

Toroidal 李代数的结构与表示

谭绍滨*, 陈福林

(厦门大学数学科学学院, 福建 厦门 361005)

摘要: 关于 Toroidal 李代数结构和表示理论的进行综述. 介绍了 Toroidal 李代数的发展历史、结构理论、表示理论以及扭 Toroidal 李代数与高维仿射李代数的关系, 扭 Toroidal 李代数的不可约表示等.

关键词: Toroidal 李代数; 结构; 表示; 扭 Toroidal 李代数

中图分类号: O 152.5

文献标志码: A

文章编号: 0438-0479(2011)03-0149-16

1 导 引

仿射 Kae-Moody 李代数从 20 世纪 60 年代发展至今取得了一系列令人瞩目的成果. 它不仅成功地推广了几乎所以有限单李代数理论中值得推广的理论, 而且在其他学科上有一些很好的应用. 同时还深刻地影响着一些新发展起来的其他数学分支, 例如顶点算子代数理论、量子群理论等. 因此, 我们很自然地要问, 到底仿射李代数的哪些性质决定了它有这么丰富的理论? 或者说, 我们该从哪方面去推广仿射李代数, 使得推广后的李代数也可以拥有一些好的性质. 当然 Kae-Moody 代数(或广义 Kae-Moody 代数)本身就是一种推广, 在此之后一些新的推广开始陆续地出现. 包括广义相交矩阵(GIM)李代数、根阶化李代数、高维仿射李代数等等. 在这些推广中, n -Toroidal 李代数(或 Toroidal 李代数)都是最典型的例子. 所有的 Toroidal 代数都是根阶化的, 而 n -Toroidal 李代数加上一些导子后则是一个零度为 n 的高维仿射李代数. 另外通过 Cartan 矩阵的 n 重仿射化得到的矩阵是最典型的 GIM^[1], 当 Cartan 矩阵是 D 或 E 型时, 其所对应的相交矩阵代数正是 n -Toroidal 李代数.

设 $\mathcal{S}$ 是复数域上的有限单李代数, $A = A_n := \mathbb{C}[t_1^{\pm 1}, \dots, t_n^{\pm 1}]$ 是有 n 个未定元的洛朗多项式环. 那么在张量空间 $\mathcal{S} \otimes A_n$ 上有一个自然的李代数结构, 称为多重 Loop 代数. 在文献[2]中, Moody 等第一次给出了 Toroidal 李代数的定义. 他们将 Toroidal 李代数 τ

定义为多重 Loop 代数的泛中心扩张, 具体地, $\tau = \mathcal{S} \otimes A \dot{+} \Omega_n$, 其中 Ω_n 是 A 上的 Kasser 微分(见 2.1 节). 当 $n=1$, 其就是仿射李代数. 与仿射情形不同的是, 当 $n \geq 2$ 时, Toroidal 代数的中心是无穷维的. 在文献[2]中, 他们给出了 2-Toroidal 代数的一个 presentation, 然后利用该 presentation, 他们得到了 2-Toroidal 代数的顶点算子实现. 之后, 在文献[3]中, Rao 等将这些结果推广到一般的 n . 同时他们给出的顶点表示是直接基元素上给出, 并不像在文献[2]中是利用生成元和生成关系得到的.

我们总期望能够用较少的生成元来表述一个代数. 在文献[4]中, 作者在这方面做了一些尝试. 他们给出了两个新的 presentation(见 2.4 节), 其中第 2 种的生成元没有包含中心元. 在文献[5]中, 作者为了实现椭圆李代数引进了李代数的合并这一概念, 文献[4]中的想法正是来源于此. 他们用有限单李代数和广义 Heisenberg 代数的合并给出了 Toroidal 李代数一种新的 presentation. 我们熟知有限维单李代数的 Cartan 子代数是共轭的以及其自同构群是内自同构群和图自同构的半直积, 仿射李代数也有类似的结果. Pianzola 在文献[6-7]中推广了这些结果, 分别给出了 Toroidal 李代数的共轭性定理和其自同构群的刻画. 对于 Toroidal 李代数结构理论上的其他结果大概还包括: 文献[8]中研究了 Toroidal 的 Weyl 群, 文献[9]中刻画了多重 Loop 代数的导子, 以及文献[10]中对多重 Loop 代数的极大子代数的描述等.

有限单李代数和仿射李代数都存在着单根系, 其诱导出代数上的一个标准的三角分解. 依赖此三角分解, 有限单李代数和仿射李代数上均有一套非常完整的高权模理论. 但当 $n \geq 2$ 时, Toroidal 李代数没有一个标准的三角分解, 从而高权模理论没法自然地推广

收稿日期: 2010-12-10

基金项目: 国家自然科学基金项目(10931006)

* 通信作者: Tans@xmu.edu.cn

到 Toroidal 代数上去. 在文献[11-14]中, 他们利用一些非标准的三角分解来构造 Verma 模, 也得到了一些有趣的结果. 在文献[15]中, Chari 分类了仿射李代数的可积单模(在以后, 如无特殊说明, 我们说的可积模都是指权空间有限维的), 她指出除了高权、低权模外, 仿射代数还有一类中心作用为零的可积模——Loop 模. 在后面我们将看出, 这类模在 Toroidal 代数上有非常好的推广. 在文献[16]中, Chari 等构造了这类 Loop 模, 其作为向量空间无非就是一些有限单李代数的有限单模和 $C[t, t^{-1}]$ 的张量空间(或子空间). Rao 在文献[17]中将这个结果推广到多重 Loop 代数上去, 分类了多重 Loop 代数上的可积单模. 其模空间与仿射时类似, 只是将 $C[t, t^{-1}]$ 替换成 A_n . 之后, 他在文献[18]中分类了 Toroidal 代数 $\tau = \tau \dot{\vee} \sum_{i=1}^n m C d_i$ 上的可积单模, 其中 d_i 是 A 上的度导子(3.4 节). 将多重 Loop 模中的有限单李代数的有限单模换成仿射李代数的可积高权单模, A_n 换成 A_{n-1} 后, Rao 在这个向量空间上定义了一个 τ 模结构, 并且这个模是可积和完全可约的. 当中心元作用不平凡的时候, Rao 证明了任意的 Toroidal 李代数的可积单模在通用一个自同构的作用后(通过自同构可以赋予这个模一个新的模结构), 同构于前面构造的某个模的不可约部分(在新的模作用下). 至此, Toroidal 李代数 τ 的可积单模分类问题得到完全解决. 定义全 Toroidal 代数为 Toroidal 代数和 A_n 上导子代数的半直积(见 2.1 节), 全 Toroidal 代数的可积单模也已经在文献[19-20]中得到了分类.

仿射李代数高权模的第一次具体实现是 Lepowsky 等^[21]利用顶点算子给出的, 之后仿射李代数的顶点表示得到了广泛的研究. 就现在看来, 我们要去研究那些从仿射李代数推广过来的李代数的表示理论时, 总喜欢从构造该代数的顶点表示入手. 这大概是因为在仿射情形时, 顶点表示最初是用来构造其最简单的高权模——基本模的. 因此, 对于从仿射李代数推广出来的李代数而言, 用顶点算子构造出来的模也应该是最基本的, 从而可以为之后研究该代数其他表示理论提供一个良好的模版. 仿射李代数的顶点表示最重要的有两类: 齐次表示和主表示. 他们的区别在于构造顶点算子时用的 Heisenberg 子代数是齐次的或主的. Toroidal 李代数 τ 的齐次顶点表示在文献[2-3]中被得到, 随后在文献[22-23]中, Tan 和 Billiy 分别构造了 A_1 -型 Toroidal 李代数和一般 Toroidal 代数的主顶点表示(这些文章中 τ 所对应的单李代数 $\mathcal{S}$ 的定点图都

是单边的). 这些模都是忠实的而且高度不可约的. 从文献[3, 23]中构造的模来看, Toroidal 李代数 τ 的这些模都满足一些特许的性质以及都可以扩充为一个更大代数 τ^* (加了一部分导子, 见 3.4 节)的模. 在假设 τ 模满足这些特许性质的前提下, Rao 在文献[24]中构造这类模相对应的 Z 代数. 而在文献[25]中, Berman 等则证明了仿射李代数的所有不可约高权模都可以提升为 τ 的一个权空间有限维的不可约模, 而这也为后面文献[19-20]中全 Toroidal 李代数的可积单模分类提供了思路. 同时在文献[26]中, 作者给出了文献[25]中构造的模的顶点算子代数解释. 注意到以上构造的这些顶点表示, $\text{Der}(A)$ 中总有的一部分导子的作用是无法定义的. 为了得到全 Toroidal 代数上的不可约表示, Billy 在文献[27]中利用顶点算子代数的语言的构造了一类全 Toroidal 李代数的不可约表示. Billy 在文献[27]中还定义了全 Toroidal 的一类模范畴, 并证明了这类范畴中的单模就是其用顶点算子代数构造的那些模. 在 τ 所对应的单李代数 $\mathcal{S}$ 的定点图是非单边的时候, 也有一些齐次顶点表示的结果已被得到. 例如: 文献[28-32]等.

仿射代数上也有一些非可积高权模的构造, 如 Wakimoto 用自由域构造的 Wakimoto-型模, Feingold 和 Frenkel 构造的 Fermionic 和 Bosonic 模中的 Bosonic 模等. 利用文献[2]中给出的 2-Toroidal 代数的 presentation, Cox 在文献[33]中用自由域给出了 A_1 -型 2-Toroidal 李代数的两个实现以及文献[34-35]分别给出了 2-Toroidal 李代数上的 Fermionic 和 Bosonic 表示. 不久前, 利用文献[3]中给出的 n -Toroidal 李代数的 presentation, 文献[36]构造了 A_1 -型 n -Toroidal 李代数的 Wakimoto-型表示. 值得注意的是, 当 $n=2$ 时, 文献[2]中给出的 presentation 中生成元是中心元的个数是 1(见注 2). 而当 $n \geq 3$ 时, 却是无穷的. 因此, 利用 2-Toroidal 的生成元和生成关系比较容易将仿射李代数上的一些表示推广到 2-Toroidal 李代数上去. 遗憾的是, 至今我们没有看到直接利用基元素构造出来的 Toroidal 李代数的不可积模.

高维仿射李代数(EALA)是近些年发展很快的一门理论. 其最早的定义是在文献[37]中给出的. 之后, 在文献[38]中, 作者系统地研究了 EALA. 他们指出 EALA 的分类问题归结为高维仿射根系(EARS)的分类. 并且他们利用半格的语言给出了 EARS 的一个完全分类. 由定义, EALA 是由一个三元组 $(E, (\cdot, \cdot), H)$ 组成的. 因为 E 中的迷向根生成了一个自由加法群, 我们定义该群的秩为 E 的零度. 由于秩为零的 EALA

是有限单李代数以及秩为 1 的 EALA 是仿射 Kac-Moody 李代数^[39], 因此 EALA 可以说是有限单和仿射李代数的一种自然推广. n -Toroidal EALA (见 4.1 节) 是最典型的零度为 n 的 EALA. 我们知道仿射 Kac-Moody 代数的导代数模去中心后可以用一个(无扭或扭的) Loop 代数来实现. 类似这样的思想, 我们定义一个 EALA 的核 E_c 为 E 中由非迷向根向量生成的子代数以及无中心核为 $E/Z(E_c)$. 我们期望能够给 EALA 的无中心核一个统一的实现, 进而用其来实现所有的 EALA.

为了刻画 EALA 的无中心核, Yoshii 引进了李环面的概念^[40]. 简单来说, 设 Δ 是有限不可约根系, $Q = \text{span}_{\mathbb{Z}} \Delta$ 以及 Λ 是一个自由加法群, 那么李环面 L 是一个具有某些性质的 $Q \times \Lambda$ 阶化李代数. 称李环面 L 的零度为 n , 若 Λ 的秩为 n . 在文献[40]中, Yoshii 证明了任何一个 EALA 的核都是一个李环面并且任一个无中心李环面都是某个 EALA 的无中心核. 在文献[41-42]中, Neher 进一步研究了李环面. 他在文献[41]中给出了李环面的一个等价定义, 并利用该定义在文献[42]中说明了利用一个给定的无中心李环面可以构造出一个 EALA. Neher 指出这样构造出来的 EALA 穷尽了所有的 EALA, 这样 EALA 的实现问题很自然地就转化为无中心李环面的实现问题. 称一个李环面是 fgc 的, 如果 L 看作 L 的中心子的模时是有限生成的. Neher 在文献[42]中证明了不是 A_+ 型的无中心李环面都是 fgc 的.

设 σ 是 X_+ 型有限单李代数 $\mathcal{G}$ 的 (s, r) -型有限阶自同构(见文献[43]第 8 章), 这里 $s \in \mathbb{N}^{r+1}$, $r = 1, 2$ 或 3. 那么 σ 可以扩充为无扭仿射李代数 $\mathcal{G}^{(1)} = \mathcal{G} \oplus \mathbb{C}[t, t^{-1}] \dot{\vee} \mathbb{C} \dot{\vee} \mathbb{C}d$ 的一个自同构. 记其不动点子代数为 $\mathcal{G}^{(1)}$, 那么 Kac 证明了 $\mathcal{G}^{(1)}$ 是仿射 Kac-Moody 代数 $X^{(r)}$ 的一个实现, 称为仿射李代数 $X^{(r)}$ 的 s -型实现. Allison, Berman, Faulkner 和 Pianzola 将这种过程运用到多重 Loop 代数 $\mathcal{G} \otimes A_n$ 上. 他们对一组给定的交换的 $\mathcal{G}$ 的有限阶的自同构 $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_n)$, 定义了一个子代数 $L(\mathcal{G}, \sigma)$ (见 4.4 节). 将 $\mathcal{G}$ 替换成一个中心单代数 $\mathcal{A}$ 在文献[44]中他们用 $L(\mathcal{A}, \sigma)$ 给出了一类阶化中心单代数的实现. 之后, 在文献[45]中, 他们对 $\mathcal{G}$ 的自同构 σ 做一些附加的假设. 同时假设存在 $\mathcal{G}$ 的一个交换子代数 $\mathcal{A}$, 使得其是 $\mathcal{G}$ 关于 σ 的不动点子代数的一个 Cartan 子代数, 并将子代数 $L(\mathcal{G}, \sigma)$ 记为 $L(\mathcal{G}, \sigma, \mathcal{A})$ (见 4.3 节). 他们证明了这些李代数 $L(\mathcal{G}, \sigma, \mathcal{A})$ 是 fgc 的无中心李环面, 且每个 fgc 的无中心李环面都可以实现为 $L(\mathcal{G}, \sigma, \mathcal{A})$. 对某些特许的 $\mathcal{G}, \sigma, \mathcal{A}$, 从 EALA 的分

类结果可知, 除一些例外的坐标代数外, A_+ 型 EALA 的无中心核也是 fgc 的. 这样, 结合 Neher 的结果, 他们给出了几乎所有的 EALA 的一个多重 Loop 实现.

