > \lambda$, 则 $T_I(H) > \lambda$, 则称 G 是 λ -强蕴涵 H , 记为 $G \Rightarrow H$.

性质 10. 设 A 是公式, 于是

- 1) 当 $\lambda \leq 0.5$ 时, $A \Rightarrow A$.
- 2) $A \Rightarrow A$.

性质 11. 设 A, B, C 是三个公式, 于是,

- 1) 当 $\lambda > 0.5$ 时, 若 $A \Rightarrow B, B \Rightarrow C$, 则 $A \Rightarrow C$.
- 2) 若 $A \Rightarrow B, B \Rightarrow C$, 则 $A \Rightarrow C$.

性质 12. 设 C_1, C_2 是两个子句, $R_\lambda(C_1, C_2)$ 是 C_1 和 C_2 的 λ -归结式, 于是,

- 1) 当 $\lambda = 0.5$ 时, $C_1 \wedge C_2 \Rightarrow R_\lambda(C_1, C_2)$,
- 2) 当 $\lambda \geq 0.5$ 时, $C_1 \wedge C_2 \Rightarrow R_\lambda(C_1, C_2)$.

这个性质的证明, 将在另一篇待发表的论文中写出.

性质 13. 设 A, B, C 是公式, 于是,

- 1) 若 $A \Rightarrow B, A \Rightarrow C$ 则 $A \Rightarrow (B \wedge C)$,
- 2) 若 $A \Rightarrow B, A \Rightarrow C$ 则 $A \Rightarrow (B \wedge C)$.

定义 5. 一个子句称为 λ -空子句, 记为 $\lambda\text{-}\square$, 如果该子句中任一文字 λ^*L 都满足:

$$1 - \lambda \leq \lambda^* \leq \lambda \quad (\text{当 } \lambda \geq 0.5 \text{ 时}).$$

性质 14. 设 $\lambda \geq 0.5$. 于是, 子句集 S 是 λ -恒假的当且仅当从 S 出发, 使用 λ -归结方法能够在有限步内推出 $\lambda\text{-}\square$.

这个性质是文献 [1] 中一个重要定理, 证明略去.

三、Fuzzy 相等公理集

定义 6. 子句集 S 的一个解释 I , 称为一个 E 解释 (记为 I_E), 如果对 S 的 Herbrand 域^[4]中的任意项 (Term^[4]) α, β, γ 及 S 中出现的任意 Fuzzy 文字 $\lambda_1 P(\cdots \alpha \cdots)$, 满足下面条件:

1. $T_{I_E}((\alpha = \alpha)) = T$;
2. 若 $T_{I_E}((\alpha = \beta)) = T$, 则 $T_{I_E}((\beta = \alpha)) = T$;
3. 若 $T_{I_E}((\alpha = \beta)) = T, T_{I_E}((\beta = \gamma)) = T$, 则

$$T_{I_E}((\alpha = \gamma)) = T$$
;
4. 若 $T_{I_E}((\alpha = \beta)) = T$, 则

$$T_{I_E}(P(\cdots \alpha \cdots)) = T_{I_E}(P(\cdots \beta \cdots)).$$

定义 7. 设 S 是子句集, $\lambda \in [0, 1]$ 且 $\lambda \geq 0.5$. 下面的子句集称为 S 的 λ -相等公理集 K_λ : 对任意 $\lambda^* > \lambda$,

1. $\lambda^*(x = x)$;
2. $(1 - \lambda^*)(x = y) \vee \lambda^*(y = x)$;
3. $(1 - \lambda^*)(x = y) \vee (1 - \lambda^*)(y = z) \vee \lambda^*(x = z)$;
4. $(1 - \lambda^*)(x_j = x_0) \vee (1 - \lambda^*)P(\cdots x_j \cdots) \vee \lambda^*P(\cdots x_0 \cdots)$,

对 S 中出现的任意原子 $P(x_1, \cdots, x_n), j = 1, \cdots, n$;

$$5. (1 - \lambda^*)(x_i = x_0) \vee \lambda^*(f(\cdots x_i \cdots) = f(\cdots x_0 \cdots)).$$

对 S 中出现的任意函数符号 $f(x_1, \cdots, x_n)$, $i = 1, \cdots, n$.

