



黎卡提差分方程在电磁轴承最优控制中的应用

张立*, 刘昆

国防科技大学航天与材料工程学院, 长沙 410073

* E-mail: zhangkaiyue2004@yahoo.com.cn

收稿日期: 2011-12-30; 接受日期: 2012-03-19

摘要 提出了一种电磁轴承模型预测最优控制方法. 为了抑制陀螺效应引起的转子圆锥晃动, 在传统二次型性能指标函数中引入同步误差项, 基于离散状态方程有限步预估转子平动误差、同步误差以及控制器输出构造最优控制器优化目标函数. 基于迭代黎卡提差分方程(Riccati Difference Equation)求解了最优控制器. 用伪代数黎卡提方法(Fake Algebraic Riccati Technique)证明了所设计最优控制器的稳定性. 通过数值仿真研究了控制器鲁棒性能与设计参数间的关系. 针对某扁平型磁悬浮飞轮的仿真和实验结果均表明引入同步误差的最优控制器能有效的抑制圆锥晃动.

关键词

磁轴承
模型预测
最优控制
黎卡提差分方程

电磁轴承利用电磁力将转子悬浮起来, 具有无摩擦、寿命长、支承刚度和阻尼可控、容易实现主动振动控制等优点, 广泛应用在高精度机床、洁净分子泵和离心机, 以及飞轮和控制力矩陀螺等航天器姿态控制系统执行机构上^[1~3].

旋转中的磁悬浮转子运动包含圆柱晃动和圆锥晃动两种模态, 其中前者对应转子的平动, 后者对应转子的扭摆运动. 磁悬浮航天动量轮等转子角动量和尺寸存在约束的磁轴承应用中, 转子通常设计成极转动惯量大于赤道转动惯量的扁平结构, 这种类型的磁轴承转子由于两个正交方向上的倾斜运动间存在较强的交叉耦合, 在高速旋转时圆锥晃动较剧烈, 此类磁轴承称为强陀螺效应磁轴承.

对于强陀螺效应磁轴承, 可以采用逆系统方法进行解耦控制^[4~6], 但这类方法为了保证精度必须进行工作量较大的辨识工作, 且最终控制器计算量大, 给控制器硬件设计带来难度.

交叉反馈控制被证明是抑制磁轴承陀螺效应的

有效方法^[7, 8]. Zhao 等人^[8]采用正的位移交叉反馈和负的速度交叉反馈实现对转子进动和章动的阻尼, 有效地抑制了多自由度磁轴承的陀螺效应.

交叉反馈控制方法本质上是基于经典频域控制理论的输出反馈控制, 其不足之处是缺乏公式化、系统化的设计方法. 基于现代控制理论的最优状态反馈控制, 如 LQ 控制, 是一种全息控制, 设计方法比较成熟, 通常能够给出控制器闭环解^[9]. Park 设计了 5 自由度磁悬浮反作用飞轮的 LQ 控制器, 优化的目标是飞轮传递到基座的振动最小^[10]. Grega 研究了磁轴承 LQ 控制器中性能权值阵的选择对灵敏度函数等系统性能指标的影响^[11].

文献[9~13]中磁轴承 LQ 控制器的求解均在连续域进行, 基于连续状态和控制输出值构造优化指标函数, 用代数黎卡提方程(Algebraic Riccati Equation, ARE)的解构造控制器解析解, 在控制器硬件实现时需将所得控制器离散化. 这种控制器求解方法对系统建模的精确度要求较高, 且离散化后的控制器性

能变差^[14].

20 世纪 70 年代, 学者们开始研究如何在离散域求解最优 LQ 控制问题, 提出用迭代黎卡提差分方程 (Riccati Difference Equation, RDE) 的方法直接给出离散空间的最优控制器^[14~16]. 文献[17, 18]证明了基于迭代 RDE 的解的收敛性, 文献[19]基于 RDE 的数值解构造了开环不稳定系统的最优滤波器, 并证明了闭环系统的稳定性, 同时指出了影响闭环系统性能的控制设计参数.