我们知道, 与仿射情形不同的是, EALA 的无中心核上的坐标代数不一定再是交换结合的. 例如有量子换面、交替环面、Jordan 环面等等. 这就使得这些 EALA 的表示理论变得非常的复杂, 至今我们所知道的只有在 A_+ 型量子环面代数, TKK 代数上有一些零散的表示结果^[46-50]. 相对来说, Toroidal 李代数拥有比较丰富的表示结果, 同时我们知道在仿射的情形, 扭仿射李代数通常有与无扭仿射李代数相平行的表示理论. 包括有限维模的分类、可积模的分类、顶点表示等. 因此, 利用扭的 Toroidal 代数的表示理论来研究 EALA 的表示理论成为一个新的思路. 最近, 在文献[51-54]中, 他们将 Rao 在无扭 Toroidal 代数(或多重 Loop 代数)上的有限单模分类以及权空间有限维的可积单模分类结果推广到扭的情形. 我们知道在顶点算子代数(VOA)理论中, 扭 VOA 理论占据着一个重要的地位, 并且有一系列很好的结果. Billig 在文献[55]中建立了结合于 Toroidal 李代数的 VOA 理论, 他将 Toroidal 代数的泛 VOA 的一个商与一个格 VOA, 一个仿射 VOA 以及一个结合于仿射李代数 $\hat{gl}_n$ 和 Virasoro 李代数的 VOA 的张量等同起来. 之后在文献[56]中, Billig 等利用扭 VOA 的理论将其在文献[55]中得到的结果推广到扭的情形, 从而给出了一类扭 Toroidal EALA 的不可约表示. 并且, 他们具体给出了 TKK 代数的多重 Loop 实现, 因此给出了 TKK 代数的一类不可约表示.

本篇文章的结构如下: 在第 2 节中, 我们介绍了 Toroidal 代数和全 Toroidal 代数的定义, 给出了 Toroidal 代数的几种 presentation. 在第 3 节中, 我们先介绍了的 Toroidal 代数表示的一些具体构造, 包括齐次顶点表示、主顶点表示、Fermionic 表示和一类不可约表示. 接着, 我们给出了 Toroidal 代数和全 Toroidal 代数的可积单模的分类. 在最后一节中, 我们阐述了扭多重 Loop 代数与 EALA, 李换面的联系, 并构造了扭 Toroidal 李代数的一类不可约表示.

2 结构理论

2.1 Toroidal 李代数

作为多重 Loop 代数的泛中心扩张, Toroidal 代数的定义最早出现在文献[2]中. 设 $\mathcal{G}$ 是复数域上的

有限单李代数, $\langle, \rangle$ 是 $\mathcal{G}$ 上的非退化不变对称双线性. 对固定整数 n , 令 $A := A_n = \mathbf{C}[t_1^{\pm 1}, \dots, t_n^{\pm 1}]$. 设 Ω_n 是复数域上的向量空间, $\{t^r K_i, r \in \mathbf{Z}^n, 1 \leq i \leq n\}$ 构成其一组基. 这里, 对 $r = (r_1, \dots, r_n) \in \mathbf{Z}^n$, 我们记 $t^r = t_1^{r_1} \dots t_n^{r_n}$. 设 d_A 是 Ω_n 中由元素 $\sum r_i t^r K_i$ 张成的量子空间, 我们考虑商空间 $\Omega_n := \Omega_n / d_A$. 设 $K(u, r) = \sum u_i t^r K_i, u = (u_1, \dots, u_n) \in \mathbf{C}^n$. 那么 Toroidal 代数 $\tau = \mathcal{G} \leftarrow A \dot{\vee} \Omega_n$, 其李关系如下

$$[x \leftarrow t^r, y \leftarrow t^s] = [x, y] \leftarrow t^{r+s} +$$

$$\langle x, y \rangle K(r, r+s),$$

其中 $x, y \in \mathcal{G}, r, s \in \mathbf{Z}^n$ 以及 $K(u, r)$ 是中心元.

定理 1^[2,57] τ 是李代数 $\mathcal{G} \leftarrow A$ 的泛中心扩张.

当 $n \geq 2$ 时, τ 的中心是无限维的. 这使得 Toroidal 代数极度“退化”, 为此我们需要给 τ 添加一些导子. 设 $\mathcal{D}$ 是 A 上的导子代数, 那么 $\mathcal{D}$ 有一组基 $\{t^r d_i, r \in \mathbf{Z}^n, 1 \leq i \leq n\}$, 其中 $d_i := t_i \frac{d}{dt_i}$. 记 $D(u, r) = \sum u_i t^r d_i, u \in \mathbf{C}^n$. 定义全 Toroidal 代数 $\hat{\tau} = \mathcal{G} \leftarrow A \dot{\vee} \Omega_n \dot{\vee} \mathcal{D}$ 是 Toroidal 代数和导子代数的半直积, 其李关系如下^[3]:

$$[D(u, r), D(v, s)] = D((u, s)v - (v, r)u, r+s) -$$

$$(u, s)(v, r)K(r, r+s),$$

$$[D(u, r), K(v, s)] = (u, s)K(v, r+s) + (u, v)K$$

$$(r, r+s),$$

$$[D(u, r), x \leftarrow t^s] = (u, s)x \leftarrow t^{r+s},$$

其中 $u, v \in \mathbf{C}^n, r, s \in \mathbf{Z}^n, x \in \mathcal{G}$ 以及 $(\cdot, \cdot)$ 是 $\mathbf{C}^n$ 上的内积.

由于 $\mathcal{D}$ 与 Ω_n 的李乘非平凡, $\hat{\tau}$ 的中心是有限维的, 进而拥有更好的表示理论.

对任意的 $B \in GL(n, \mathbf{Z})$, 我们可以定义一个 $\hat{\tau}$ 的自同构 B 如下:

$$B.X \leftarrow t^r = X \leftarrow t^{B \cdot r},$$

$$B.D(u, r) \mapsto D(B \cdot u, B \cdot r),$$

$$B.K(u, r) \mapsto K((B^t)^{-1} \cdot u, B \cdot r),$$

我们将这个过程称为坐标的变换.

注 1 事实上, 对任意的 $\varepsilon \in H^2(\mathcal{G}, \Omega_n)$, 我们都可以空间 $\tau \dot{\vee} \mathcal{D}$ 上定义一个李代数结构. 上面给出的李乘用的是 $H^2(\mathcal{G}, \Omega_n)$ 中的一个特许的 $\mathbb{Z}$ 上同调 ε (见 4.4 节).

2.2 Presentation I

在文献[2]中, 作者用无扭仿射李代数的 presentation 首次给出了 2-Toroidal 李代数的一个 presentation. 之后该结果在文献[3]中被推广到任意的 n .

设 $A = (a_{ij})_{i,j=0}^l$ 是无扭仿射李代数 $X_l^{(1)} (X = A, \dots, G)$ 的 Cartan 矩阵. 设 Δ 是其相对应的根系, $\Pi = \{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_l\}$ 是其单根系以及 $Q = \mathbf{Z}\alpha_0 \dot{+} \dots \dot{+} \mathbf{Z}\alpha_l$ 是根格. 那么在 Q 上有一个对称双线性形 $(\cdot, \cdot)$ 使得 $2(\alpha, \alpha)/(\alpha, \alpha) = a_{ij}$. 设 $\dot{A} = (a_{ij})_{i,j=1}^l, \dot{Q} = \mathbf{Z}\alpha_1 \dot{+} \dots \dot{+} \mathbf{Z}\alpha_l, \dot{\Pi} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_l\}$. 记 $\delta = \sum_{i=0}^l n_i \alpha_i, n_i \in \mathbf{Z}^+, gcd(n_0, \dots, n_l) = 1$, 是其虚根. 若 $(\alpha, \alpha) \neq 0$, 令 $\alpha^\vee := 2\alpha/(\alpha, \alpha)$ 是对应于 α 余根. 而虚根 $\delta = \sum_{i=0}^l n_i^\vee \alpha_i^\vee, n_i^\vee := n_i(\alpha, \alpha)/2$.

设 $\bar{r} = (r_1, \dots, r_{n-1}) \in \mathbf{Z}^{n-1}$. 考虑复数域上李代数 $\mathcal{L}$, 其有生成元 $(0 \leq i \leq l, \bar{r}, \bar{s}, \bar{m} \in \mathbf{Z}^{n-1})$.

$$\mathfrak{F}(\bar{s}), \alpha^\vee(\bar{r}), X_{\bar{m}}(\pm \alpha)$$

和生成关系:

$$\mathfrak{F}(\bar{s}) + \mathfrak{F}(\bar{s}) = \mathfrak{F}_{\bar{k}}(\bar{s}),$$

$$\mathfrak{F}(\bar{r}) = 0, \mathfrak{F}(\bar{s}) \text{ 是中心元},$$

$$[\alpha^\vee(\bar{r}), \alpha_i^\vee(\bar{s})] = (\alpha, \alpha_i) \mathfrak{F}(\bar{r} + \bar{s}),$$

$$[\alpha^\vee(\bar{r}), X_{\bar{m}}(\pm \alpha)] = \pm(\alpha, \alpha) X_{\bar{m} + \bar{r}}(\pm \alpha),$$

$$[X_{\bar{m}}(\alpha), X_{\bar{n}}(-\alpha)] = -\delta_{\bar{m}}(\alpha^\vee(\bar{m} + \bar{n}) +$$

$$\frac{2}{(\alpha, \alpha)} \delta_{\bar{m}}(\bar{n} + \bar{n})),$$

$$[X_{\bar{m}}(\pm \alpha), X_{\bar{n}}(\pm \alpha)] = 0,$$

$$ad X_{\bar{0}}(\pm \alpha)^{1-a_{ij}} X_{\bar{m}}(\pm \alpha_j) = 0, (i \neq j).$$

设 $\mathcal{G}$ 是结合于 Cartan 矩阵 $\dot{A}$ 的有限单李代数, $e_i, f_i, h_i, 1 \leq i \leq l$ 是 $\mathcal{G}$ 的一组 Chevalley 生成元. 令 $\mathcal{L} = \mathbf{C} \leftarrow_{\mathbf{Z}} \dot{Q}$. 设 θ 是最高根, 选取 $e_0 \in \mathcal{G}, f_0 \in \mathcal{L}$ 使得 $\text{span}\{e_0, f_0, h_0\}$ 同构于 $sl_2(\mathbf{C})$, 其中 $h_0 = \sum_{i=1}^l n_i^\vee h_i \in \mathcal{L}$.

定理 2^[3] 下面的映射给出一个从 $\mathcal{L}$ 到 τ 的李同构

$$\mathfrak{F}(\bar{s}) \mapsto K(\bar{r}, \bar{s}),$$

$$X_{\bar{m}}(\alpha) \mapsto e_i \leftarrow t^{\bar{m}}, i = 1, 2, \dots, l,$$

$$X_{\bar{m}}(-\alpha) \mapsto f_i \leftarrow t^{\bar{m}}, i = 1, 2, \dots, l,$$

$$X_{\bar{m}}(\alpha_0) \mapsto e_0 \leftarrow t^{\bar{m}} t_n,$$

$$X_{\bar{m}}(-\alpha_0) \mapsto f_0 \leftarrow t^{\bar{m}} t_n^{-1},$$

$$\alpha^\vee(\bar{k}) \mapsto h_i \leftarrow t^{\bar{k}}, i = 1, 2, \dots, l,$$

$$\alpha_0^\vee(\bar{k}) \mapsto h_0 \leftarrow t^{\bar{k}} + t^{\bar{k}} t_n^{-1} K_n.$$

注 2 当 $n = 2$ 时, 由 $\mathfrak{F}(\bar{r}) = 0$ 和 $\delta_m(r) + \delta_n(r) = \delta_{m+n}(r), r, m, n \in \mathbf{Z}$ 知 $\delta_m(r) = 0$ 若 $r \neq 0$ 以及 $\delta_n(0) = m\delta_1(0)$. 那么 $\mathfrak{F} := \mathfrak{F}(0), \alpha^\vee(k), X_k(\pm \alpha), k \in \mathbf{Z}, i = 0, \dots, l$ 构成 $\mathcal{L}$ 的一组生成元^[2]. 这样 2-Toroidal 李

代数就拥有一个很好的表述, 文献[2] 中的顶点表示就是利用该 presentation 得到的. 另外, 文献[33-35, 58] 中也利用这个 presentation 得到了一些 2-toroidal 李代数的模.

2.3 Presentation II

本节的表述来源于文献[3], 其被引进的目的是用来构造 Toroidal 代数的齐次顶点表示(见 3.1 节). 我们熟知, 定点图为单边的有限单李代数的根格上可以定义一个二上循环. 利用该二上循环可以给出有限单李代数的一个实现(见文献[43] 第 6 章) 以及得到一个结合于根格的扭群代数. 在文献[59] 中, 正是利用该群代数得到了仿射李代数的齐次顶点表示.

我们熟知在 $\mathcal{S}$ 的根格 $\dot{Q}$ 上, 存在二上循环 $\epsilon: \dot{Q} \times \dot{Q} \rightarrow \{\pm 1\}$, 使得

$$\begin{aligned}\epsilon(\alpha, \alpha) &= (-1)^{\frac{(\alpha, \alpha)}{2}}, \epsilon(\alpha, \beta)\epsilon(\beta, \alpha) = (-1)^{(\alpha, \beta)}, \\ \epsilon(\alpha + \beta, \gamma) &= \epsilon(\alpha, \gamma)\epsilon(\beta, \gamma), \\ \epsilon(\alpha, \beta + \gamma) &= \epsilon(\alpha, \beta)\epsilon(\alpha, \gamma), \alpha, \beta, \gamma \in \dot{Q}.\end{aligned}$$

命题 1^[3, 57] τ 有如下的 presentation.
生成元:

$$X_\alpha \leftarrow_{t^r}^r, h \leftarrow_{t^s}^s, \Omega_n, \alpha \in \dot{\Delta}, h \in \mathbb{Z}, r, s \in \mathbb{Z}^n,$$

生成关系:

$$\begin{aligned}X_\alpha \leftarrow_{t^r}^r (X_\beta \leftarrow_{t^s}^s) &= X_\beta \leftarrow_{t^r}^r X_\alpha \leftarrow_{t^s}^s + X_\alpha \leftarrow_{t^r}^r X_\beta \leftarrow_{t^s}^s, \\ [X_\alpha \leftarrow_{t^r}^r, X_\beta \leftarrow_{t^s}^s] &= \begin{cases} \epsilon(\alpha, \beta) X_{\alpha+\beta} \leftarrow_{t^{r+s}}^{r+s}, & \text{若 } \alpha + \beta \in \dot{\Delta} \\ 0, & \text{若 } \alpha + \beta \notin \dot{\Delta} \cup \{0\} \\ \epsilon(\alpha - \alpha)(\alpha^\vee \leftarrow_{t^{r+s}}^{r+s} + K(r, r+s)), & \text{若 } \alpha + \beta = 0 \end{cases} \\ [h \leftarrow_{t^r}^r, X_\alpha \leftarrow_{t^s}^s] &= \alpha(h) X_\alpha \leftarrow_{t^{r+s}}^{r+s}, \\ [h_i \leftarrow_{t^r}^r, h_j \leftarrow_{t^s}^s] &= (h_i, h_j) K(r, r+s), \\ \Omega_n &\text{ 是中心.}\end{aligned}$$

2.4 Presentation III

仿射李代数 $A^{(1)}$ 的主顶点表示首次在文献[21] 中被引进, 随后在文献[60] 中给出了一般性的构造. 该表示的构造利用了仿射李代数的主实现, 其中的关键在于找出仿射李代数的主 Heisenberg 李代数. 在文献[23] 中, 作者推广了文献[60] 的结果, 得到了 Toroidal 代数上的主顶点表示. 以下内容详见文献[43] 第 6 章或文献[23].