定义 8. 子句集 S 称为 λE -恒假的, 如果对任意 E 解释 I_E , 都有 $T_{I_E}(S) \leq \lambda$; S 称为 λE -恒真的, 如果 $T_{I_E}(S) \geq \lambda$.

若 I_E 是子句集 S 的一个 E 解释, 显然有:

$$1. T_{I_E}(\lambda^*(x = x)) = \lambda^* > \lambda;$$

$$2. T_{I_E}((1 - \lambda^*)(x = y) \vee \lambda^*(y = x)) = \lambda^* > \lambda;$$

$$3. T_{I_E}((1 - \lambda^*)(x = y) \vee (1 - \lambda^*)(y = z) \vee \lambda^*(x = z)) = \lambda^* > \lambda;$$

4. 若 $T_{I_E}((x_i = x_0)) = T$, 因为 I_E 是 E 解释, 所以 $T_{I_E}(P(\cdots x_i \cdots)) = T_{I_E}(P(\cdots x_0 \cdots))$, 故

$$T_{I_E}((1 - \lambda^*)(x_i = x_0) \vee (1 - \lambda^*)P(\cdots x_i \cdots) \vee \lambda^*P(\cdots x_0 \cdots)) = \lambda^* > \lambda;$$

5. 若 $T_{I_E}((x_i = x_0)) = T$, 因为 I_E 是 E 解释, 所以,

$$T_{I_E}(f(\cdots x_i \cdots) = f(\cdots x_0 \cdots)) = T_{I_E}(f(\cdots x_i \cdots) = f(\cdots x_0 \cdots)).$$

而对任意 α , 都有 $T_{I_E}((\alpha = \alpha)) = T$, 所以

$$T_{I_E}(f(\cdots x_i \cdots) = f(\cdots x_0 \cdots)) = T.$$

所以,

$$T_{I_E}((1 - \lambda^*)(x_i = x_0) \vee \lambda^*(f(\cdots x_i \cdots) = f(\cdots x_0 \cdots))) = \lambda^* > \lambda.$$

综上所述, $T_{I_E}(K_\lambda) > \lambda$, 其中 K_λ 是 S 的 λ -相等公理集.

若 I 是子句集 S 的一个解释, 且 $T_I(K_\lambda) > \lambda$, 则显然

$$1. T_I((\alpha = \alpha)) = T, \text{ 对 } S \text{ 中任意项 } \alpha;$$

2. 若 $T_I((\alpha = \beta)) = T$, 根据 K_λ 中第二类子句在 I 下其真值大于 λ , 必有 $T_I((\beta = \alpha)) = T$;

3. 若 $T_I((\alpha = \beta)) = T$, $T_I((\beta = \gamma)) = T$, 根据 K_λ 中第三类子句在 I 下真值大于 λ , 必有 $T_I((\alpha = \gamma)) = T$;

4. 若 $T_I((\alpha = \beta)) = T$, $T_I(P(\cdots \alpha \cdots)) = T$, 根据 K_λ 中第四类子句在 I 下真值大于 λ , 必有 $T_I(P(\cdots \beta \cdots)) = T$. 反之, 若 $T_I((\alpha = \beta)) = T$, $T_I(P(\cdots \beta \cdots)) = T$, 根据 K_λ 中第二类子句, 必有 $T_I((\beta = \alpha)) = T$, 再根据第四类子句, 必有 $T_I(P(\cdots \alpha \cdots)) = T$. 总之,

$$T_I(P(\cdots \alpha \cdots)) = T_I(P(\cdots \beta \cdots)),$$

故 I 是 S 的一个 E 解释.