Zhu 等人^[20]针对数控加工中心的多轴运动同步问题, 提出在 LQ 控制器优化指标函数中加入轴与轴间的同步误差项, 设计出了同时补偿跟踪误差和各轴间同步误差的含交叉耦合的广义模型预测控制器. 本文将介绍一种针对强陀螺效应磁轴承的模型预测最优控制器, 通过最小化一个嵌入了圆锥涡动误差项的二次型性能指标函数来求解, 在求解中使用了 RDE. 通过仿真和实验结果验证该控制器的稳定性和抑制圆锥涡动的有效性.

1 控制对象建模

1.1 强陀螺效应磁轴承转子动力学模型

本文研究的强陀螺效应磁轴承转子径向采用两个磁轴承支承, 轴向采用永磁被动稳定方式, 绕轴向的转动用无刷直流电机驱动. 转子动力学模型如图 1 所示, 其中 x_1, y_1 为转子轴线在上轴承 (Bearings1) 平面中两个正交方向上的位移, f_{x1}, f_{y1} 为上轴承施加在转子上的两个正交力. x_2, y_2 和 f_{x2}, f_{y2} 类推. x, y

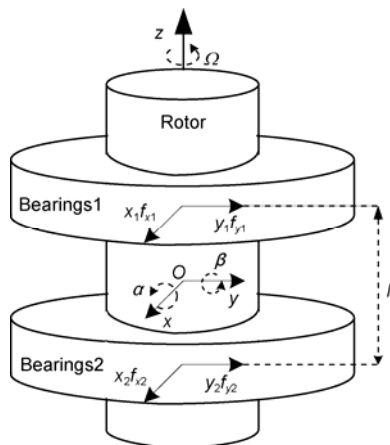


图 1 磁轴承转子动力学模型

为转子质心 O 在惯性空间中的位移, α, β 为转子对 X, Y 轴的倾斜角, Ω 为转子绕 z 轴的角速度, l 为上下轴承平面间距.

定义转子的广义位移 $\mathbf{q}$ 和广义轴承力 $\mathbf{F}$ 为

$$\mathbf{q} = [x \quad \beta \quad y \quad -\alpha]^T, \mathbf{F} = [f_x \quad p_y \quad f_y \quad -p_x]^T, \quad (1)$$

其中 f_x, p_x 分别是转子在 x 方向上受到的合力和力矩, f_y, p_y 类推. 由陀螺力学原理可得到刚性转子动力学模型:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{G}\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{F}, \quad (2)$$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & J_d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J_d \end{bmatrix}, \mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J_z \Omega \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -J_z \Omega & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (3)$$

其中, $\mathbf{M}$ 为质量阵, $\mathbf{G}$ 为陀螺阵, m 为转子质量, J_d 和 J_z 分别为转子径向和轴向转动惯量.

1.2 控制对象状态空间模型

定义轴承力 $\mathbf{f}$ 和转子在轴承坐标系中的位移 $\mathbf{q}_m$ 为

$$\mathbf{q}_m = [x_1 \quad x_2 \quad y_1 \quad y_2]^T, \quad (4)$$

$$\mathbf{f} = [f_{x1} \quad f_{x2} \quad f_{y1} \quad f_{y2}]^T.$$

$\mathbf{q}_m, \mathbf{f}$ 与 $\mathbf{q}, \mathbf{F}$ 间的关系为

$$\mathbf{q} = \frac{1}{2l} \begin{bmatrix} l & l & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & l & l \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{q}_m, \quad (5)$$

$$\mathbf{F} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 & 0 \\ l & -l & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & l & -l \end{bmatrix} \mathbf{f}.$$

在平衡位置一阶泰勒展开得到的局部线性化轴承力模型为

$$\mathbf{f} = \mathbf{k}_x \mathbf{q}_m + \mathbf{k}_i \mathbf{i}, \mathbf{i} = [i_{x1}, i_{x1}, i_{y1}, i_{y2}]^T, \quad (6)$$