设 h 是 $\mathcal{S}$ 的 Coxeter 数, 那么 $\mathcal{S}$ 上的主自同构 ν 由条件

$$\nu(e_j) = \exp\left(\frac{2\pi i}{h}\right) e_j, j = 0, 1, \dots, l.$$

唯一决定. 显然, ν 诱导出 $\mathcal{S}$ 上的一个 $\mathbb{Z}_h$ 阶化, 即

$$\mathcal{S} = \dot{\bigcup}_{j \in \mathbb{Z}_h} \mathcal{S}_j, \mathcal{S}_j = \{g \in \mathcal{S} | \nu(g) = \exp\left(\frac{2j\pi i}{h}\right) g\}.$$

令 $\bar{e} = \sum_{i=0}^l e_i$ 是循环元以及 $\mathfrak{a}$ 是 $\bar{e}$ 的中心化子.

那么 $\mathfrak{a}$ 是 $\mathcal{S}$ 的 Cartan 子代数并且存在基 $T_j \in \mathcal{S}_j, j = 1, \dots, l$ 使得 $(T_i, T_{l+1-j}) = h\delta_{ij}$. 这里 $1 = m_1 \leq m_2 \leq \dots \leq m_l = h-1$ 是 $\mathcal{S}$ 的指数. 定义李代数 $\tau = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \mathcal{S}_j \leftarrow_{t^j}^j \mathbb{Q}[t^{\pm 1}, \dots, t_n^{\pm 1}] \leftarrow_{t^n}^n \Omega_n$, 其李关系为

$$[x \leftarrow_{t^r}^r, y \leftarrow_{t^s}^s] = [xy] \leftarrow_{t^{r+s}}^{r+s} + K(r', r+s),$$

其中 $r' = (r_1, \dots, r_{n-1}, \frac{r_n}{h})$.

对 $\alpha = \sum_{i=1}^n k_i \alpha_i \in \dot{\Delta}$, 定义 α 的高度 $ht(\alpha) = \sum k_i$. 选取任意的非零根向量 e^α , 那么有:

命题 2^[23] 李代数 τ 同构于 τ_s . 具体的对应如下:

$$\begin{aligned}e^\alpha \leftarrow_{t^r}^r &\mapsto e^\alpha \leftarrow_{t^{\bar{r}}}^{\bar{r}} t_n^{hr_n + ht(\alpha)}, \\ \alpha^\vee \leftarrow_{t^r}^r &\mapsto \alpha^\vee \leftarrow_{t^{\bar{r}}}^{\bar{r}} t_n^{hr_n} + \frac{ht(\alpha)}{h} t^{\bar{r}} t_n^{hr_n} K_n,\end{aligned}$$

$$K(r, s) \mapsto K(r, s),$$

其中 $r, s \in \mathbb{Z}^n, \bar{r} = (r_1, \dots, r_{n-1})$.

设 $\dot{\Delta}$ 是 $\mathcal{S}$ 关于主 Cartan 子代数 $\mathfrak{a}$ 的根系. 对每个 $\alpha \in \dot{\Delta}$, 选取非零根向量 A^α . 因为 $\dot{\Delta}$ 关于 ν 有 l 个轨道且每个轨道的长度为 h , 我们可以从不同的轨道选取根 $\beta_1, \dots, \beta_l$ 使得 $A^{\beta_1}, \dots, A^{\beta_l}$ 张成 $\mathcal{S}$. 这里 $A_j^\alpha \in \mathcal{S}_j$, 使得 $A^\alpha = \sum_{j=1}^h A_j^\alpha$. 那么, 集合 $\{A_j^{\beta_i} \leftarrow_{t^{h_i}}^{h_i}, T_j \leftarrow_{t^{h_j}}^{h_j}, K_n, i = 1, \dots, l, j \in \mathbb{Z}\}$ 构成仿射子代数 $\mathcal{S} = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \mathcal{S}_j \leftarrow_{t^j}^j \mathbb{Q}[t^{\pm 1}] \leftarrow_{t^n}^n \mathbb{C}K_n$ 的一组基.

注 3 在文献[43] Thm 8.7 中, Kac 给出了仿射李代数的 s -实现, 其中 $s = (s_0, \dots, s_l) \in \mathbb{N}^{l+1}$. 选取 $s = (1, \dots, 1)$ 就是所谓的主实现. 在文献[24] 中, 作者给出了 Toroidal 代数上的 s -实现, 推广了命题 2.

2.5 Presentation IV

在文献[5] 中, 作者利用 Heisenberg 代数生成元和仿射李代数的 Chevalley 生成元以及一些其他的关 系, 给出了椭圆李代数的一个 presentation. 受该工作的影响, 文献[4] 利用广义 Heisenberg 代数的生成元和有限单李代数的 Chevalley 生成元给出了 2 个 Toroidal 代数的新 presentation.

设 $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ 是李代数, 定义他们的合并 $\mathcal{A}^* \mathcal{B} = T(\mathcal{A} \dot{\bigcup} \mathcal{B})/I$, 其中 I 是由元素 $g_i \leftarrow_{h_i}^{h_i} - h_i \leftarrow_{g_i}^{g_i} - [g_i, h_i], g_i, h_i \in \mathcal{A}$ 生成的理想. 在不引起混淆的情况下, 我们仍记 $\mathcal{A}^* \mathcal{B}$ 的商为 $\mathcal{A}^* \mathcal{B}$.

现在我们给出广义 Heisenberg 代数 $\mathcal{H}_{n-1}$ 的定义, 其有生成元

$$\alpha^\vee(\bar{m}), \delta(\bar{s}), \bar{m}, \bar{r}, \bar{s} \in \mathbf{Z}^{n-1}, 1 \leq i \leq l,$$

和生成关系

$$\delta(\bar{s}) + \delta(\bar{s}) = \delta_{\bar{r}+\bar{k}}(\bar{s}),$$

$$\delta(\bar{r}) = 0, \delta(\bar{s}) \text{ 是中心元},$$

$$[\alpha^\vee(\bar{r}), \alpha^\vee(\bar{s})] = (\alpha, \alpha) \delta(\bar{r} + \bar{s}).$$

设 $e_{\pm \alpha_i}, \alpha^\vee, 1 \leq i \leq l$ 是有限单李代数的一组 Chevalley 生成元. 设 $\mathcal{H}_{n-1} * \mathcal{S}$ 是广义 Heisenberg 代数 $\mathcal{H}_{n-1}$ 和有限单李代数 $\mathcal{S}$ 的合并, 其合并关系是

$$\alpha^\vee = \alpha^\vee,$$

$$[[e_{\pm \alpha_i}, \alpha^\vee(\bar{m})], \alpha^\vee(\bar{n})] = \frac{1}{2}(\alpha_i, \alpha_j)(\alpha_i, \alpha_k)[e_{\pm \alpha_i}, \pm \alpha^\vee(\bar{m} + \bar{n})],$$

$$[[\alpha^\vee(\bar{m}), e_{\alpha_j}], e_{-\alpha_j}] = -(\alpha, \alpha) \alpha^\vee(\bar{m}),$$

$$[[\alpha^\vee(\bar{m}), e^\beta], e^\gamma] = 0, \text{ 对 } \beta, \gamma \in \pm \dot{\Pi} \text{ 和 } (\beta, \gamma) \geq 0,$$

其中 $i, j, k = 1, \dots, l$ 和 $\bar{m}, \bar{n} \in \mathbf{Z}^{n-1}$.

定理 3^[41] $\mathcal{H}_{n-1} * \mathcal{S}$ 同构于 Toroidal 李代数 τ

设李代数 $\tilde{\mathcal{S}}$ 有生成元

$$e_{\pm \alpha_i}(\bar{m}), \alpha^\vee, i = 1, \dots, l, \bar{m} \in \mathbf{Z}^{n-1},$$

和生成关系

$$e_{\pm \alpha_i}(\bar{0}) \text{ 和 } \alpha^\vee \text{ 是单李代数 } \mathcal{S} \text{ 的一组 Chevalley 生成元},$$

$$[\alpha^\vee, e_{\pm \alpha_i}(\bar{m})] = \pm(\alpha_i, \alpha_j) e_{\pm \alpha_i}(\bar{m}),$$

$$[e^\beta(\bar{m}), e^\gamma(\bar{n})] = 0, \text{ 对 } \beta, \gamma \in \pm \dot{\Pi} \text{ 和 } (\beta, \gamma) \geq 0,$$

$$[[e_{\alpha_i}(\bar{m}), e_{-\alpha_j}(\bar{n})], e_{\pm \alpha_j}(\bar{s})] = \pm(\alpha_i, \alpha_j) e_{\pm \alpha_j}(\bar{m} + \bar{n} + \bar{s}),$$

定理 4^[41] $\tilde{\mathcal{S}}$ 同构于 Toroidal 李代数 τ

3 表示理论

3.1 齐次顶点表示

设 $\mathcal{S}$ 是复数域上的有限单李代数以及其定点图是单边的, $\alpha_1, \dots, \alpha_l$ 是其单根系. 令 Γ 是由 $\alpha_1, \dots, \alpha_l, \delta_1, \dots, \delta_{n-1}, \Lambda_1, \dots, \Lambda_{n-1}$ 张成的整格, Q 是 Γ 中由 $\alpha_1, \dots, \alpha_l, \delta_1, \dots, \delta_{n-1}$ 张成的子格. 设 (a_{ij}) 是结合于 $\mathcal{S}$ 的 Cartan 矩阵, $(,)$ 是 Γ 上的对称双线性形, 使得

$$(\alpha_i, \alpha_j) = a_{ij}, (\delta_i, \delta_j) = \delta_{ij},$$

其他的值均为零.

设 $H = \mathbf{C} \leftarrow_{\mathbf{Z}} \Gamma$, 那么有李代数 $\hat{H} = \sum_{0 \neq m \in \mathbf{Z} H} (m) \hat{\mathbf{Y}} \mathbf{C}$. 其中 $H(m) \cong H$ 作为向量空间. $\hat{H}$ 上的李

结构如下

$$[\alpha(m), \beta(n)] = \delta_{m+n,0}(\alpha, \beta)c.$$

设 $\hat{H} = \sum_{m \in \mathbf{Z}} H(m)$, 那么对称代数 $S(\hat{H}^-)$ 上

有一个自然的 $\hat{H}^-$ 模结构, 使得 c 的作用是恒等变换, $\alpha(m), \alpha \in \Gamma, m < 0$ 的作用如同左乘算子, $\alpha(m), \alpha \in \Gamma, m > 0$ 的作用等同于 $S(\hat{H}^-)$ 上由 $\beta(n) \mapsto \delta_{m+n,0}(\alpha, \beta), \beta \in \Gamma, n < 0$ 唯一决定的导子.

回忆 2.3 节中定义的二上循环 ϵ . 设 $\mathbf{C}[Q]$ 为扭的群代数, 其乘法是 $e^\alpha e^\beta = \epsilon(\alpha, \beta) e^{\alpha+\beta}$. 那么 $\mathbf{C}[Q]$ 是一个 $\mathbf{C}[Q]$ -模使得 $e^\alpha e^\gamma = \epsilon(\alpha, \gamma) e^{\alpha+\gamma}, \alpha \in Q, \gamma \in \Gamma$, 其中 $\epsilon(\alpha, \Lambda_j) = 1, \alpha \in Q, 1 \leq j \leq n$. 我们考虑 Fork 空间 $V(\Gamma) := \mathbf{C}[Q] \leftarrow S(\hat{H}^-)$. 在 $V(\Gamma)$ 上定义算子 $\alpha(m), z^\alpha, \alpha \in Q, m \in \mathbf{Z}$ 如下:

$$\alpha(m)(e^\gamma \leftarrow u) = e^\gamma \leftarrow \alpha(m)u, m \neq 0,$$

$$\alpha(0)(e^\gamma \leftarrow u) = (\alpha, \gamma) e^\gamma \leftarrow u, m = 0,$$

$$z^\alpha(e^\gamma \leftarrow u) = z^{(\alpha, \gamma)} e^\gamma \leftarrow u,$$

其中 $\gamma \in \Gamma, u \in S(\hat{H}^-)$. 对 $\alpha \in Q$, 定义顶点算子

$$E^\pm(\alpha, z) = \exp\left(-\sum_{n \geq 0} \frac{\alpha(n)}{n} z^{-n}\right),$$

以及

$$X(\alpha, z) = E^-(\alpha, z) z^{\alpha + \frac{(\alpha, \alpha)}{2}} e^\alpha E^+(\alpha, z).$$

设 $X(\alpha, z) = \sum_{m \in \mathbf{Z}} X_m(\alpha) z^{-m}$. 对 $\alpha \in Q$, 定义

$$\alpha(z) = \sum_{k \in \mathbf{Z}} \alpha(k) z^{-k},$$

$$\bar{\alpha}(z) = \sum_{0 \leq k \in \mathbf{Z}} \alpha(k) z^{-k},$$

$$\tilde{\alpha}(z) = \sum_{0 > k \in \mathbf{Z}} \alpha(k) z^{-k},$$

那么对 $\gamma \in \Gamma$, 我们可以定义正规序

$$:\alpha(z)X(\gamma, z): = \bar{\alpha}(z)X(\gamma, z) + X(\gamma, z)\alpha^+(z),$$

设 $:\alpha(z)X(\gamma, z): = \sum_{m \in \mathbf{Z}} m T_m^\alpha(\gamma) z^{-m}$. 对 $r = (r_1, \dots, r_n) \in \mathbf{Z}^n$, 记 $\bar{r} = (r_1, \dots, r_{n-1})$ 和 $\delta = r_1 \delta_1 + \dots + r_{n-1} \delta_{n-1}$. 那么结合命题 1, 我们有

定理 5^[31] 下面的映射给出 Toroidal 代数在 $V(\Gamma)$ 上的一个忠实表示:

$$X_\alpha \leftarrow_{t^r} X_{r_n}(\alpha + \delta_r),$$

$$\alpha^\vee \leftarrow_{t^r} T_{r_n}^\alpha(\delta_r),$$

$$K(r, s) \mapsto \sum_{i=1}^{n-1} r_i T_{r_n}^{\delta_i}(\delta) + r_n X_{r_n}(\delta),$$

其中 $r, s \in \mathbf{Z}^n, \alpha \in \Delta$

注 4 当 $\mathcal{S}$ 所对应的定点图是非单边时, 在文献 [28-32] 中构造了这种类型的 Toroidal 代数的齐次顶

点表示.