因此, 得到如下定理:

定理 1. 设 S 是子句集, K_λ 是 S 的 λ -相等公理集. S 的解释 I 是一个 E 解释当且仅当

$$T_I(K_\lambda) > \lambda.$$

定理 2. 设 S 是子句集, K_λ 是 S 的 λ -相等公理集. 于是, S 是 λE -恒假的当且仅当 $(S \cup K_\lambda)$ 是 λ -恒假的.

证. ($\Rightarrow$) 若 S 是 λE -恒假的, 但是, $(S \cup K_\lambda)$ 不是 λ -恒假的, 则必有解释 I , 使得 $T_I((S \cup K_\lambda)) > \lambda$. 故有 $T_I(S) > \lambda$ 且 $T_I(K_\lambda) > \lambda$.

由定理 1 知, I 必是 S 的一个 E 解释. 由 $T_I(S) > \lambda$ 知, S 不是 λE -恒假的, 矛盾!

($\Leftarrow$) 假设 $(S \cup K_\lambda)$ 是 λ -恒假的, 但是, S 不是 λE -恒假的. 于是, 有 E 解释 I_E , 使得 $T_{I_E}(S) > \lambda$. 显然, $T_{I_E}(K_\lambda) > \lambda$. 故 $T_{I_E}((S \cup K_\lambda)) > \lambda$. 与 $(S \cup K_\lambda)$ 是 λ -恒假性矛盾.

四、 λ -Paramodulation

定义 9. 设 C_1 和 C_2 是两个无公共变元的子句. $\lambda \geq 0.5$. C_1, C_2 的结构分别如下:

$$\lambda_1 L[t] \vee C'_1, \lambda_1 > \lambda \text{ 或 } \lambda_1 < 1 - \lambda,$$

$$\lambda_2 (r = s) \vee C'_2, \lambda_2 > \lambda.$$

其中 $\lambda_1 L[t]$ 表示含有项 t 的 Fuzzy 文字, C'_1 和 C'_2 仍是子句. 如果 t 和 r 有 MGU σ , 则

$$\lambda^* L^\sigma[s^\sigma] \cup C'_1{}^\sigma \cup C'_2{}^\sigma$$

称为 C_1 和 C_2 的二元 λ -Paramodulant. 其中 $\lambda_1 L[t]$ 和 $\lambda_2 (r = s)$ 称为 Paramodulated 文字,

$$\lambda^* = \begin{cases} (\lambda_1 + \lambda_2)/2, & \text{当 } \lambda_1 > \lambda, \\ (\lambda_1 + 1 - \lambda_2)/2, & \text{当 } \lambda_1 < 1 - \lambda. \end{cases}$$

$L^\sigma[s^\sigma]$ 表示以 s^σ 替换 L^σ 中的 t^σ 的一次出现.

定义 10. 两个子句 C_1 和 C_2 的 λ -Paramodulant 是 C_1 或 C_1 的 λ -因子和 C_2 或 C_2 的 λ -因子的一个二元 λ -Paramodulant, 记为 $P_\lambda(C_1, C_2)$.

定义 11. 设 S 是子句集, G, H 是 S 中两个子句. 对 S 的任一 E 解释 I_E , 若 $T_{I_E}(G) > \lambda$, 则有 $T_{I_E}(H) > \lambda$, 则称 G 是 λE -强蕴涵 H , 记为 $G \Rightarrow H$.

定理 3. 设 C_1, C_2 是两个子句, $\lambda \geq 0.5$, $P_\lambda(C_1, C_2)$ 是 λ -Paramodulant. 于是,

$$(C_1 \wedge C_2) \Rightarrow P_\lambda(C_1, C_2).$$

证. 不妨设 C_1 是 $\lambda_1 L[t] \vee C'_1$, C_2 是 $\lambda_2 (r = s) \vee C'_2$, $P_\lambda(C_1, C_2)$ 是二元 λ -Paramodulant. 其中 $\lambda_2 > \lambda$.