其中 k_x, k_i 分别为磁轴承的位移刚度和电流刚度. 选取状态变量 $\mathbf{X}^T = [x_1, x_2, y_1, y_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{y}_1, \dot{y}_2]$, 控制输入取为 $\mathbf{U}^T = [i_{x1}, i_{x1}, i_{y1}, i_{y2}]$, 由(2)~(6)式可得状态空间模型为

$$\begin{cases} \dot{X} = A_c X + B_c U, \\ Y = CX, \end{cases} \quad (7)$$

$$A_c = \begin{bmatrix} 0_{4 \times 4} & I_4 \\ M_p & M_c \end{bmatrix}, B_c = \begin{bmatrix} 0_{4 \times 4} \\ M_f \end{bmatrix}, C = [I_4 \quad 0_{4 \times 4}], \quad (8)$$

$$M_p = \begin{bmatrix} m_{p1} & m_{p2} & 0 & 0 \\ m_{p2} & m_{p1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_{p1} & m_{p2} \\ 0 & 0 & m_{p2} & m_{p1} \end{bmatrix}, \quad (9a)$$

$$m_{p1} = \frac{k_x(J_d + ml^2)}{mJ_d}, \quad m_{p2} = \frac{k_x(J_d - ml^2)}{mJ_d}, \quad (9b)$$

$$M_c = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -m_c & m_c \\ 0 & 0 & m_c & -m_c \\ m_c & -m_c & 0 & 0 \\ -m_c & m_c & 0 & 0 \end{bmatrix}, m_c = \frac{J_z \Omega}{2J_d}, \quad (9)$$

$$M_f = \begin{bmatrix} m_{f1} & m_{f2} & 0 & 0 \\ m_{f2} & m_{f1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_{f1} & m_{f2} \\ 0 & 0 & m_{f2} & m_{f1} \end{bmatrix}, \quad (11a)$$

$$m_{f1} = k_i \frac{J_d + ml^2}{mJ_d}, \quad m_{f2} = k_i \frac{J_d - ml^2}{mJ_d}. \quad (11b)$$

2 模型预测最优控制器

2.1 控制器设计

将(7)式离散化得到

$$\begin{cases} X(k+1) = AX(k) + BU(k), \\ Z(k) = CX(k), \end{cases} \quad (12)$$

其中 k 代表离散化时间. 为了限制转子的圆锥涡动, 引入同步误差:

$$\begin{aligned} \delta_{xx} &= x_1 - x_2, \delta_{xy} = x_2 - y_1, \\ \delta_{yy} &= y_1 - y_2, \delta_{yx} = y_2 - x_1. \end{aligned} \quad (13)$$

同步误差可以记为

$$\Delta(k) = LCX(k), \quad (14)$$

$$\Delta(k) = \begin{bmatrix} \delta_{xx} \\ \delta_{xy} \\ \delta_{yy} \\ \delta_{yx} \end{bmatrix}, L = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (15)$$

再引入同步误差的差分信号:

$$\varepsilon(k) = \Delta(k) - \Delta(k-1). \quad (16)$$

基于模型预测输出定义性能指标函数:

$$\begin{aligned} J(k) &= \lambda \sum_{i=1}^{H_c} \hat{u}^T(k+i-1|k) \hat{u}(k+i-1|k) \\ &+ \sum_{i=1}^{H_p} \hat{Z}^T(k+i|k) \hat{Z}(k+i|k) \\ &+ v \sum_{i=1}^{H_p} \hat{\Delta}^T(k+i|k) \hat{\Delta}(k+i|k) \\ &+ \eta \sum_{i=1}^{H_p} \hat{\varepsilon}^T(k+i|k) \hat{\varepsilon}(k+i|k), \end{aligned} \quad (17)$$

其中 $\hat{Z}(k+i|k)$ 是通过离散模型预估的未来系统输出向量, $\hat{u}(k+i-1|k)$ 是估计的未来系统控制器输出向量, $\hat{\Delta}(k+i|k)$ 是未来的同步误差向量, H_p 是状态预测步数, H_c 是控制输出预测步数, λ 是正的控制代价系数, v 和 η 是非负同步系数.