3.2 主顶点表示

类似仿射的情形, 主顶点表示的构造关键在于给出主 Heisenberg 子代数. 为此我们引进序列 $\{b_i, i \in \mathbb{Z}\}$, 其中 $b_{i+j} = m_i + j, j \in \mathbb{Z}, i = 1, \dots, l$. 注意到 $b_{-i} = -b_i$. 那么定义 τ_s 的主 Heisenberg 子代数 $\mathfrak{h} = \text{spanc}\{T_i \xleftarrow{b_i} t_n^{b_i}, t_n^{b_i} K_p, K_n\}, i \in \mathbb{Z}, p = 1, \dots, n-1$, 其李运算如下

$$[T_i \xleftarrow{b_i} t_n^{b_i}, T_{1-i} \xleftarrow{-b_i} t_n^{-b_i}] = b_i \delta_{ij} K_n.$$

从而 $\mathfrak{h}$ 在空间 $F = \mathbb{C}[x_i, u_{\bar{p}}, v_{\bar{p}}]_{i \in \mathbb{Z}_+^{1, \dots, n-1}}$ 上有一个自然的模结构, 具体如下

$$T_i \xleftarrow{b_i} t_n^{b_i} \rightarrow \frac{\partial}{\partial x_i}, T_{1-i} \xleftarrow{-b_i} t_n^{-b_i} \rightarrow b_i x_i,$$

$$t_n^{b_i} K_p \mapsto \frac{\partial}{\partial u_p}, t_n^{-b_i} K_p \mapsto i u_{\bar{p}},$$

$$K_p \mapsto 0, K_n \mapsto id,$$

其中 $i \geq 1, p = 1, \dots, n-1$.

对 $\bar{r} = (r_1, \dots, r_{n-1}) \in \mathbb{Z}^{n-1}$, 定义 F 上的顶点算子

$$K_n(z, \bar{r}) = \exp\left(\sum_{p=1}^{n-1} r_p \sum_{j \geq 1} z^{jh} u_{jp}\right) \exp\left(-\sum_{p=1}^{n-1} r_p \sum_{j \geq 1} \frac{z^{-jh}}{j} \frac{\partial}{\partial u_p}\right),$$

$$K_p(z, \bar{r}) = \left(\sum_{i \geq 1} i u_{pi} z^{b_i} + \sum_{i \geq 1} \frac{\partial}{\partial u_i} z^{b_i}\right) K_n(z, \bar{r}),$$

$$p = 1, \dots, n-1,$$

$$T_i(z, \bar{r}) = \left(\sum_{j \geq 1} (jh - m_i) x_{j+l-1} z^{jh-m_i} + \sum_{j \geq 1} \frac{\partial}{\partial x_{j+l-i}} z^{-jh-m_i}\right) K_n(z, \bar{r}), i = 1, \dots, l.$$

设 Λ_0 是仿射代数 $\mathcal{A} = \mathcal{S}^{\leftarrow} \mathbb{C}[t_n, t_n^{-1}] \hat{\vee} \mathbb{C} K_n$ 的基本权, 即 $\Lambda_0(\alpha^\vee) = 0, 1 \leq i \leq l, \Lambda_0(K_n) = 0$. 令常数 $\lambda = \alpha(T_i), \alpha \in \Delta$. 那么我们定义算子

$$A^\alpha(z, \bar{r}) = \Lambda_0(A_0^\alpha \xleftarrow{0} t_n^0) \exp\left(\sum_{i \geq 1} \lambda_{\alpha}^i z^{b_i}\right)$$

$$\exp\left(-\sum_{i \geq 1} \lambda_{-\alpha}^i \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{z^{-b_i}}{b_i}\right) K_n(z, \bar{r}).$$

下面我们在 F 上给出一个 τ_s 的忠实表示, 从而由命题 2 知我们得到了一个 Toroidal 李代数 τ 的忠实表示.

定理 6^[27] 下面的映射给出 τ 在 F 上的一个忠实表示:

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} z(t_n^{jh} K_p) z^{-jh} \mapsto K_p(z, \bar{r}), p = 1, \dots, n,$$

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} z(T_i \xleftarrow{b_i} t_n^{b_i}) z^{-jh-m_i} \mapsto T_i(z, \bar{r}),$$

$$i = 1, \dots, l,$$

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} z(A_i^\alpha \xleftarrow{0} t_n^j) z^{-j} \mapsto A_i^\alpha(z, \bar{r}).$$

注 5 在文献[22]中, 作者构造了 A_1 型 Toroidal 李代数的主顶点表示.

注 6 在文献[23]中, 作者得到了一个添加了一些导子的李代数 $\tau^* = \tau \hat{\vee} \mathcal{D}$ 的忠实主顶点表示, 其中 $\mathcal{D} = \text{spanc}\{t^r t_i \frac{d}{dt_i} | r \in \mathbb{Z}^n, 1 \leq i \leq r\}$. 定理 6 是文献[23]主定理的一个显然推论.

注 7 在齐次和主顶点算子表示的构造中我们发现这类模具有特点

$$x(z, \bar{r}) K_n(z, \bar{s}) = x(z, \bar{r} + \bar{s}), x \in \mathcal{S}$$

$$K_p(z, \bar{r}) K_n(z, \bar{s}) = K_p(z, \bar{r} + \bar{s}), p = 1, \dots, n.$$

Rao 在文献[24]中对满足这类性质的模构造了其上面的 $\mathcal{Z}$ -代数.

3.3 Fermionic 表示

在这节里我们将利用注 2 给出 X 型 2-Toroidal 李代数($X = A_{l-1}, B_l, C_l, D_l$)的 Fermionic 表示. 设 $P_0 = \mathbb{Z} \epsilon_1 \hat{\vee} \dots \hat{\vee} \mathbb{Z} \epsilon_l$ 是一个秩为 l 的格带有一个对称双线性型 $(,)$ 使得 $(\epsilon_i, \epsilon_j) = \delta_{ij}$. 那么典型有限单李代数的单根系可以实现为:

$$\alpha = \epsilon - \epsilon, \dots, \alpha_{l-1} = \epsilon_{l-1} - \epsilon; X = A_{l-1}.$$

$$\alpha = \epsilon - \epsilon, \dots, \alpha_{l-1} = \epsilon_{l-1} - \epsilon; \alpha = \epsilon; X = B_l.$$

$$\alpha = \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\sqrt{2}}, \dots, \alpha_{l-1} = \frac{\epsilon_{l-1} - \epsilon_l}{\sqrt{2}}, \alpha = \sqrt{2}\epsilon, X = C_l.$$

$$\alpha = \epsilon - \epsilon, \dots, \alpha_{l-1} = \epsilon_{l-1} - \epsilon, \alpha = \epsilon_{l-1} + \epsilon; X = D_l.$$

对每种类型, 我们定义格 P 和其上面的一个对称双线性型 $(,)$ 如下

$$P = \mathbb{Z} \delta \hat{\vee} \mathbb{Z} \epsilon_1 \hat{\vee} \dots \hat{\vee} \mathbb{Z} \epsilon_l,$$

$$(\epsilon, \epsilon) = \delta_{ij}, (\delta, P) = 0, X = A_{l-1}, B_l, D_l;$$

$$P = \mathbb{Z} \delta \hat{\vee} \mathbb{Z} \epsilon_1 \hat{\vee} \dots \hat{\vee} \mathbb{Z} \epsilon_l \hat{\vee} \mathbb{Z} \epsilon \hat{\vee} \dots \hat{\vee} \mathbb{Z} \epsilon,$$

$$(\epsilon, \epsilon) = (\epsilon, \epsilon) = \delta_{ij} (\epsilon, \epsilon) = (\delta, P) = 0, X = C_l.$$

定义 $\beta = -\delta + \epsilon$, 对 $X = A_{l-1}, B_l, D_l$, 以及 $\beta = -\sqrt{2}\delta + \epsilon, \bar{\beta} = -\sqrt{2}\delta + \epsilon$, 对 $X = C_l$.

设 $P^* = \{a^* | a \in P\}$ 是 P 的一个复制, 考虑向量空间

$$\mathcal{C} = \begin{cases} P \subset \hat{\vee} P^*, X = A_{l-1}, C_l, D_l; \\ P \subset \hat{\vee} P^* \subset \mathcal{C}, X = B_l. \end{cases}$$

其中 $Q \subset \mathcal{C}, Q = P, P^*$. 那么 $\mathcal{C}$ 带有一个对称双线性型如下

$$\langle a, b^* \rangle^* = (a, b), \langle a, b \rangle = \langle a^*, b^* \rangle = 0,$$

$$\langle e, e \rangle = -1, \langle e, a \rangle = \langle e, a^* \rangle = 0.$$

其中 $a, b \in P$.

设 Clifford 代数 Cl 是由元素 $u(m), u \in \mathcal{C}, m \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}$ 生成, 其生成关系是

$$u(m)v(n) + v(n)u(m) = \langle u, v \rangle \delta_{m+n,0}, u, v \in$$

$$\mathcal{C}, m, n \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}.$$

设 V 是由一个向量 v_0 生成的单 Cl -模并满足 $u(m) \cdot v_0, \forall m > 0, u \in \mathcal{C}$ 我们给出 Cl 上的一个正规序

$$: u(m)v(n) : = \begin{cases} u(m)v(n), & m < 0 \\ v(n)u(m), & m > 0 \end{cases}$$

$$\text{对 Fermionic 域 } u(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}} u(n)z^{-n-\frac{1}{2}},$$

$$v(w) = \sum_{n \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}} v(n)w^{-n-\frac{1}{2}}, \text{ 我们定义}$$

$$: u(z)v(w) : = \sum_{m, n \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}} : u(m)v(n) : z^{-m-\frac{1}{2}} w^{-n-\frac{1}{2}}.$$

注意到: $u(z)v(z)$ 在 V 上的作用是有意义的. 回忆注 2 中给出的 2-Toroidal 李代数的表述, 定义

$$\alpha^\vee(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha^\vee(n) z^{-n-1}, X(\pm \alpha_i, z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} X_n(\pm \alpha_i) z^{-n-1},$$

其中 $i = 0, 1, \dots, l$.

定理 7^[34] 下面的映射给出 X 型 2-Toroidal 李代数($X = A_{l-1}, B_l, C_l, D_l$) 在 V 上的一个表示, 其中 t 的作用是恒等变换以及 $1 \leq i \leq l-1$.

$$\begin{aligned} X(\alpha_0, z) = & \begin{cases} : \epsilon(z) \beta^*(z) : & X = A_{l-1} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} (: \beta^*(z) \epsilon^*(z) : - : \epsilon^*(z) \bar{\beta}^*(z) :) & X = C_l \\ \beta^*(z) \epsilon(z) : & X = B_l, D_l \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X(-\alpha_0, z) = & \begin{cases} : \epsilon(z) \beta(z) : & X = A_{l-1} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} (: \beta(z) \epsilon(z) : - : \epsilon(z) \bar{\beta}(z) :) & X = C_l \\ \beta(z) \epsilon(z) : & X = B_l, D_l \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X(\alpha_i, z) = & \begin{cases} : \epsilon(z) \epsilon_{i+1}^*(z) : & X = A_{l-1}, B_l, D_l \\ : \epsilon(z) \epsilon_{i+1}^*(z) : - : \epsilon_{i+1}^*(z) \epsilon(z) : & X = C_l \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X(-\alpha_i, z) = & \begin{cases} : \epsilon^*(z) \epsilon_{i+1}(z) : & X = A_{l-1}, B_l, D_l \\ : \epsilon^*(z) \epsilon_{i+1}(z) : - : \epsilon_{i+1}^*(z) \epsilon(z) : & X = C_l \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X(\alpha, z) = & \begin{cases} \sqrt{2} : \epsilon(z) e(z) : & X = B_l \\ : \epsilon(z) \epsilon^*(z) : & X = C_l \\ : \epsilon_{-1}(z) \epsilon(z) : & X = D_l \end{cases} \end{aligned}$$

$$X(-\alpha, z) =$$

$$\begin{cases} \sqrt{2} : e(z) \epsilon^*(z) : & X = B_l \\ : \epsilon^*(z) \epsilon(z) : & X = C_l \\ : \epsilon_{-1}^*(z) \epsilon^*(z) : & X = D_l \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \alpha^\vee(z) = & \begin{cases} : \epsilon(z) \epsilon^*(z) : - : \beta(z) \beta^*(z) : & X = A_{l-1} \\ : \epsilon^*(z) \epsilon(z) : + : \beta^*(z) \beta(z) : & X = B_l, D_l \\ \frac{1}{2} (: \epsilon^*(z) \epsilon(z) : + : \beta^*(z) \beta(z) : + \\ : \epsilon^*(z) \epsilon(z) : + : \bar{\beta}^*(z) \bar{\beta}(z) :) & X = C_l \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha^\vee(z) = & \begin{cases} : \epsilon(z) \epsilon^*(z) : - : \epsilon_{i+1}^*(z) \epsilon_{i+1}^*(z) : & X = A_{l-1}, B_l, D_l \\ \frac{1}{2} (: \epsilon(z) \epsilon^*(z) : - : \epsilon_{i+1}^*(z) \epsilon_{i+1}^*(z) : - \\ : \epsilon_{i+1}^*(z) \epsilon(z) : - : \epsilon(z) \epsilon_{i+1}^*(z) : + \\ : \epsilon_{i+1}^*(z) \epsilon_{i+1}^*(z) :) & X = C_l \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha(z) = & \begin{cases} : \epsilon(z) \epsilon^*(z) : & X = B_l \\ : \epsilon(z) \epsilon^*(z) : - : \epsilon(z) \epsilon^*(z) : & X = G_l \\ : \epsilon_{-1}(z) \epsilon_{-1}^*(z) : + : \epsilon(z) \epsilon^*(z) : & X = D_l \end{cases} \end{aligned}$$

注 8 在文献[35]中, 作者给出了与定理 7 相对应的各类 Bosonic 表示. 特别地, 将其限制在 2-Toroidal 的仿射子代数上, 我们得到了典型仿射李代数的 Fermionic 和 Bosonic 表示. 其中 C_l 型的 Fermionic 表示和 B_l, D_l 型的 Bosonic 表示是第一次被给出.

3.4 一类不可约表示

为方便起见, 从这节开始我们令 A 是 $n+1$ 个变量的洛朗多项式环, 其中第 $n+1$ 个变量记为 t_0 . 那么 A 的导子代数 $\mathcal{D} = \{ \sum_{p=0}^n f_p d_p \mid f_p \in A \}$. 定义 $\mathcal{D}$ 的子代数 $\mathcal{D}^*, \mathcal{D}_n$

$$\mathcal{D}^* = \{ \sum_{p=1}^n f_p d_p \mid f_p \in A \} \dot{=} \mathbf{C} d_0,$$

$$\mathcal{D}_n = \{ \sum_{p=1}^n f_p d_p \mid f_p \in A_n := \mathbf{C}[t_1^{\pm 1}, \dots, t_n^{\pm 1}] \}.$$

在文献[3, 23]中, 我们发现通过扩大 τ 的顶点表示空间, 可以在扩大后的空间上定义一个 $\tau = \tau \dot{=} \mathcal{D}^*$ -模结构. 在文献[25]中, 作者利用这种想法将仿射代数的不可约高权模扩充成 τ 上的一个权空间有限维的不可约模.

设 gl_n 是 $n \times n$ 矩阵代数, E_{ij} 是其一组标准基. 那么 $gl_n = sl_n \dot{=} \mathbf{C} I$, 其中 sl_n 是迹零子代数以及 I 是单位矩阵. 设 $V(\lambda, b)$ 有限维不可约的 gl_n -模, 使得其看作 sl_n -模时是以 λ 为最高权的有限维不可约 sl_n -模, 且 I 的作用为常数 b . 对 $\alpha \in \mathbf{C}^e$, 在 $V(\lambda, b) \leftarrow A_n$ 上有一个

$\mathcal{A}$ -模结构. 其作用如下

$$t^r d_p \cdot v \leftarrow t^s = (s_p + \alpha_p) v \leftarrow t^{r+s} + \sum_{i=1}^n r_i E_{ip} v \leftarrow t^{r+s}$$

其中 $r, s \in \mathbb{Z}^n, 1 \leq p \leq n, v \in V(\lambda, b)$. 记这个 $\mathcal{A}$ -模为 $V^a(\lambda, b)$.