设 t 和 r 的 MGU 为 σ , I_E 是任一 E 解释, 使 $T_{I_E}(C_1) > \lambda$, $T_{I_E}(C_2) > \lambda$. 于是, 显然有 $T_{I_E}(C'_1) > \lambda$, $T_{I_E}(C'_2) > \lambda$ (注意: 子句中所有变元都由全称量词约束). 任取 C_1, C_2 的一个基例作如下考虑:

1. 当 $\lambda_1 > \lambda$ 时.

若 $T_{I_E}(L^\sigma[t^\sigma]) = F$, 则 $T_{I_E}(C'_1{}^\sigma) > \lambda$, 于是, $T_{I_E}(P_\lambda(C_1, C_2)) > \lambda$.

若 $T_{I_E}(L^\sigma[t^\sigma]) = T$, 由于 $t^\sigma = r^\sigma$, $r^\sigma = s^\sigma$, 所以 $T_{I_E}(L^\sigma[s^\sigma]) = T$, 而 $P_\lambda(C_1, C_2)$ 中的 $\lambda^* > \lambda$, 所以 $T_{I_E}(P_\lambda(C_1, C_2)) > \lambda$.

2. 当 $\lambda_1 < \lambda$ 时, 类似于上面的证明, 也能得到:

$$T_{I_E}(P_\lambda(C_1, C_2)) > \lambda.$$

故 $(C_1 \wedge C_2) \Rightarrow P_\lambda(C_1, C_2)$.

定义 12. 设 C_1, C_2 是配锁子句, $P_\lambda(C_1, C_2)$ 是一个 λ -Paramodulant ($\lambda \geq 0.5$), 如果

1. C_1 和 C_2 都是 λ -正子句 (即子句中每个 Fuzzy 文字 $\lambda^* L$, 都有 $\lambda^* \geq 1 - \lambda$).

2. C_1 和 C_2 中的 Paramodulated 文字分别是 C_1 和 C_2 中带有最小锁的文字. 则 $P_\lambda(C_1, C_2)$ 被称为 λ -Lock-Hyperparamodulant, 简称为 λ -LH-Paramodulant.

定义 13. 设 $\lambda \geq 0.5$. 称配锁子句序列 $(E_1, \dots, E_q, N)$ 为一个 λ -Lock-Hypersemantic 互撞 (简称 λ -LH 互撞) 如果满足下面条件:

1. $E_1, \dots, E_q$ 为 λ -正子句;

2. 设 $R_i = N$, 对每个 $i(1 \leq i \leq q)$, 存在 E_i 和 R_i 的 λ -归结式 R_{i+1} ;
3. E_i 中归结文字是 E_i 中有最小锁者;
4. R_{q+1} 是 λ -正子句.

称 R_{q+1} 是此互撞的 λ -LH 归结式.

定理 4. 若配锁子句集 S 是 λ -恒假的, 并且 $\lambda \geq 0.5$, 则存在一个从 S 出发, 使用 λ -LH 归结方法, 推出 λ -空子句的演绎.

此定理的证明, 见文献 [3].

定义 14. 设 S 是子句集和 $\lambda \geq 0.5$. S 的 λ -函数反身公理集 F_λ 是如下集合:

$$F_\lambda = \{\lambda^*(f(x_1, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_n))\},$$

其中 $\lambda^* \in [0, 1]$ 且 $\lambda^* > \lambda$, f 是出现在 S 中的任意 n 元函数符号.

定义 15. 设 $\lambda \geq 0.5$. Fuzzy 文字 λ^*L 称为 λ -无关文字, 如果 $1 - \lambda \leq \lambda^* \leq \lambda$.

定义 16. 设 C_1 和 C_2 是两个子句. 如果 C_1 和 C_2 中的文字能建立一一对应关系, 并且两个对应文字或者是 λ -一致的, 或者都是 λ -无关的, 则称 C_1 和 C_2 是 λ -一致的.