若将指标函数中系统输出向量用状态向量表示, 则(17)式变为

$$J(k) = \sum_{j=0}^{H_p-1} S(\hat{X}, \hat{u}) + \hat{X}^T(k+H_p|k) P_0 \hat{X}(k+H_p|k), \quad (18)$$

$$\begin{aligned} S(\hat{X}, \hat{u}) &= \hat{X}^T(k+H_p-1+j|k) Q_j \hat{X}(k+H_p-1+j|k) \\ &+ \hat{u}^T(k+H_p-1+j|k) R_j \hat{u}(k+H_p-1+j|k) \\ &+ 2\hat{u}^T(k+H_p-1+j|k) M_j \hat{X}(k+H_p-1+j|k), \end{aligned} \quad (19)$$

$$P_0 = C^T C + v C^T L^T L C, \quad (20)$$

$$Q_j = \begin{cases} C^T C + v C^T L^T L C & \text{if } j=0, 1, \dots, H_p-2, \\ 0 & \text{if } j=H_p-1, \end{cases} \quad (21)$$

$$R_j = \begin{cases} \infty I, & \text{if } j=0, 1, \dots, H_p-H_c-1, \\ \lambda I + \eta B^T C^T L^T L C B, & \text{if } j=H_p-H_c, \dots, H_p-2, \\ \lambda I, & \text{if } j=H_p-1, \end{cases} \quad (22)$$

$$M_j = \begin{cases} \eta(A-I)^T C^T L^T L C B, & \text{if } j=0, 1, \dots, H_p-2, \\ 0, & \text{if } j=H_p-1, \end{cases} \quad (23)$$

其中 I 代表单位矩阵.

使性能指标(17)式最小化的最优控制器形式为

$$u(k) = -K_{H_{p-1}} X(k), \quad (24)$$

$$K_{H_{p-1}} = (B^T P_{H_{p-1}} B + R_{H_{p-1}})^{-1} (B^T P_{H_{p-1}} A + M_{H_{p-1}}^T), \quad (25)$$

其中, $P_{H_{p-1}}$ 通过迭代黎卡提差分方程(RDE)获得

$$P_{j+1} = A^T P_j A - (B^T P_j A + M_j^T)^T \times (B^T P_j B + R_j)^{-1} (B^T P_j A + M_j^T) + Q_j. \quad (26)$$

2.2 稳定性分析

引理 1. 若 P_0, Q_j, R_j 和 M_j 的值按(20)~(23)式取, 则对所有 $j \geq 0$, 由(24)~(26)式计算所得的 P_j 为半正定对称矩阵.

证明. 将(26)式改写成

$$P_{j+1} = A^T P_j A - K_j^T (B^T P_j B + R_j) K_j + Q_j, \quad (27)$$

其中,

$$K_j = (B^T P_j B + R_j)^{-1} (B^T P_j A + M_j^T), \quad (28)$$

显然, P_{j+1} 是对称的. 将(28)式代入(27)式, 有

$$\begin{aligned} P_{j+1} &= A^T P_j A - (B^T P_j A + M_j^T)^T \\ &\quad \times (B^T P_j B + R_j)^{-1} (B^T P_j B + R_j) K_j + Q_j \\ &= A^T P_j (A - BK_j) - M_j^T K_j + Q_j. \end{aligned} \quad (29)$$

将(28)式两边乘以 $K_j^T (B^T P_j B + R_j)$ 得到

$$K_j^T R_j K_j = K_j^T B^T P_j (A - BK_j) + K_j^T M_j^T. \quad (30)$$

(29)式减(30)式得到

$$\begin{aligned} P_{j+1} &= (A - BK_j)^T P_j (A - BK_j) + K_j^T R_j K_j \\ &\quad - M_j^T K_j - K_j^T M_j^T + Q_j. \end{aligned} \quad (31)$$

假设(19)式 $S(\hat{X}, \hat{u})$ 非负定, 即

$$\hat{X}^T Q_j \hat{X} + 2\hat{u}^T M_j^T \hat{X} + \hat{u}^T R_j \hat{u} \geq 0. \quad (32)$$

由于 R 非奇异, 上式等价于

$$Q_j - M_j R_j^{-1} M_j^T \geq 0, \quad (33)$$

可以得出(31)式等号右边后四项非负定, 即

$$\begin{aligned} &K_j^T R_j K_j - M_j^T K_j - K_j^T M_j^T + Q_j \\ &\geq K_j^T R_j K_j - M_j^T K_j - K_j^T M_j^T + M_j R_j^{-1} M_j^T \\ &= (R_j^{-1} M_j^T - K_j)^T R_j (R_j^{-1} M_j^T - K_j). \end{aligned} \quad (34)$$

引理 2. 若 P_0, Q_j, R_j 和 M_j 的值按(20)~(23)式取, 则对所有 $j \geq 0$, 由(26)式计算所得的 P_j 为单调非增.