考虑 τ^* 的子代数 $\mathfrak{E} = \mathcal{D} \dot{\vee} \Omega_{n+1}$, 那么我们有分解 $\mathfrak{E} = \mathfrak{E}_+ \dot{\vee} \mathfrak{E}_0 \dot{\vee} \mathfrak{E}_-$, 其中

$$\mathfrak{E}_+ = \sum_{p=1}^n A_+ d_p \dot{\vee} \sum_{i=0}^n A_+ K_i, A_+ := \sum_{i>0} t^i A_n,$$

$$\mathfrak{E}_- = \sum_{p=1}^n A_- d_p \dot{\vee} \sum_{i=0}^n A_- K_i, A_- := \sum_{i<0} t^i A_n,$$

$$\mathfrak{E}_0 = \mathcal{A} \dot{\vee} C d_0 \dot{\vee} \sum_{i=0}^n A_n K_i,$$

对固定的常数 c, d , 我们可以将 $\mathcal{A}$ -模 $V^a(\lambda, b)$ 扩充成一个 $\mathfrak{E}$ -模通过作用

$$\begin{aligned} t^r K_p \cdot v \leftarrow t^s &= 0, 1 \leq p \leq n, \\ t^r K_0 \cdot v \leftarrow t^s &= c \cdot v \leftarrow t^{r+s}, \\ d_0 &= d \text{Id}. \end{aligned}$$

记该 $\mathfrak{E}$ -模为 T , 当 $c \neq 0$ 时 T 是不可约的. 令 $\mathfrak{E}$ 在 T 上的作用平凡, 那么有 $\mathfrak{E}$ 的诱导模

$$M := \text{Ind}_{\mathfrak{E}_0}^{\mathfrak{E}} \mathfrak{E}_+(T).$$

显然在 M 上有一个自然的 $\mathbb{Z}^{n+1}$ 阶化结构.

定理 8^[25] 当 $c \neq 0$ 时, $\mathfrak{E}$ -模 M 上有一个唯一的不可约商 $L(T)$ 且 $L(T)$ 的每个阶化空间都是有限维的.

对给定的 $\mathfrak{E}$ -模 $L(T)$ 以及 $r \in \mathbb{Z}^n$, 定义域

$$\begin{aligned} K_p(r, z) &= \sum_{j \in \mathbb{Z}} (t^j t^r K_p) z^{-j}, p = 0, \dots, n, \\ d_p(r, z) &= \sum_{j \in \mathbb{Z}} (t^j t^r d_p) z^{-j}, p = 1, \dots, n, \\ K(r, z) &= \frac{1}{c} K_0(r, z), \end{aligned}$$

那么在 $L(T)$ 上有

$$K_p(r+s, z) = K_p(r, z) K(s, z),$$

其中 $r, s \in \mathbb{Z}^n, p = 0, 1, \dots, n$.

设 V 是仿射李代数 $\mathcal{S} \leftarrow C[t_0, t_0^{-1}] \dot{\vee} C K_0 \dot{\vee} C d + 0$ 的一个不可约高权模, 且 K_0 的作用等于 c . 对 $x \in \mathcal{S}$, 定义 $x(z) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} (x \leftarrow t^j) z^{-j}$. 那么在张量空间 $V \leftarrow L(T)$ 上可以定义一个 τ^* -模结构:

$$\begin{aligned} \sum_{j \in \mathbb{Z}} (x \leftarrow t^j t^r) z^{-j} &= x(z) \leftarrow K(r, z), \\ \mathfrak{E} &= \text{Id} \leftarrow \mathfrak{E}, \\ d_0 &= d_0 \leftarrow \text{Id} + \text{Id} \leftarrow d_0. \end{aligned}$$

定理 9^[25] τ^* -模 $V \leftarrow L(T)$ 是不可约的且每个阶化空间都是有限维的.

注 9 在文献[26]中, 作者用顶点算子代数的语言解释了这类模. 之后在文献[27]中, 作者将文献[25-26]中的结果推广到全 Toroidal 代数上去, 得到了一个全 Toroidal 李代数的模范畴. 与文献[25]中不同的是, 在文献[27]中构造的模在 $t^0 t^r d_0$ 上的作用是非平凡的.

3.5 不可约, 可积表示的分类 I

设 $\tau = \tau \dot{\vee} D$, 其中 $D = \sum_{i=0}^n C d_i$ 以及 d_i 与 τ 的李乘是

$$\begin{aligned} [d_i, x \leftarrow t^r] &= r_i x \leftarrow t^r, [d_i, t^r K_j] = \\ r_i t^r K_j, [d_i, d_j] &= 0. \end{aligned}$$

回忆单李代数 $\mathcal{S}$ 的根空间分解 $\mathcal{S} = \sum_{\alpha \in \Delta} \mathcal{S}_{\alpha} \dot{\vee} \mathcal{A}$. 我们将考虑 τ 关于 $\mathcal{A} = \mathcal{A} \dot{\vee} \sum C K_i \dot{\vee} \sum C d_i$ 的根空间分解. 设 $\delta_1, \dots, \delta_n \in \mathcal{A}$ 使得 $\delta_i(d_j) = \delta_{ij}, \delta(\alpha^\vee) = \delta(K_j) = 0$. 设 $\Lambda_0, \dots, \Lambda_n \in \mathcal{A}$ 使得 $\Lambda_i(K_j) = \delta_{ij}, \Lambda_i(d_j^\vee) = \Lambda_i(d_j) = 0$. 显然, 可以将 $\mathcal{A}$ 上的对称双线型扩充成 $\mathcal{A}$ 上的一个非退化双线性型, 使得 $(\Lambda_i, \delta_j) = \delta_{ij}$, 其他的均为 0.

对 $r \in \mathbb{Z}^{n+1}$, 令 $\delta = \sum r_i \delta_i$. 称 δ 为虚根, 设 $\mathcal{A}_{\delta} \alpha + \delta, \delta | \alpha \in \Delta, r, s \in \mathbb{Z}^{n+1}$. 那么 τ 有根分解:

$$\tau = \dot{\vee}_{r \in \mathbb{Z}^n} \tau_r,$$

其中

$$\tau_r = \begin{cases} \mathcal{S}_{\alpha} \leftarrow t^r, & \text{若 } r = \alpha + \delta, \alpha \in \Delta, \\ \mathcal{A} \leftarrow t^r, & \text{若 } r = \delta \neq 0, \\ \mathcal{A}, & \text{若 } r = 0. \end{cases}$$

一个 τ 关于 $\mathcal{A}$ 的权模 V 称为可积的, 如果对任意的 $v \in V$ 和 $\alpha \in \Delta, m \in \mathbb{Z}^{n+1}$, 都存在常数 $k = k(\alpha, m, v)$ 使得 $(\mathcal{S} \leftarrow t^m)^k \cdot v = 0$.

设 $\mathcal{S} = \mathcal{S} \leftarrow C[t_0, t_0^{-1}] \dot{\vee} C K_0$, 考虑李代数同态 $\tau \rightarrow \mathcal{S} \leftarrow A_n \dot{\vee} D$:

$$\begin{aligned} x \leftarrow t^0 t^r \mapsto (x \leftarrow t^{r_0}) \leftarrow t^r, \\ t^{r_0} t^m K_i \mapsto 0, & \text{若 } 1 \leq i \leq n \text{ 或 } i = n, m_0 \neq 0, \\ t^m K_0 \mapsto K_0 \leftarrow t^m, \\ d_i \mapsto d_i, \end{aligned}$$

其中 $r, m \in \mathbb{Z}^n, r_0, m_0 \in \mathbb{Z}, x \in \mathcal{S}$ 通过该同态可以将 $\mathcal{S} \leftarrow A_{n-1} \dot{\vee} D$ 上的模看成 τ 的模.

对每个 $i, 1 \leq i \leq n$, 设 N_i 是一个正整数. 设 $\bar{a}_i = (a_{i1}, \dots, a_{iN_i}), 1 \leq i \leq n$, 这里 $a_{i1}, \dots, a_{iN_i}$ 是一组互异的

非零复数. 令 $N = N_1 N_2 \dots N_n$. 对 $I = (i_1, \dots, i_n)$, $1 \leq i_j \leq N_j$, 以及 $m = (m_1, \dots, m_n) \in \mathbb{Z}^n$, 定义 $aI^m = a_{i_1 m_1} \dots a_{i_n m_n}$. 设 $S = \{I = (i_1, i_2, \dots, i_n) \mid 1 \leq i_j \leq N_j, \text{ 那么显然 } S = N\}$. 设 $I_1, \dots, I_N$ 是 S 中的元素. 对每个 i , $1 \leq i \leq N$, 设 λ 是仿射代数 $\mathcal{G}$ 的一个支配整权. 令 $V(\lambda)$ 是 $\mathcal{G}$ 的, 以 λ 为高权的, 不可约高权模. 那么在空间 $V(\lambda) \leftarrow \dots \leftarrow V(\lambda) \leftarrow A_n$ 上有一个 $\mathcal{G} \leftarrow A_n \hat{Y} D$ 模结构:

$$\begin{aligned} X \leftarrow t^r, u \leftarrow \dots \leftarrow u \leftarrow t^s &= \sum a_{ij}^r u \leftarrow \dots \leftarrow \\ &X u \leftarrow \dots \leftarrow u \leftarrow t^{s+r}, \\ d_i. u \leftarrow \dots \leftarrow u \leftarrow t^s &= s_i(u \leftarrow \dots \leftarrow u \leftarrow t^s), \\ 1 \leq i \leq n-1, \\ d_0. u \leftarrow \dots \leftarrow u \leftarrow t^s &= \sum u \leftarrow \dots \leftarrow d_0 u \leftarrow \\ &\dots \leftarrow u \leftarrow t^s, \end{aligned}$$

其中 $r, s \in \mathbb{Z}^n$, $X \in \mathcal{G}$. 从而我们得到一类可积的, 权空间有限维的 τ 模. 这类赋值模是完全可约的, 且绝大部分是不可约的. 回忆我们在 2.1 节定义的 $\hat{\tau}$ 的自同构 B , 显然 B 也是在 τ 上的一个自同构. 选取一个这样的自同构, 我们可以在 τ 或 $\hat{\tau}$ 模上定义一个新的模结构. 我们将这个过程称为选取坐标系.

定理 10^[18] 任意不可约的, 可积的, 权空间有限维的以及中心作用不为零的 Toroidal 李代数模, 在选取适当的坐标系下, 同构于我们上面所叙述的赋值模的某个不可约部分.

注 10 当中心的作用平凡时, 这种模的分类问题与上面相似. 大概来说, 就是将仿射子代数 $\mathcal{G}$ 用有限单李代数 $\mathcal{S}$ 替代, 将 $V(\lambda)$ 用 $\mathcal{S}$ 上的不可约高权模替代. 那么我们照样可以得到一些赋值模且在选取适当的坐标系下, 分类问题归结为这种赋值模的分类.

3.6 不可约, 可积表示的分类 II

这节将考虑全 Toroidal 李代数 $\hat{\tau}$ 的权空间有限维的不可约, 可积模的分类问题. 称 $\hat{\tau}$ 模是可积的, 如果其作为 τ 模是可积的. 首先在条件 K_0 作用是正整数, $K_1, \dots, K_n$ 作用平凡下构造出所有的这类模. 显然, $\hat{\tau}$ 是 $\mathbb{Z}^{n+1}$ 阶化的, 同时其关于 t^0 有一个 $\mathbb{Z}$ 阶化结构. 定义 $\hat{\tau}_+, \hat{\tau}_0, \hat{\tau}_-$ 分别由元素 $\mathcal{S} \leftarrow t^0 t^r, D(u, (r_0, r)), K(u, (r_0, r)), r_0 > 0, = 0, < 0$ 张成, 那么 $\hat{\tau}_+ = \hat{\tau}_0 = \hat{\tau}_- = \hat{\tau}$.

回忆在 3.4 节中我们定义了一个 $\mathcal{G}$ 模 $V^a(\lambda b)$ $= V(\lambda b) \leftarrow A_n$. 设 W 是 $\mathcal{S}$ 的一个有限维不可约模, 令

$T = W \leftarrow V^a(\lambda b)$. 对固定的正整数 c_0 和复数 d , 我们在 T 上给出一个 $\hat{\tau}_0$ 模结构如下:

$$\begin{aligned} X \leftarrow t^r, w \leftarrow v \leftarrow t^s &= X w \leftarrow v \leftarrow t^{r+s}, \\ t^r d_p. w \leftarrow v \leftarrow t^s &= w \leftarrow t^r d_p(v \leftarrow t^s), \\ t^r d_0. w \leftarrow v \leftarrow t^s &= d(w \leftarrow v \leftarrow t^s), \\ t^r K_p. w \leftarrow v \leftarrow t^s &= 0, \\ t^r K_0. w \leftarrow v \leftarrow t^s &= c_0(w \leftarrow v \leftarrow t^s), \end{aligned}$$

其中 $r, s \in \mathbb{Z}^n$, $X \in \mathcal{G}$, $w \in W$, $v \in V(\lambda b)$, $1 \leq p \leq n$. 容易证明这样构造出来的 $\hat{\tau}_0$ 模 T 是不可约的. 设 $\hat{\tau}_+$ 在 T 上的作用平凡, 那么可以构造 $\hat{\tau}$ 的诱导模:

$$M(T) := \text{Ind}_{\hat{\tau}_0 \hat{Y} \hat{\tau}_+}^{\hat{\tau}}(T).$$

由 T 的不可约性知, $M(T)$ 有一个唯一的不可约商 $V(T)$. 那么 $V(T)$ 有一个自然的 $\mathbb{Z}^{n+1}$ 阶化结构, 且从文献[25]可知每个阶化空间都是有限维的. 另外, 由 W 是不可约且有限维知 $V(T)$ 是可积的.

定理 11^[19-20] 设 V' 是全 Toroidal 代数 $\hat{\tau}$ 的不可约, 可积以及权空间有限维的模. 如果其中心作用不平凡, 那么在选取适当的坐标系下, V' 同构于 $V(T)$, 对某些合适的 T .

接下来我们叙述中心作用是平凡时的分类结果. 设 W 是非平凡的有限单 $\mathcal{S}$ 模, 那么在空间 $W \leftarrow V(\lambda b) \leftarrow A$ 上给出一个 $\hat{\tau}$ 模结构:

$$\begin{aligned} X \leftarrow t^r, w \leftarrow v \leftarrow t^s &= X w \leftarrow v \leftarrow t^{r+s}, \\ D(u, r). w \leftarrow v \leftarrow t^s &\rightarrow w \leftarrow D(u, r)(v \leftarrow t^s), \\ K(u, r). w \leftarrow v \leftarrow t^s &= 0, \end{aligned}$$

其中 $r, s \in \mathbb{Z}^{n+1}$, $u \in \mathbb{C}^{n+1}$, $X \in \mathcal{G}$, $w \in W$, $v \in V(\lambda b)$. 容易看出 $W \leftarrow V(\lambda b) \leftarrow A$ 是一个不可约, 可积的 $\hat{\tau}$ 模, 且每个权空间均是有限维的.