定理 5. 设 $\lambda \geq 0.5$. C_1 和 C_2 是两个子句, C 是 C_1 和 C_2 的一个 λ -锁归结式或者 λ -锁 Paramodulant. 若 C_1^* 和 C_2^* 分别与 C_1 和 C_2 是 λ -一致的, 则存在 C_1^* 和 C_2^* 的一个 λ -锁归结式或者 λ -锁 Paramodulant C^* , 并且 C^* 与 C 是 λ -一致的.

证. 1) 不妨设 C_1 和 C_2 分别是如下两个子句:

$$\lambda_1 L_1 \vee C'_1, \lambda_2 L_2 \vee C'_2.$$

其中 $\lambda_1 > \lambda$, $\lambda_2 < 1 - \lambda$. 令

$$C = (C'_1 - \lambda_1 L_1^\sigma) \cup (C'_2 - \lambda_2 L_2^\sigma),$$

其中 σ 是 L_1 与 L_2 的 MGU. 于是, C_1^* , C_2^* 分别是如下两个子句:

$$\lambda_1^* L_1 \vee C_1^{*\prime}, \lambda_2^* L_2 \vee C_2^{*\prime}.$$

其中 $\lambda_1^* > \lambda$, $\lambda_2^* < 1 - \lambda$, $C_1^{*\prime}$ 和 $C_2^{*\prime}$ 分别与 C'_1 和 C'_2 是 λ -一致的. 令

$$C^* = (C_1^{*\prime} - \lambda_1^* L_1^\sigma) \cup (C_2^{*\prime} - \lambda_2^* L_2^\sigma),$$

显然, C^* 是 C_1^* 和 C_2^* 的一个 λ -归结式. 不难看出, C^* 还是一个 λ -锁归结式, 并且 C^* 与 C 是 λ -一致的.

2) 不妨设 C_1 和 C_2 分别是如下两个子句:

$$\lambda_1 L[t] \vee C'_1, \lambda_2 (r = s) \vee C'_2,$$

其中 $\lambda_1 > \lambda$, $\lambda_2 > \lambda$. C 是如下 λ -锁 Paramodulant:

$$\lambda_3 L^\sigma[s^\sigma] \vee C_1^{\prime\sigma} \vee C_2^{\prime\sigma},$$

其中 $\lambda_3 = (\lambda_1 + \lambda_2)/2$, σ 是 t 和 r 的 MGU. 于是, C_1^* 和 C_2^* 分别是如下子句:

$$\lambda_1^* L[t] \vee C_1^{*\prime}, \lambda_2^* (r = s) \vee C_2^{*\prime},$$

其中 $\lambda_1^* > \lambda$, $\lambda_2^* > \lambda$, $C_1^{*\prime}$ 和 $C_2^{*\prime}$ 分别与 C'_1 和 C'_2 是 λ -一致的. 令

$$C^* = \lambda_3^* L^\sigma[s^\sigma] \vee C_1^{*\prime\sigma} \vee C_2^{*\prime\sigma},$$

其中 $\lambda_3^* = (\lambda_1^* + \lambda_2^*)/2$, 显然, C^* 是 C_1^* 和 C_2^* 的 λ -锁 Paramodulant, 并且 C^* 与 C 是 λ -一致的.

定理 6. 配锁子句集 S 是 λE -恒假的当且仅当存在一个从 $(S \cup \{\lambda^*(x = x)\}) \cup F_1$ 出发, 使用 λ -LH 归结方法和 λ -LH-Paramodulation 方法推出 λ -空子句的演绎, 其中 F_1 是 S 的

λ -函数反身公理集, $\lambda \geq 0.5$, $\lambda^* > \lambda$.

证. ($\Rightarrow$) 设 K_λ 是 S 的 λ -相等公理集. 因为 S 是 λE -恒假的, 所以, 由定理 2 知, $(S \cup K_\lambda)$ 是 λ -恒假的, 由定理 4 知, 存在从 $(S \cup K_\lambda)$ 出发, 推出 λ - $\square$ 的 λ -LH 归结演绎 D . 下面我们将 D 改造成这个定理所需要的演绎.