证明. 设 P_j^1, P_j^2 为(26)式中 Q_j 分别取为 Q_j^1, Q_j^2 所对应的两个解, 则矩阵

$$\bar{P}_j = P_j^2 - P_j^1, \quad (35)$$

满足

$$\begin{aligned} \bar{P}_{j+1} &= \bar{A}_j^T P_j \bar{A}_j - (\bar{A}_j^T P_j B + M_j^T) (B^T P_j B + R_j)^{-1} \\ &\quad \times (B^T P_j \bar{A}_j + M_j^T) - \bar{Q}_j, \end{aligned} \quad (36)$$

其中,

$$\bar{A}_j^1 = A - B(B^T P_j^1 B + R_j)^{-1} (B^T P_j A + M_j^T), \quad (37)$$

$$\bar{Q}_j = Q_j^2 - Q_j^1, \quad (38)$$

$$\bar{R}_j = B^T P_j^1 B + R_j. \quad (39)$$

定义 P_j 的稳态值为 P_0^∞ , 则有

$$P_0^\infty = A^T P_0^\infty A + Q. \quad (40)$$

用上式作为(26)式的初值得到

$$\begin{aligned} P_1 &= A^T P_0^\infty A - (B^T P_0^\infty A + M_j^T)^T (B^T P_0^\infty B + R_j)^{-1} \\ &\quad \times (B^T P_0^\infty A + M_j^T) + Q_j \\ &\leq A^T P_0^\infty A + Q_j = P_0^\infty. \end{aligned} \quad (41)$$

若用 P_j^1 和 P_j^2 分别替换 P_0^∞ , 且取 $Q_j^1 = Q_j^2$, 则由(36)式得 $\bar{P}$ 在时刻 j 非负定, 从而 P_j 单调非增特性成立, 即

$$P_{j+k+1} \leq P_{j+k}, \text{ for all } k \geq 0. \quad (42)$$

定理 1. 若 $[A, B]$ 可控, $[A, \bar{Q}_{H_p-1}^{1/2}]$ 可测, 且 P_{H_p-1}

非增, 则上节所设计的控制器能使闭环系统稳定, 即以下闭环传递矩阵所有特征值落在单位圆内.

$$\bar{A}_{H_p-1} = A - B(B^T P_{H_p-1} B + R_{H_p-1})^{-1} B^T P_{H_p-1} A. \quad (43)$$

定理中 $\bar{Q}_{H_p-1}$ 定义为

$$\bar{Q}_{H_p-1} = P_{H_p-1} - P_{H_p}. \quad (44)$$

证明. 对如下代数黎卡提方程:

$$P = A^T P A - A^T P B (B^T P B + R)^{-1} B^T P A + Q, \quad (45)$$

若 $[A, B]$ 可控, $[A, Q^{1/2}]$ 可测, 且 $Q \geq 0, R > 0$ 则, 由代数黎卡提方程的稳定性理论可知存在唯一、最大、半正定的对称阵 $\bar{P}$ 使得矩阵:

$$A - B(B^T \bar{P} B + R)^{-1} B^T \bar{P} A,$$

所有特征根落在单位圆内^[20].

将(45)式改写为

$$P = (A - BK)^T P (A - BK) + K^T R K + Q, \quad (46)$$

将该代数黎卡提方程写成带下标的形式:

$$P_j = (A - BK_j)^T P_j (A - BK_j) + K_j^T R_j K_j + \bar{Q}_j, \quad (47)$$

其中,

$$\bar{Q}_j = P_{j+1} - P_j, \quad (48)$$

则由引理 1 和 2 可以得到以下推论.