定理 12^[19-20] 设 V' 是全 Toroidal 代数 $\hat{\tau}$ 的不可约, 可积以及权空间有限维的模. 如果其中心作用平凡以及 $\mathcal{S}$ 的作用不平凡, 那么在选取适当的坐标系下, V' 同构于 $W \leftarrow V(\lambda b) \leftarrow A$, 对某些合适的非平凡的 $\mathcal{S}$ 模以及某些 λb .

注 11 当 $\mathcal{S}$ 在 V' 上的作用是平凡时, 至今没有得到完整的分类结果.

4 扭 Toroidal 李代数

4.1 高维仿射李代数

设 L 是复数域上的李代数满足

(EA1) L 有一个非退化不变对称双线性型($\cdot, \cdot$).

(EA2) L 有一个非平凡的、有限维的、自中心的, 在伴随作用下是可角化的交换子代数 H .

由(EA2) 知 $L = \sum_{\alpha \in H^*} L_{\alpha}$ 以及 $L_0 = H$, 这里 $L_{\alpha} = \{x \in L \mid [h, x] = \alpha(h)x, \forall h \in H\}$. 设 $R = \{\alpha \in H^* : L_{\alpha} \neq 0\}$. 容易看出 H 在 $(\cdot, \cdot)$ 上的限制是非退化的, 从而诱导出 H^* 上一个双线性型 $(\cdot, \cdot)$. 定义

$R^* = \{\alpha \in R : (\alpha, \alpha) \neq 0\}$, $R^0 = \{\alpha \in R : (\alpha, \alpha) = 0\}$, 称 $\alpha \in R^*$ 为非迷向根以及 $\alpha \in R^0$ 迷向根. 记 L 的核 L_c 是 L 中由子空间 L_{α} , $\alpha \in R^*$ 生成的子代数. 如果 L 还满足

(EA3) 若 $\alpha \in R^*$, $x_{\alpha} \in L_{\alpha}$, 那么 adx_{α} 在 L 上的作用局部为零.

(EA4) R 是 H^* 中的离散子集.

(EA5) R 是不可约的, 即, 若 $R = R_1 \cup R_2$, $(R_1, R_2) = 0$, 那么要么 $R_1 = 0$ 要么 $R_2 = 0$, 以及对任意 $\sigma \in R^0$, 总存在 $\sigma \in R^*$, 使得 $\alpha + \sigma \in R$.

(EA6) $\{x \in L : [x, L_c] = 0\} \subseteq L_c$.

那么我们称 L 是 EALA. 由 R^0 生成的子群同构于某个秩为 n 的格, 称 n 为 L 的零度. 设 $\mathcal{A} = \{D(u, r) \in \mathcal{A} \mid (u, r) = 0\}$, 那么 $\tau_c = \tau \sum \mathcal{A}$ 是一个秩为 n 的 EALA, 称为 Toroidal EALA.

4.2 李环面

设 Λ 是一交换群, 若一个李代数 $L = \sum_{\lambda \in \Lambda} L^{\lambda}$ 是阶化的, 那么记 $\text{supp}_{\Lambda}(L) = \{\lambda \in \Lambda : L^{\lambda} \neq 0\}$. 设 Δ 是有限不可约根系 (我们这里指的根系均是包含零的) 和 $\Delta^* = \Delta \setminus \{0\}$, 令 $\Delta_{\text{nd}}^* = \{\alpha \in \Delta^* : \frac{1}{2}\alpha \notin \Delta^*\}$ 以及 $\Delta_{\text{nd}} = \Delta_{\text{nd}}^* \cup \{0\}$. 令 Q 是关于 Δ 的根格, 以及 Λ 是一个自由交换群, 称一个李代数 $L = \sum_{\alpha \in Q, \lambda \in \Lambda} L_{\alpha}^{\lambda}$ 是 $Q \times \Lambda$ -阶化的, 如果 $[L_{\alpha}^{\lambda}, L_{\beta}^{\mu}] \subseteq L_{\alpha+\beta}^{\lambda+\mu}$, $\alpha, \beta \in Q$, $\lambda, \mu \in \Lambda$. 记 $L_{\alpha} = \sum_{\lambda \in \Lambda} L_{\alpha}^{\lambda}$ 和 $L^{\lambda} = \sum_{\alpha \in Q} L_{\alpha}^{\lambda}$, 那么 $L = \sum_{\alpha \in Q} L_{\alpha}$ 是 Q -阶化的以及 $L = \sum_{\lambda \in \Lambda} L^{\lambda}$ 是 Λ -阶化的.

一个复数域上的 $Q \times \Lambda$ -阶化李代数 L 称为 (Δ, Λ) -型李环面, 如果其满足:

(LT1) $\text{supp}_{\Lambda}(L) = \Delta$.

(LT2) (i) $(\Delta^*, 0) \subseteq \text{supp}_{Q \times \Lambda}(L)$.

(ii) 若 $(\alpha, \lambda) \in \text{supp}_{Q \times \Lambda}(L)$ 且 $\alpha \neq 0$, 那么存在 $e_{\alpha}^{\lambda} \in L_{\alpha}^{\lambda}$, $f_{\alpha}^{\lambda} \in L_{-\alpha}^{-\lambda}$, 使得 $L_{\alpha}^{\lambda} = \mathbb{C}e_{\alpha}^{\lambda}$, $L_{-\alpha}^{-\lambda} = \mathbb{C}f_{\alpha}^{\lambda}$ 以及 $[e_{\alpha}^{\lambda}, f_{\alpha}^{\lambda}] = x_{\beta} = (\beta, \alpha^{\vee})x_{\beta}$, 其中 $x_{\beta} \in L_{\beta}$, $\beta \in Q$.

(LT3) 子空间 L_{α} , $\alpha \in \Delta^*$ 生成整个代数 L .

(LT4) $\langle \text{supp}_{\Lambda}(L) \rangle = \Lambda$.

若 Λ 是秩为 n , 称 L 的零度为 n .

设 L, L' 分别是 $(\Delta, \Lambda), (\Delta', \Lambda')$ -型李环面. 称 L

和 L' 是双同构的, 如果存在一个李代数同构 $\varphi: L \xrightarrow{\sim} L'$, 一个群同构 $\psi: \Lambda \xrightarrow{\sim} \Lambda'$, 使得

$$\varphi(L^{\lambda}) = L'^{\psi(\lambda)}, \lambda \in \Lambda$$

不难证明若 L, L' 是双同构的, 那么 (Δ, Λ) 是同构的根系.

设 $C(L)$ 是 L 的中心子, 即 $\text{End}(L)$ 中所有与算子 adx , $x \in L$ 可交换的元素的集合. 称李环面是 fgc 的, 若 L 是有限生成的 $C(L)$ -模.

命题 3^[41] 设 L 是无中心 (Δ, Λ) -型的李环面, 那么 L 是 fgc 的, 若 $\Delta \neq A_1$.

注 12 事实上, 由无中心 EALA 的分类结果知, 除了 $sl_{l+1}(\mathbb{C}_Q)$, $Q = (q_{ij})$ 且某些 q_{ij} 不是单位根外, 所有 A_1 -型无中心李环面都是 fgc 的. 也就是说, 几乎所有的无中心李环面都是 fgc 的.

注 13 在文献[40]中, 作者证明了无中心李环面和无中心 EALA 的等价性. 在文献[42]中, 作者进一步证明了所有的 EALA 都可以由某些无中心李环面加上其度导子代数和度导子代数的阶化对偶代数得到. 从而 EALA 的实现问题可以归结为无中心李环面的实现问题, 尤其是 fgc 无中心李环面的实现问题.

4.3 李环面的多重 Loop 实现

设 $\mathcal{G}$ 是有限单李代数, 定义集合

$$\text{cfon}(\mathcal{G}) = \{\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_n) \mid \sigma_i \in \text{Aut}(\mathcal{G}), |\sigma_i| < \infty, \sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i, 1 \leq i, j \leq n\},$$

对 $m = (m_1, \dots, m_n) \in \mathbb{Z}_+^n$, 记 $\sigma^m = 1$, 如果对每个 j 均有 $\sigma_j^{m_j} = 1$.

对固定的 $\sigma \in \text{cfon}$, $m \in \mathbb{Z}_+^n$ 使得 $\sigma^m = 1$, 定义 $\bar{\Lambda} = \mathbb{Z}/(m_1) \times \dots \times \mathbb{Z}/(m_n)$. 令 $r = (r_1, \dots, r_n) \xrightarrow{1} \bar{r} = (\bar{r}_1, \dots, \bar{r}_n)$ 是从 $\mathbb{Z}^n$ 到 $\bar{\Lambda}$ 的典范同态, 其中 $\bar{r}_j = r_j + m_j \mathbb{Z}$. 设 ζ_j 是 m_j 次本原单位根, 定义

$$\tilde{\mathcal{G}} = \{x \in \mathcal{G} \mid \sigma(x) = \zeta_j x, 1 \leq j \leq n\},$$

那么 $\tilde{\mathcal{G}} = \sum_{i \in \bar{\Lambda}} \tilde{\mathcal{G}}^i$. 设 $\mathcal{A}$ 是 $\mathcal{G}$ 的在伴随作用下可对角化的交换子代数并且包含在不动点子代数 $\mathcal{g} = \tilde{\mathcal{G}}$ 中. 那么 $\mathcal{A}$ 关于 $\mathcal{A}$ 有根空间分解 $\mathcal{A} = \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} \mathcal{A}_{\alpha}$, 记 $\Delta_{\mathcal{A}} = \{\alpha \in \mathcal{A}^* : \mathcal{A}_{\alpha} \neq 0\}$, $Q_{\mathcal{A}} = \text{span}_{\mathbb{Z}} \Delta_{\mathcal{A}}$, 以及 $\tilde{\mathcal{A}} = \tilde{\mathcal{G}} \cap \mathcal{A}$. 对 $A = \mathbb{C}[t^{\pm 1}, \dots, t_n^{\pm 1}]$, 定义多重 Loop 代数 $\mathcal{S}^{\mathcal{A}}$ 的子代数

$$L_m(\mathcal{S}, \sigma, \mathcal{A}) := \sum_{r \in \mathbb{Z}^n} \tilde{\mathcal{A}}^{\bar{r}} t^r,$$

那么在 $L_m(\mathcal{S}, \sigma, \mathcal{A})$ 上有一个自然的 $\Delta \times \mathbb{Z}^n$ -阶化结构使得

$$L_m(\mathcal{S}, \sigma, \mathcal{A})_{\alpha}^r = \tilde{\mathcal{A}}_{\alpha}^{\bar{r}} t^r.$$

命题 4^[45] Δ 是不可约有限根系, 以及李代数 $L_m(\mathcal{S}, \sigma, \mathcal{A})$ 是 $\Delta \times \mathbb{Z}^n$ -型李环面当且仅当 $\sigma, m, \mathcal{A}$ 满足下面

条件

(I) $\mathcal{G}$ 是单的且 $\mathcal{A}$ 是 $\mathcal{G}$ 的 Cartan 子代数.

(II) $m_i = |\alpha_i|$ 且 $|\alpha_i| < \alpha_i, \dots, \alpha_i > |\alpha_i| = m_1 \dots m_n$.

(III) 若 $0 \neq \bar{r} \in \bar{\Lambda}$, 那么作为 $\mathcal{G}$ 模有 $\bar{\mathcal{G}} = U^{\bar{r}} \dot{\mathcal{Y}} V^{\bar{r}}$,

其中 $U^{\bar{r}}$ 是平凡 $\mathcal{G}$ 模以及 $V^{\bar{r}}$ 要么等零要么是下列 3 种模之一:

(1) 伴随模 $V(\theta)$. (2) 小伴随模 $V(\theta_h)$, 若 $\Delta = B_l(l \geq 2), C_l(l \geq 3), F_4$ 或 G_2 . (3) 对称模 $V(2\theta_h)$, 若 $\Delta = B_l(l \geq 2)$ 或 A_1 .

这里 Δ 是 $\mathcal{G}$ 关于 $\mathcal{A}$ 的根系, θ 和 θ_h 分别是 Δ 的最高根和最高短根. $V(\alpha)$ 代表以 α 为最高权的不可约高权 $\mathcal{G}$ 模.

对一个有限单李代数 $\mathcal{G}$ 选取适当的 $\sigma \in \text{cf } \text{ad}(\mathcal{G})$, $m \in \mathbb{Z}^n$ 和交换子代数 $\mathcal{A}$, 使得其满足上述命题的条件 (I), (II) 和 (III). 那么李代数 $L_m(\mathcal{G}, \alpha, \mathcal{A})$ 是一个无中心的 fgc 李环面, 称为 $\mathbb{Z}^n$ -型多重 Loop 李环面. 由于 m 由 σ 唯一确定, 我们简记该代数 $L(\mathcal{G}, \alpha, \mathcal{A})$.

定理 13^[45] 对任一零度为 n 的无中心李环面 L , L 双同构于某一个 $\mathbb{Z}^n$ -型多重 Loop 李环面 $L(\mathcal{G}, \alpha, \mathcal{A})$, 当且仅当 L 是 fgc 的.

4.4 扭 Toroidal 代数

设 $\mathcal{G}$ 是有限单李代数, $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \text{Aut}(\mathcal{G})$ 是交换的, 且阶数分别是 $m_0, m_1, \dots, m_n$. 设 $\zeta_i, i = 0, \dots, n$ 是 m_i 次本原单位根. 定义格 $\Gamma = m_1 \mathbb{Z} \times \dots \times m_n \mathbb{Z}$, $\Lambda = m_0 \mathbb{Z} \times \Gamma$. 对 $r = (r_0, r) \in \mathbb{Z}^{n+1}$, 记 $\bar{r} = (\bar{r}_0, \bar{r})$ 为典范同态 $\mathbb{Z}^{n+1} \rightarrow \mathbb{Z}^{n+1}/\Lambda$ 下 r 的象. 那么 $\mathcal{G}$ 有公共特征空间分解:

$$\mathcal{G} = \dot{\mathcal{Y}} \bar{r} \in \mathbb{Z}^{n+1}/\Lambda \mathcal{G},$$

其中 $\mathcal{G} = \{x \in \mathcal{A} \mid \alpha_i x = \zeta_i^i x, i = 0, 1, \dots, n\}$. 设 $\mathcal{R} = \mathbb{C} [t_0^{\pm 1/m_0}, t_1^{\pm 1}, \dots, t_n^{\pm 1}]$ 以及 $\mathcal{B} = \mathbb{C} [t_0^{\pm 1}, t_1^{\pm 1/m_1}, \dots, t_n^{\pm 1/m_n}]$, 定义扭多重 Loop 代数 $L(\mathcal{G}, \sigma)$ 是 $L(\mathcal{G}) = \mathcal{G} \leftarrow \mathcal{B}$ 中的子代数:

$$L(\mathcal{G}, \sigma) = \sum_{r \in \mathbb{Z}^{n+1}} \mathcal{G} \leftarrow t^{\bar{r}} \sigma^{r_0} t^{\bar{r}}.$$

由 2.2 节我们知, $\Omega = \Omega_{\mathcal{A}} d_{\mathcal{G}}$ 是 $L(\mathcal{G})$ 的泛中心, 其中 $\Omega_{\mathcal{A}} = \dot{\mathcal{Y}}_{p=0}^n \mathcal{A}_p$ 以及 $d_{\mathcal{A}} = \sum_{p=0}^n d_p (\mathcal{A}_p K_p$. 类似地, 我们定义 $\Omega_{\mathcal{B}} = \dot{\mathcal{Y}}_{p=0}^n \mathcal{B}_p K_p$ 以及 $d_{\mathcal{B}} = \sum_{p=0}^n d_p (\mathcal{B}_p K_p$, 那么 $\Omega_{\Lambda} = \Omega_{\mathcal{A}}/d_{\mathcal{B}}$ 是 $L(\mathcal{G}, \sigma)$ 的泛中心.