对 D 中任一个 λ -LH 互撞 $(E_1, \dots, E_q, N)$, 由定义 13 知, $E_1, \dots, E_q$ 是 λ -正子句, 所以, 或者 $E_i \in S$ 或者 E_i 是 K_λ 中的 $\lambda^*(x = x)$ (对每个 $i = 1, 2, \dots, q$). 如果 $N \in S$, 则此互撞就是子句集 $(S \cup \{\lambda^*(x = x)\})$ 中的互撞, 满足本定理的要求; 如果 $N \in K_\lambda$, 显然, N 不可能是子句 $\lambda^*(x = x)$, 因此有下面 4 种情况:

1. N 是 K_λ 中子句: $(1 - \lambda^*)(x = y) \vee \lambda^*(y = x)$, $\lambda^* > \lambda$. 显然, 该互撞必有 $q = 1$, E_1 必是下面形状:

$$\lambda_1(t_1 = t_2) \vee E'_1,$$

其中 $\lambda_1 > \lambda$. 因此,

$$(E_1, N) = \lambda^*(t_2 = t_1) \vee E'_1,$$

而 K_λ 中子句 $\lambda_1(x = x)$ 与子句 E_1 的 λ -Paramodulant 如下:

$$P_\lambda(\lambda_1(x = x), \lambda_1(t = t_2) \vee E'_1) = \lambda_1(t_2 = t_1) \vee E'_1.$$

因为 (E_1, N) 是 λ -LH 互撞, 所以 $P_\lambda(\lambda_1(x = x), E_1)$ 是 λ -LH-Paramodulant, 并且这两个子句是 λ -一致的.

2. N 是 K_λ 中子句: $(1 - \lambda^*)(x = y) \vee (1 - \lambda^*)(y = z) \vee \lambda^*(x = z)$, $\lambda^* > \lambda$.

显然, 该互撞必有 $q = 2$, 并且 E_1, E_2 分别是如下子句:

$$\lambda_1^*(t_1 = t_2) \vee E'_1, \lambda_2^*(s_1 = s_2) \vee E'_2,$$

其中 $\lambda_1^* > \lambda$, $\lambda_2^* > \lambda$. 于是,

$$(E_1, E_2, N) = \lambda^*(t_1^\sigma = s_2^\sigma) \vee E_1'^\sigma \vee E_2'^\sigma,$$

其中 σ 是 t_2 和 s_1 的 MGU. 显然,

$$P_\lambda(E_1, E_2) = (\lambda_1^* + \lambda_2^*)/2(t_1^\sigma = s_2^\sigma) \vee E_1'^\sigma \vee E_2'^\sigma.$$

不难看出, $P_\lambda(E_1, E_2)$ 是 λ -LH-Paramodulant 并且和 (E_1, E_2, N) 是 λ -一致的.

3. N 是 K_λ 中子句:

$$(1 - \lambda^*)(x_j = x_0) \vee (1 - \lambda^*)P(x_1, \dots, x_j, \dots, x_n) \vee \lambda^*P(x_1, \dots, x_0, \dots, x_n),$$

其中 $\lambda^* > \lambda$.

显然, 该互撞必有 $q = 2$ 并且 E_1, E_2 分别是如下子句:

$$\lambda_1(t_j = t_0) \vee E'_1, \lambda_2 P(s_1, \dots, s_j, \dots, s_n) \vee E'_2,$$

其中 $\lambda_1 > \lambda$, $\lambda_2 > \lambda$. 于是,

$$(E_1, E_2, N) = \lambda^* P(s_1^\sigma, \dots, t_0^\sigma, \dots, s_n^\sigma) \vee E_1'^\sigma \vee E_2'^\sigma,$$

其中 σ 是 $(x_1, \dots, t_j, \dots, x_n)$ 与 $(s_1, \dots, s_j, \dots, s_n)$ 的 MGU. 显然,

$$P_\lambda(E_2, E_1) = (\lambda_1 + \lambda_2)/2 P(s_1^\sigma, \dots, t_0^\sigma, \dots, s_n^\sigma) \vee E_1'^\sigma \vee E_2'^\sigma.$$

不难看出, $P_\lambda(E_2, E_1)$ 是 λ -LH-Paramodulant, 且和 (E_1, E_2, N) 是 λ -一致的.