推论 1. 对于 ARE(47) 式, 若 $[A, B]$ 可控, $[A, \bar{Q}_j^{1/2}]$ 可测, 且 $\bar{Q}_j$ 非负定, R_j 正定, 则 P_j 能使以

下闭环传递矩阵稳定, 即 $\bar{A}_j$ 的所有特征根落在单位圆内.

$$\bar{A}_j = A - B(B^T P_j B + R_j)^{-1} B^T P_j A. \quad (49)$$

取推论 1 中(49)式下标为 $H_p - 1$, 则定理 1 以及控制器(24)式的稳定性得证.

2.3 鲁棒性分析

控制对象的标称频域模型可以由下式计算:

$$\hat{P}(s) = C(sI - A)^{-1} B. \quad (50)$$

实际系统的传递矩阵可以表示为

$$P(s) = \hat{P}(s) + \Delta_A, \quad (51)$$

或

$$P(s) = \hat{P}(s)(I + \Delta_M), \quad (52)$$

其中 Δ_A 和 Δ_M 分别代表范数有界的加性、乘性模型摄动, 根据小增益定理, 如果(53)式或(54)式成立, 则系统是鲁棒稳定的.

$$\bar{\sigma}[\hat{K}(s)S(s)]\|\Delta_A\|_\infty < 1, \quad (53)$$

$$\bar{\sigma}[\hat{K}(s)\hat{P}(s)(I + \hat{K}(s)\hat{P}(s))^{-1}]\|\Delta_M\|_\infty < 1, \quad (54)$$

其中 $\hat{K}(s)$ 代表含状态观测器的控制器传递函数矩阵, $S(s) = [I + \hat{P}(s)\hat{K}(s)]^{-1}$ 代表灵敏度函数.

根据以上理论, 在下面的数值仿真中, 选择控制灵敏度函数矩阵的最大奇异值 $\bar{\sigma}[\hat{K}(s)S(s)]$ 作为评价指标考察参数变化下的系统鲁棒性能.

3 数值仿真

磁轴承系统参数按表 1 设定, 注意其中转子转速固定为 1256.6 rad/s, 即每分钟 12000 转.

按表 1 参数可计算得开环系统状态转移矩阵的全部特征值为 $0.9724 \pm 0.2332i$, $1 \pm 0.0002i$, 1.0497 ,

表 1 系统参数

Item	Value
Rotor mass (kg)	2.8
Polar mass moments of inertia (kg m ²)	0.015
Transverse mass moments of inertia (kg m ²)	0.008
MB current stiffness (N/A)	185.9
MB position stiffness (kN/m)	330
Distance between upper/lower MBs (mm)	10
Rotor speed (rad/s)	1256.6
Control frequency (kHz)	10

1.0497 , 0.9526 , 0.9526 , 系统是不稳定的. 取 $H_p = 480$, $H_c = 80$, $\lambda = 0.05$, $v = 10$, $\eta = 5$, 并用 1×10^{15} 模拟 ∞ , 采用(43)式可计算得闭环系统传递矩阵 $\bar{A}_{H_p-1}$ 的全部特征值为 $0.8953 \pm 0.0778i$, $0.9526 \pm 0.0001i$, $0.0014 \pm 0.0013i$, -0.0006 , 0.0004 , 全部落在单位圆中, 所设计的控制能镇定系统.

3.1 模型预测步数对性能影响

仿真中发现系统性能与模型预测步数 H_p , H_c 密切相关, 图 2 给出了 H_p , H_c 变化, 其他参数固定为 $\lambda = 0.05$, $v = 0$, $\eta = 0$ 时系统控制灵敏度函数矩阵最大奇异值 $\bar{\sigma}[\hat{K}(s)S(s)]$ 的频率特性.

从图 2 可以看出, 增大状态预测步数 H_p 或减小控制输出预测步数 H_c 都可以降低控制灵敏度函数矩阵最大奇异值 $\bar{\sigma}[\hat{K}(s)S(s)]$, 提高鲁棒性. 仿真中发现适当提高控制输出预测步数 H_c 可以提高系统响应速度.