设 $\mathcal{D} = \text{Der}(\mathcal{B})$ 和 $\mathcal{A} = \text{Der}(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{D}$ 对任意 $\varepsilon \in H^2(\mathcal{D}, \Omega)$, 在空间 $\hat{\mathcal{T}} = L(\mathcal{G} \dot{\mathcal{Y}} \Omega \dot{\mathcal{Y}} \mathcal{D})$ 上有一个李乘结构. 其李乘类似 2.1 节, 只是将 $D(u, r), D(v, s), u, v \in \mathbb{C}^{n+1}, r, s \in \mathbb{Z}^{n+1}$ 的作用改成

$$[D(u, r), D(u, r)] = D((u, s)v - (v, r)u, r + s) + \varepsilon(D(u, r), D(v, s)).$$

我们感兴趣的 2-上同调形如 $\mu_{\mathcal{B}} + \nu_{\mathcal{B}}, \mu, \nu \in \mathbb{C}$, 其中 $(0 \leq a, b \leq n, r, s \in \mathbb{Z}^{n+1})$.

$$\varepsilon(t_0^r t^r d_a, t_0^s t^s d_b) = s a r b \left(\sum_{p=0}^n r_p t_0^{r_0+s_0} t^{r+s} K_p \right),$$

$$\varepsilon(t_0^r t^r d_a, t_0^s t^s d_b) = r a s b \left(\sum_{p=0}^n r_p t_0^{r_0+s_0} t^{r+s} K_p \right).$$

在下方我们将固定一组参数 $\mu, \nu \in \mathbb{C}$ 使得 $\varepsilon = \mu_{\mathcal{B}} + \nu_{\mathcal{B}}$, 并称相对应的李代数 $\hat{\mathcal{T}}$ 为全 Toroidal 李代数. 当 $\varepsilon = -\varepsilon$ 时, 全 Toroidal 代数的定义与 2.1 节中给出的一致. 类似地, 我们可以定义全扭 Toroidal 李代数 $\hat{\mathcal{T}}(\sigma) = L(\mathcal{G}, \sigma) \dot{\mathcal{Y}} \Omega_{\Lambda} \dot{\mathcal{Y}} \mathcal{A}$.

定义 $\mathcal{S}$ 是 $\mathcal{D}$ 中由元素 $\sum_{p=0}^n u_p t_0^{r_0/m_0} t^r d_p$ 其中 $\sum u_p r_p = 0, r \in \mathbb{Z}^{n+1}, u_p \in \mathbb{C}, p = 0, 1, \dots, n$ 张成的子代数, 令 $\mathcal{K} = \mathcal{A} \cap \mathcal{S}$. 因为 ε 在 $\mathcal{S}$ 上的作用平凡, 这时我们可以假设 $\varepsilon = \mu_{\mathcal{B}}$. 定义 Toroidal EALA $\hat{\mathcal{T}}_e = L(\mathcal{G} \dot{\mathcal{Y}} \Omega_{\Lambda} \dot{\mathcal{Y}} \mathcal{A})$ 以及扭 Toroidal EALA $\hat{\mathcal{T}}_e(\sigma) = L(\mathcal{G}, \sigma) \dot{\mathcal{Y}} \Omega_{\Lambda} \dot{\mathcal{Y}} \mathcal{K}$. 注意到, 在 $\hat{\mathcal{T}}_e$ 和 $\hat{\mathcal{T}}_e(\sigma)$ 上均有一个非退化不变对称双线性型.

4.5 不可约表示

为方便起见, 在这节中我们将不加解释地直接运用一些 VOA 理论的基本记号^[61]. 下面叙述的内容在文献[56]中都有详细的解释.

设 V_{Hyp}^+ 是结合于一个虚格的格顶点算子代数的一个子代数. 作为向量空间, $V_{\text{Hyp}}^+ = \mathbb{C} [q^{\pm 1}, \dots, q_n^{\pm 1}] \leftarrow \mathcal{H}$ 其中 $\mathcal{H} = \mathbb{C} [u_{pj}, v_{pj} \mid p = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, 3, \dots]$. 考虑其上面的顶点算子

$$K_0(r, z) = q^r \exp \left(\sum_{p=1}^n r_p \sum_{j \geq 1} u_{pj} z^j \right)$$

$$\exp \left(- \sum_{p=1}^n r_p \sum_{j \geq 1} \frac{\partial}{\partial v_{pj}} \frac{z^{-j}}{j} \right),$$

$$K_a(r, z) = \left(\sum_{j \geq 1} j u_{aj} z^{j-1} + \sum_{j \geq 1} \frac{\partial}{\partial v_{aj}} z^{-j-1} \right) K_0(r, z),$$

$$D_a(z) = \sum_{j \geq 1} j v_{aj} z^{j-1} + q_a \frac{\partial}{\partial q_a} z^{-1} + \sum_{j \geq 1} \frac{\partial}{\partial u_{aj}} z^{-j-1},$$

$$\omega_{\text{Hyp}}(z) = \sum_{p=1}^n K_p(z) D_p(z),$$

其中 $a = 1, \dots, n, r \in \mathbb{Z}^n$ 以及 $q^r = q_1^{r_1} \dots q_n^{r_n}$. 这里 $\omega_{\text{Hyp}}(z)$ 是该 VOA 的 Virasoro 域.

设 $h^\vee$ 是 $\mathcal{G}$ 的 Coxeter 数的对偶, 那么对非零复数 $c \neq -h^\vee$, 令 V_{aff} 为结合于仿射李代数 $\hat{\mathcal{G}} = \mathcal{G} \leftarrow \mathbb{C}[t_0, t_0^{-1}] \hat{=} \mathbb{C}\mathcal{G}_{\text{aff}}$ 的水平为 c 顶点算子代数.

定义扭 gl_n -Virasoro 代数 $glVir$ 为李代数 $gl_n(\mathbb{C}) \leftarrow \mathbb{C}[t_0, t_0^{-1}] \hat{=} \text{Der} \mathbb{C}[t_0, t_0^{-1}]$ 的泛中心扩张, 其中心是 4 维的且 $\{C_{sl}, C_{\text{Hei}}, C_{\text{Vir}}, C_{\text{VH}}\}$ 为其一组基. 记 $L(m) = -t_0^{m+1} \frac{\partial}{\partial t_0}$, $u(m) = u \leftarrow t_0^m$, $u \in gl_n(\mathbb{C})$, $n \in \mathbb{Z}$, 那么李代数 $glVir$ 上的李乘如下:

$$[L(m), L(k)] = (m-k)L(m+k) +$$

$$\frac{m^3 - m}{12} \delta_{m+k,0} C_{\text{Vir}},$$

$$[L(m), u(k)] = -ku(m+k) - (m^2 +$$

$$m) \delta_{m+k,0} \phi_2(u) C_{\text{VH}},$$

$$[u(m), v(k)] = [u, v](m+k) +$$

$$m \delta_{m+k,0} (Tr(\phi_1(u)\phi_1(v))C_{sl} + \phi_2(u)\phi_2(v)C_{\text{Hei}}),$$

其中 $u, v \in gl_n(\mathbb{C})$, $m, k \in \mathbb{Z}$ 以及 $\phi_2(u) = Tr(u)/n$, $\phi_1(u) = u - \phi_2(u)I$, 这里 I 是单位矩阵.

李代数 $glVir$ 是一个顶点李代数, 设 V_{glVir} 是其相对应的中心特征标为 γ 的泛包络顶点代数. 记 $c_{sl} = \gamma(C_{sl})$, $c_{\text{Hei}} = \gamma(C_{\text{Hei}})$, $c_{\text{Vir}} = \gamma(C_{\text{Vir}})$, $c_{\text{VH}} = \gamma(C_{\text{VH}})$. 那么 V_{glVir} 的 Virasoro 域 $\omega_{glVir}(z) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} L(j)z^{-j-2}$. 对 $1 \leq i, j \leq n$, 令 $E_{ij}(z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} E_{ij} \leftarrow t_0^k z^{-k-1}$. 这里 $E_{ij} \in gl_n(\mathbb{C})$ 是除 (i, j) 位置为 1, 其他均为零的矩阵.

我们首先给出对应于 2 -上调 $\varepsilon = \mu_0 + \nu_0$ 的全扭 Toroidal 李代数 $\hat{\tau}(\alpha_0, 1, \dots, 1)$ 上的一类表示. 对 $a = 1, \dots, n$, $r = (r_0, r) \in \mathbb{Z}^{n+1}$, 定义域

$$k_0(r, z) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} t_0^j t^r K_0 z^{-j},$$

$$k_a(r, z) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} t_0^j t^r K_a z^{-j-1},$$

$$x(r, z) = \sum_{j \in r_0/m_0 + \mathbb{Z}} x \leftarrow t_0^j t^r z^{-j-1}, x \in \mathcal{X},$$

$$\tilde{d}_a(r, z) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} (t_0^j t^r d_a - \nu_{at} t_0^j t^r K_0) z^{-j-1},$$

$$\tilde{d}_0(r, z) = - \sum_{j \in \mathbb{Z}} (t_0^j t^r d_0 - (\mu_+ \nu)(j +$$

$$\frac{1}{2}) t_0^j t^r K_0) z^{-j-2}.$$

定理 14^[55] (i) 设 V_τ 是结合于 $\tilde{\tau}$ 的泛包络顶点代数, V_{aff} 是 $\mathcal{G}$ 的水平为 c 的泛包络顶点代数, V_{glVir} 是中心特征标如下的 $glVir$ 的泛包络顶点代数:

$$c_{sl} = 1 - \mu_c, c_{\text{Hei}} = n(1 - \mu_c) - n^2 \nu_c,$$

$$c_{\text{VH}} = n(\frac{1}{2} - \nu_c), c_{\text{Vir}} = 12c(\mu_+ \nu) - 2n - \frac{c \dim \mathcal{G}}{c+h}$$

那么存在一个顶点代数同态 $\phi: V_\tau \rightarrow V_{\text{Hyp}}^+ \leftarrow V_{\text{aff}} \leftarrow V_{glVir}$, 其定义如下:

$$k_0(r, z) \mapsto cK_0(r, z),$$

$$k_a(r, z) \mapsto cK_a(r, z),$$

$$x(r, z) \mapsto Y(x(-1)1, z)K_0(r, z),$$

$$\tilde{d}_a(r, z) \mapsto D_a(z)K_0(r, z) +$$

$$\sum_{p=1}^n r_p E_{pa}(z)K_0(r, z),$$

$$\tilde{d}_0(r, z) \mapsto (\omega_{\text{Hyp}}(z) + \omega_{\text{aff}}(z) + \omega_{glVir}(z))K_0(r,$$

$$z) + \sum_{1 \leq i, j \leq n} r_i K_j(z) E_{ij}(z)K_0(r, z) +$$

$$(\mu_c - 1) \sum_{p=1}^n r_p (\frac{\partial}{\partial z} K_p(z))K_0(r, z),$$

其中 $r \in \mathbb{Z}^n$, $x \in \mathcal{X}$, $a = 1, \dots, n$.

(ii) 设 $\mathcal{U}$ 是 V_{aff} 的水平为 c 的不可约模, L_{glVir} 是中心特征标如上的不可约 $glVir$ 模. 那么上面定义的映射在空间 $\mathbb{C}[q^{\pm 1}, \dots, q_n^{\pm n}] \leftarrow \mathcal{P} \leftarrow \mathcal{U} \leftarrow L_{glVir}$ 上有一个不可约的 $\hat{\tau}$ 模结构.

不难看出, 作为顶点李代数, $\hat{\tau}(\alpha_0, 1, \dots, 1)$ 是 $\hat{\tau}$ 的一个 α_0 -扭. 设 $\hat{\mathcal{A}}(\alpha_0)$ 是仿射李代数 $\hat{\mathcal{G}}$ 的 α_0 -扭, $\mathcal{M}$ 是 V_{aff} 的一个不可约 α_0 -扭模. 那么 $\mathcal{M}$ 是一个 $\hat{\mathcal{A}}(\alpha_0)$ 的不可约有界模以及在 $\mathbb{C}[q^{\pm 1}, \dots, q_n^{\pm n}] \leftarrow \mathcal{P} \leftarrow \mathcal{M} \leftarrow L_{glVir}$ 上有一个 $\hat{\tau}(\alpha_0, 1, \dots, 1)$ -模结构. $\hat{\tau}(\alpha_0, 1, \dots, 1)$ 在其上的作用与上述定理给出的基本上一致, 只是将 $x(r, z)$, $x \in \mathcal{X}$ 的作用改为 $Y_{\mathcal{M}}(x(-1)1, z)K_0(z)$ 以及将最后一个式子中的 ω_{aff} 改成

$$Y_{\mathcal{M}}(\omega_{\text{aff}}, z) = \frac{1}{2(c+h^\vee)} (\sum_i Y_{\mathcal{M}}(x_i(-1)$$

$$1, z) Y_{\mathcal{M}}(x^i(-1)1, z) - \sum_i \alpha_i z^{-1} Y_{\mathcal{M}}([x_i,$$

$$x^i](-1)1, z) - c \sum_i \frac{(\alpha_i - 1)\alpha_i}{2} z^{-2} Id_{\mathcal{M}},$$

其中 $\{x_i\}$, $\{x^i\}$ 是 $\mathcal{G}$ 的一组对偶基并且均是关于阶化 $\mathcal{G} \hat{=} \hat{\gamma} \hat{\tau} \mathcal{G}$ 的齐次元, 以及 α 是陪集 $r_0/m_0 + \mathbb{Z}$ 的一个代表元, 若 $x_i \in \mathcal{X}$.

为了从 $\hat{\tau}(\alpha_0, 1, \dots, 1)$ -模 $\mathbb{C}[q^{\pm 1}, \dots, q_n^{\pm n}] \leftarrow \mathcal{P} \leftarrow \mathcal{U} \leftarrow L_{glVir}$ 上得到不可约 $\hat{\tau}(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$ -模, 我们需要引进弱覆盖的概念. 设 $L = \hat{\gamma} \hat{g} \in L_{\mathcal{G}}$ 是一个 G -阶化李代数, 其中 G 是一个有限交换群. 令 U 是 L 的一个模(不一定阶化), 一个 U 的覆盖指的是满足下列性质的 U 的一系列的子空间 U_g , $g \in G$,

$$(i) \sum_{g \in G} U_g = U,$$

(ii) $L_g U_h \subseteq U_{g+h}, \forall g, h \in G$.