4. N 是 K_λ 中子句:

$$(1 - \lambda^*)(x_j = x_0) \vee \lambda^*(f(x_1, \dots, x_j, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_0, \dots, x_n)),$$

其中 $\lambda^* > \lambda$.

显然,该互撞必有 $q = 1$, 并且 E_1 是如下子句:

$$\lambda_1(t_j = t_0) \vee E'_1,$$

其中 $\lambda_1 > \lambda$. 于是,

$$(E_1, N) = \lambda^*(f(x_1, \dots, t_j, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, t_0, \dots, x_n)) \vee E'_1,$$

求 $\lambda_1(f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_j, \dots, x_n))$ 与 E_1 的 λ -Paramodulant:

$$P_\lambda(\lambda_1(f = f), E_1) = \lambda_1(f(x_1 \dots t_j \dots x_n) = f(x_1 \dots t_0 \dots x_n)) \vee E'_1,$$

显然,这是一个 λ -LH-Paramodulant 并且与 (E_1, N) 是 λ -一致的.

由定理 5 知,对演绎 D 中的每一步推演,都可以进行如上的改变,于是,得一新演绎 D' . 显然,演绎树 D' 的初始节点都是 $(S \cup \{\lambda^*(x = x)\} \cup F_\lambda)$ 中子句,中间节点与演绎树 D 的中间节点一一对应并且 λ -一致,根节点是 λ -空子句. 演绎 D' 中使用了 λ -LH 归结和 λ -LH-Paramodulation 两种方法,这正是本定理所要求的演绎.

($\Leftarrow$) 若存在从 $(S \cup \{\lambda^*(x = x)\} \cup F_\lambda)$ 出发,使用 λ -LH-归结和 λ -LH-Paramodulation 方法推出 λ - $\square$ 的演绎,但是 S 不是 λE -恒假的,于是,存在 E 解释 I_E , 使得 $T_{I_E}(S) > \lambda$. 于是,对 $(S \cup \{\lambda^*(x = x)\} \cup F_\lambda)$ 中任一子句 C , 都有 $T_{I_E}(C) > \lambda$. 根据性质 11, 性质 12 和定理 3, 不难看出, $T_{I_E}(\lambda$ - $\square$) $> \lambda$, 矛盾.

至此,我们得到了: 在算子 Fuzzy 逻辑中,进行 Fuzzy 推理的 λ -Paramodulation 方法. 这个方法允许在 Fuzzy 推理中进行 Fuzzy 等量替换.

由于算子 Fuzzy 逻辑中的命题形式,很自然的描述了模糊命题¹⁾,因此, λ -Paramodulation 方法与我们已经得到的 λ -归结方法相结合,进行 Fuzzy 推理是方便的.

参 考 文 献

- [1] Liu, X. H. & Xiao, H., *Proc. of the 15-th ISMVL, Canada*, 5(1985), 77—78.
- [2] Liu, X. H. & Fang, K. Y., *Proc. of the 16-th ISMVL, U. S. A.*, 5(1986), 248—251.
- [3] Liu, X. H., Chang, Carl K. & Jeffery, J-P. Tsai, *Proc. the IEEE 10-th International Computer Software & Applications Conference, U. S. A.*, 10(1986), 154—157.
- [4] Chang, C. L. & Lee, R. C. T., *Symbolic Logic and Mechanical Theorem Proving*. Academic Press, New York, 1973.
- [5] Lee, R. C. T., *JACM*, 19(1972), 1: 109—119.

1) Liu, X. H., Fang, K. Y. & Jeffery, J-P. Tsai, *Fuzzy Reasoning in Operator Fuzzy Logic* (将出).