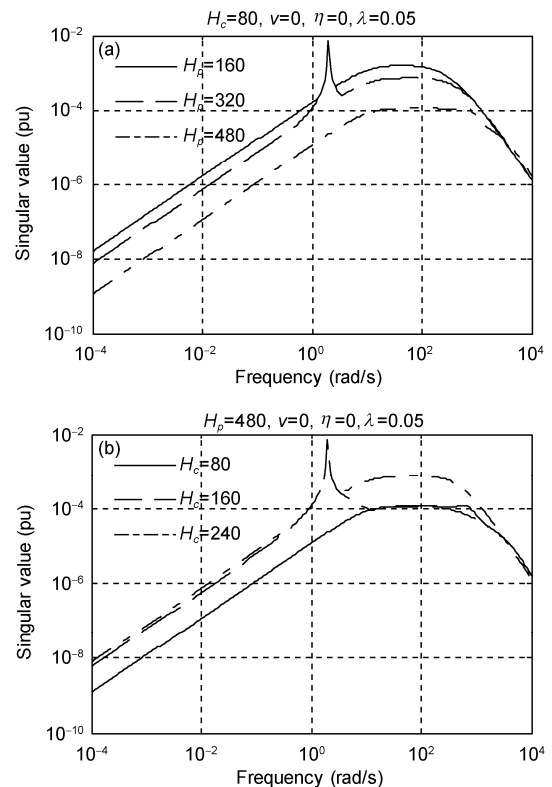


图 2 其他参数固定, H_p 变化(a)和 H_c 变化(b)时控制灵敏度函数矩阵最大奇异值 $\bar{\sigma}[\hat{K}(s)S(s)]$

3.2 指标函数中权系数对性能影响

图 3 给出了 λ, v, η 变化, 其他参数固定为 $H_c = 80$, $H_p = 480$ 时系统控制灵敏度函数矩阵最大奇异值 $\sigma[\hat{K}(s)S(s)]$ 的频率特性。

从图 3(a)可以看出, 增大控制代价系数 λ 可以降低控制灵敏度函数矩阵最大奇异值 $\sigma[\hat{K}(s)S(s)]$, 提高鲁棒性; 仿真中发现 λ 超过 0.5 后系统响应速度显著变慢。

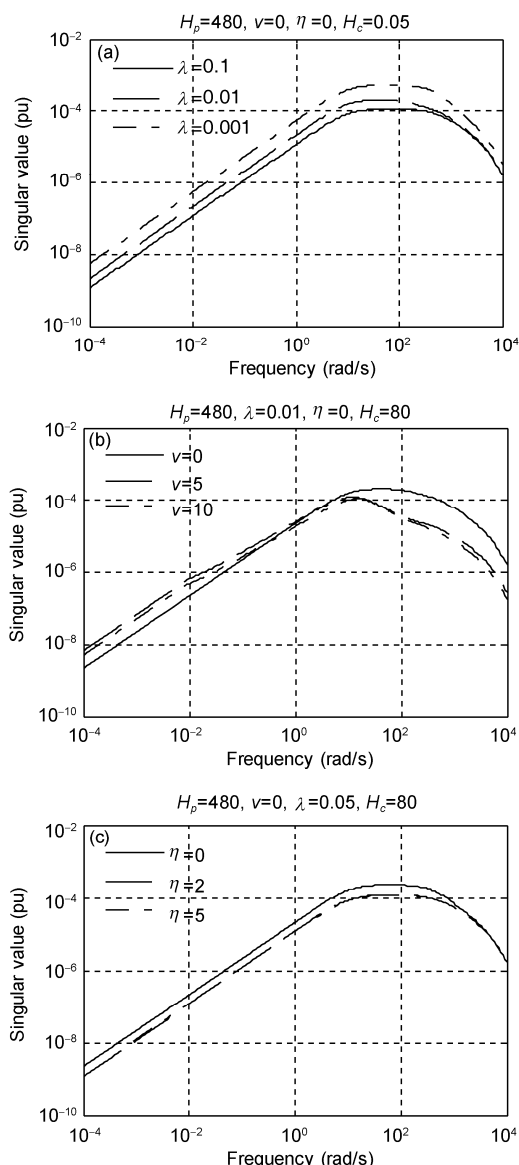


图 3 其他参数固定, λ 变化(a)、 v 变化(b)、 η 变化(c)时控制灵敏度函数矩阵最大奇异值 $\sigma[\hat{K}(s)S(s)]$

从图 3(b)可以看出, 同步系数 v 对系统性能的影响与频率相关. 在低频带内, 低同步系数能降低 $\sigma[\hat{K}(s)S(s)]$, 提高鲁棒性; 频率高于 1 Hz 后, 增大 v 可以提高性能. v 取 5 和取 10 所对应的 $\sigma[\hat{K}(s)S(s)]$ 已经很接近, v 增大到 10 以后再提高 v 意义已不大。