一个覆盖 $\{U_g | g \in G\}$ 称为弱的, 如果不存在 U 其他的覆盖 $\{U'_g | g \in G\}$ 使得 $U'_g \subseteq U_g$ 对所有的 $g \in G$.

注意到自同构 $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ 可以扩充成扭仿射李代数 $\hat{\mathcal{A}}(\alpha_0)$ 上的自同构, 从而给出了 $\hat{\mathcal{A}}(\alpha_0)$ 上的一个 $\mathbb{Z}^n / \Gamma$ 阶化结构. 设 $\{\mathcal{M}^r | r \in \mathbb{Z}^n / \Gamma\}$ 是不可约有界 $\hat{\mathcal{A}}(\alpha_0)$ 模的一个弱覆盖.

定理 15^[56] $\mathcal{M} = \sum_{r \in \mathbb{Z}^n / \Gamma} \mathcal{M}^r \leftarrow \mathcal{J} \mathcal{H} \leftarrow L_{glVir}$ 是 $\tau(\sigma)$ -模 $C[q_1^{\pm 1}, \dots, q_n^{\pm 1}] \leftarrow \mathcal{J} \mathcal{H} \leftarrow L_{glVir}$ 的一个不可约子模.

最后我们来看下扭 Toroidal EALA $\hat{\mathcal{T}}_e(\sigma)$ 的不可约表示. 容易看出李代数 $\hat{\mathcal{T}}_e(\sigma)$ 是由 $d_0, \dots, d_n$ 以及下列域中的组成部分张成的 ($s \in \Gamma, r \in \mathbb{Z}^{n+1}, a, b = 1, \dots, n$)

$$k_0(s, z) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} t_0^j t^s K_0 z^{-j},$$

$$k_a(s, z) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} t_0^j t^s K_a z^{-j-1},$$

$$x(r, z) = \sum_{j \in r_{\sigma} m_{\sigma} + \mathbb{Z}} x \leftarrow t_0^j t^r z^{-j-1}, x \in \mathcal{X},$$

$$\tilde{d}_b(s, z) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} (s_0 t_0^j t^s d_a - s_0 t_0^j t^s d_b) z^{-j-1},$$

$$\bar{d}_a(s, z) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} (j t_0^j t^s d_a + s_0 t_0^j t^s d_0 +$$

$$\frac{s_a}{2cn} (n-1+\mu_c) t_0^j t^s K_0) z^{-j-2}.$$

这个时候我们需要将扭 gl_n -Virasoro 代数 $glVir$ 用其子代数 $slVir = (sl_n \leftarrow C[t_0, t_0^{-1}]) \hat{\mathcal{Y}}(Csl) \hat{\mathcal{Y}}(Der C[t_0, t_0^{-1}]) \hat{\mathcal{Y}} CC_{Vir}$ 来替代.

定理 16^[56] 设 $\mathcal{M}$ 是中心作用为 $c \neq 0, -h^\vee$ 的不可约有界 $\hat{\mathcal{A}}(\alpha_0)$ -模, $\mathcal{M}^r \in \mathbb{Z}^n / \Gamma$ 是 $\mathcal{S}$ 关于子同构 $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ 的一个弱覆盖. 设 L_{slVir} 是 $slVir$ 的不可约高权模, 使得其中心的作用为

$$csl = 1 - \mu_c, c_{vir} = 12(1 - \frac{1}{n}) + 12\mu_c(1 + \frac{1}{n}) -$$

$$2n - \frac{c \dim(\mathcal{A})}{c+h^\vee},$$

那么在空间 $\sum_{r \in \mathbb{Z}^n / \Gamma} \mathcal{M}^r \leftarrow \mathcal{J} \mathcal{H} \leftarrow L_{slVir}$ 上有一个不可约的 $\hat{\mathcal{T}}_e(\sigma)$ -模结构, 其具体作用如下:

$$k_0(s, z) \mapsto cK_0(s, z),$$

$$k_a(s, z) \mapsto cK_a(s, z),$$

$$x(r, z) \mapsto Y_{\mathcal{A}}(x(-1), z)K_0(r, z),$$

$$\tilde{d}_b(s, z) \mapsto (s_0 D_a(z) - s_0 D_b(z))K_0(s, z) +$$

$$s_b \sum_{p \neq a} s_p E_{pa} K_0(s, z) - s_a \sum_{p \neq b} s_p E_{pb}(z) K_0(s, z) +$$

$$s_a s_b (E_{aa} - E_{bb})(z) K_0(s, z),$$

$$\hat{d}_a(s, z) \mapsto s_a : (\omega_{\text{typ}}(z) + \omega_{\text{vir}}(z) + Y_{\mathcal{A}}(\omega_{\text{aff}},$$

$$z)) K_0(s, z) : + s_a \sum_{p, l=1}^n s_p \phi_1(E_{pl})(z) K_l(s, z) +$$

$$s_a (\mu_c - 1) \sum_{p=1}^n s_p (\frac{\partial}{\partial z} K_p(z)) K_0(z) - (z^{-1} +$$

$$\frac{\partial}{\partial z}) (D_a(z) K_0(s, z) : + \sum_{p=1}^n \phi_1(E_{pa})(z) K_0(s, z)),$$

其中 $s \in \Gamma, r \in \mathbb{Z}^{n+1}, a, b = 1, \dots, n$.

参考文献:

- [1] Berman S, Moody R V. Lie algebras graded by finite root systems and the intersection matrix algebras of Slodowy [J]. Invent Math, 1992, 108(2): 323-347.
- [2] Moody R V, Rao S E, Yokonuma T. Toroidal Lie algebras and vertex representations [J]. Geom Ded, 1990, 35: 283-307.
- [3] Eswara R S, Moody R V. Vertex representations for n-toroidal Lie algebras and a generalization of the Virasoro algebra [J]. Comm Math Phys, 1994, 159: 239-264.
- [4] Fang Y, Peng L. Generalized Heisenberg algebras and toroidal Lie algebras [J]. Alg Colloquium, 2010, 17: 375-388.
- [5] Saito K, Ylshii Y. Extended affine root system, IV. Simple-laced elliptic Lie algebras [J]. Publ RIMS Kyoto Univ, 2000, 36: 385-421.
- [6] Pianzola A. Line bundles and conjugacy theorems for toroidal Lie algebras [J]. C R Acad Sci Canada, 2000, 20: 125-128.
- [7] Pianzola A. Automorphisms of toroidal Lie algebras and their central quotients [J]. J Algebra Appl, 2002, 1: 113-121.
- [8] Moody R, Shi Z. Toroidal Weyl Groups [J]. Nova J Algebra Geom, 1992, 1: 317-337.
- [9] Azam S. Derivations of multi-loop algebras [J]. Forum Mathematicum, 2007, 19(6): 1029-1045.
- [10] Barnea Y. Maximal graded subalgebras of loop toroidal Lie algebras [J]. Algebras and Representation Theory, 8(2): 165-171.
- [11] Berman S, Cox B. Enveloping algebras and representations of toroidal Lie algebras [J]. Pacific J Math, 1994, 165: 239-267.
- [12] Cox B, Futorny V. Borel subalgebras and categories of highest weight modules for toroidal Lie algebras [J]. J Algebra, 2001, 236: 1-28.

- [13] Futorny V, Kashuba I. Verma type modules for toroidal Lie algebras[J]. *Comm Algebra*, 1999, 27: 3979-3991.
- [14] Dimitrov I, Futorny V, Penkov I. A reduction theorem for highest weight modules over toroidal Lie algebras[J]. *Comm Math Phys*, 2004, 250: 47-63.
- [15] Chari V. Integrable representations of affine Lie algebras[J]. *Invent Math*, 1986, 85: 317-335.
- [16] Chari V, Pressley A. New unitary representations of loop groups[J]. *Math Ann*, 1986, 275: 87-104.
- [17] Rao S Eswara. Classification of irreducible integrable modules for multi-loop Lie algebras with finite dimensional weight spaces[J]. *J Algebra*, 2001, 246: 215-225.
- [18] Rao S Eswara. Classification of irreducible integrable modules for toroidal Lie algebras with finite dimensional weight spaces[J]. *J Algebra*, 2004, 277: 318-348.
- [19] Jiang C, Meng D. Integrable representations for generalized Virasoro-toroidal Lie algebra[J]. *J Algebra*, 2003, 270: 307-334.
- [21] Lepowsky J, Wilson R L. Construction of the affine Lie algebra $A_1^{(1)}$ [J]. *Commun Math Phys*, 1978, 62: 43-53.
- [22] Tan S. Vertex operator representations for toroidal Lie algebra of type A_1 [J]. *Math Z*, 1999, 230: 621-657.
- [23] Billig Y. Principal vertex operator representations for toroidal Lie algebras[J]. *J Math Phys*, 1998, 39: 3844-3864.
- [24] Eswara R S. Toroidal Z algebras[EB/OL]. [2004-02-09]. <http://arxiv.org/abs/math.RT/0402134>.
- [25] Berman S, Billig Y. Irreducible representations for toroidal Lie algebras[J]. *J Algebra*, 1999, 221: 188-231.
- [26] Berman S, Billig Y, Szmigielski J. Vertex operator algebras and the representation theory of toroidal algebras[J]. *Contemp Math*, 2002, 297: 1-26.
- [27] Billig Y. A category of modules for the full toroidal Lie algebra[J]. *International Mathematics Research Notices*, 2006, Art ID 68395, 46.
- [28] Tan S. Vertex operator representations for toroidal Lie algebra of type B [J]. *Comm Algebra*, 1999, 27: 3593-3618.
- [29] Jiang C, Meng D. Vertex representations of $n+1$ toroidal Lie algebra of type B [J]. *J Algebra*, 2001, 246: 564-593.
- [30] Jiang C, Hong Y. Vertex operator construction for the toroidal lie algebra of type F_4 [J]. *Comm Algebra*, 2003, 31(5): 2161-2182.
- [31] Xia L, Hu N. Irreducible representations for Virasoro-toroidal Lie algebra[J]. *J Pure Appl Algebra*, 2004, 194: 211-237.
- [32] Liu D, Hu N. Vertex representations for toroidal Lie algebra of type G_2 [J]. *J Pure Appl Algebra*, 2005, 198: 257-279.
- [33] Cox B. Two realizations of toroidal $sl_2(\mathcal{O})$ [J]. *Contemp Math*, 2002, 297: 47-68.
- [34] Jing N, Misra K C. Fermionic realization of toroidal Lie algebras of classical types[J]. *J Alg*, 2010, 324: 183-194.
- [35] Jing N, Misra K C, Xu C. Bosonic realization of toroidal Lie algebras of classical types[J]. *Proc Amer Math Soc*, 2009, 137: 3609-3618.
- [36] Buelk S, Cox B, Jurisich E. A Wakimoto type realization of toroidal sl_{n+1} [EB/OL]. [2010-07-07]. <http://arxiv.org/abs/1007.1165>.
- [37] Hoegh-Krohn R, Torresani B. Classification and construction of quasi-simple Lie algebras[J]. *J Funct Anal*, 1990, 89: 106-136.
- [38] Allison B N, Azam S, Berman S, et al. Extended affine Lie algebras and their root systems[J]. *Mem Amer Math Soc*, 1997, 126: 603.
- [39] Allison B, Berman S, Gao Y, et al. A characterization of affine Kac-Moody Lie algebras[J]. *Comm Math Phys*, 1997, 185: 671-688.
- [40] Yoshii Y. Lie tori—a simple characterization of extended affine Lie algebras[EB/OL]. [2004-05-11]. <http://akita-net.jp/~yoshii/lieT.pdf>.
- [41] Neher E. Lie tori[J]. *C R Math Acad Sci Soc R Can*, 2004, 26: 8489.
- [42] Neher E. Extended affine Lie algebras[J]. *C R Math Acad Sci Soc R Can*, 2004, 26: 9096.
- [43] Kac V G. Infinite dimensional Lie algebras[M]. 3rd ed. Cambridge, U K: Cambridge University Press, 1990.
- [44] Allison B, Berman S, Faulkner J, et al. Realization of graded-simple algebras as loop algebras[J]. *Forum Mathematicum*, 2008, 20: 395-432.
- [45] Allison B, Berman S, Faulkner J, et al. Multiloop realization of extended affine Lie algebras and Lie tori[J]. *Trans Amer Math Soc*, 2009, 361: 4807-4842.
- [46] Berman S, Szmigielski J. Principal realization for extended affine Lie algebra of type sl_2 with coordinates in a simple quantum torus with two variables[J]. *Contemp Math*, 1999, 248: 39-67.
- [47] Gao Y. Vertex operators arising from the homogeneous realization for gl_N [J]. *Comm Math Phys*, 2000, 211: 745-777.
- [48] Gao Y. Representations of extended affine Lie algebras coordinatized by certain quantum tori[J]. *Compositio Math*, 2000, 123: 1-25.
- [49] Gao Y. Fermionic and bosonic representations of the extended affine Lie algebra $gl_N(\mathcal{O}_q)$ [J]. *Canada Math Bull*, 2002, 45: 623-633.

- [50] Berman S, Gao Y, Tan S. A unified view of some vertex operator constructions [J]. Israel Journal of Mathematics, 2003, 134: 29-60.
- [51] Batra P. Representations of twisted multi-loop Lie algebras [J]. J Algebra, 2004, 272: 404-416.
- [52] Fu J, Jiang C. Integrable representations for the twisted full toroidal Lie algebras [J]. J Algebra, 2007, 307: 769-794.
- [53] Lau M, Lau M. Representations of multiloop algebras [EB/OL]. [2008-12-02]. <http://arxiv.org/PDF/0811.2011>.
- [54] Pal T, Batra P. Representations of graded multiloop Lie algebras [EB/OL]. [2008-09-09]. <http://arxiv.org/PDF/0706.0448>.
- [55] Billig Y. Representations of toroidal extended affine Lie algebra [J]. J Algebra, 2007, 308: 252-269.
- [56] Billig Y, Lau M. Irreducible modules for extended affine Lie algebras [J]. J Algebra, preprint, 2010.
- [57] Kassel C. Kahler differentials and coverings of complex simple Lie Algebra extended over commutative algebras [J]. J Pure Appl Algebra, 1985, 34: 266-275.
- [58] Jing N, Misra K C, Tan S. Bosonic realizations of higher level toroidal Lie algebras [J]. Pacific J Math, 2005, 219: 285-301.
- [59] Frenkel I, Kac V. Basic representations of affine Lie algebras and dual resonance models [J]. Invent Math, 1980, 62: 23-66.
- [60] Kac V G, Kazhdan D A, Lepowsky J, et al. Realization of the basic representations of the Euclidean Lie algebras [J]. Advances in Math, 1981, 42: 83-112.
- [61] Lepowsky J, Li H. Introduction to vertex operator algebras and their representations [M]. Boston: Birkhuser, 2004.

The Structure and Representation of Toroidal Lie Algebra

TAN Shao-bin^{*}, CHEN Fuxin

(School of Mathematical Sciences, Xiamen University, Xiamen 361005, China)

Abstract: This paper is a survey on Toroidal Lie algebras, in this paper we give several results on the structure theory and representation theory of Toroidal Lie algebras for both the untwisted case and the twisted case which developed in recent decades.

Key words: Toroidal Lie algebra; structure; representation; twisted Toroidal Lie algebra