从图 3(c)可以看出, 正的同步系数 η 能降低 $\sigma[\hat{K}(s)S(s)]$, 提高鲁棒性; η 取 2 和取 5 所对应的 $\sigma[\hat{K}(s)S(s)]$ 基本重合, η 增大到 1 以后 $\sigma[\hat{K}(s)S(s)]$ 基本不变。

3.3 转子位移响应

首先考察转子起浮特性, 将初始位置设为 $[x_1, x_2, y_1, y_2]^T = [20, 0, 0, 0]^T$ (μm), 控制参数取为 $H_c = 80$, $H_p = 480$, $\lambda = 0.05$. 改变 v 和 η 的值, 仿真得到轴承坐标系转子位移起浮响应曲线如图 4。

从图 4 中可以发现, 两种控制器都能使系统稳定悬浮, 不考虑陀螺效应($v = 0, \eta = 0$)的控制器响应速度较快. 注意图 4 (a)和(b)的时间坐标不同。

为了考察系统抗干扰能力, 在 x_1, y_1 通道分别加入周期为 1256.6 rad/s, 幅值为 50 N, 相位差 90° 的正弦干扰力, 转子上轴承平面轴心位移如图 5 所示, 可以看出考虑了陀螺效应的模型预测最优控制器转子轴心位移扰动约为不考虑陀螺效应最优控制器的一半。

4 实验验证

在某磁悬浮反作用飞轮上对设计的模型预测最优控制器进行了实验验证. 该为了提高转动惯量, 该飞轮形状设计成扁平型, 属于强陀螺效应磁轴承. 磁轴承-转子系统参数与表 1 一致, 实验平台如图 6 所示。

取控制参数为 $H_c = 80$, $H_p = 480$, $\lambda = 0.05$, 考虑陀螺效应的控制器 v 和 η 取为 $v = 5, \eta = 1$, 不考虑陀螺效应的控制器 v 和 η 都为零. 离散化后的最优控制器及状态观测器实现在 dSPACE 数控平台上, 两种控制器的轴承坐标系转子位移起浮响应曲线如图 7, 可以看出两种控制器都能使系统稳定悬浮, 且稳态悬浮品质接近; 不考虑陀螺效应的控制器起浮较快; 注意转子的初始位置有一定随机性。

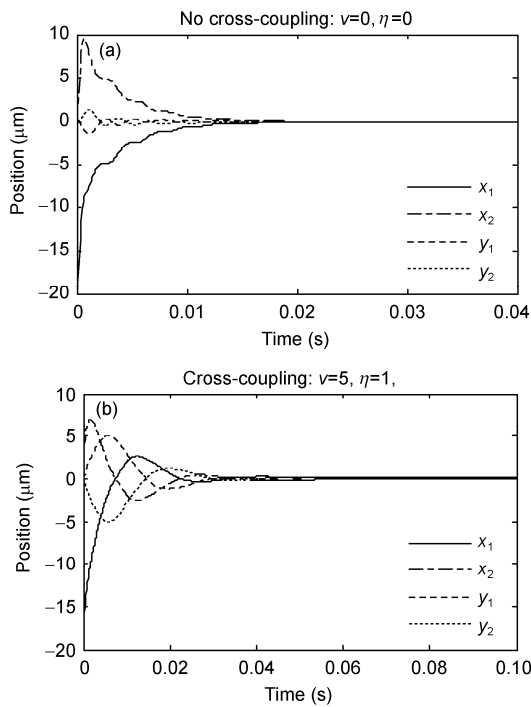


图4 轴承坐标系转子位移起浮响应
(a) $\nu=0, \eta=0$; (b) $\nu=5, \eta=1$

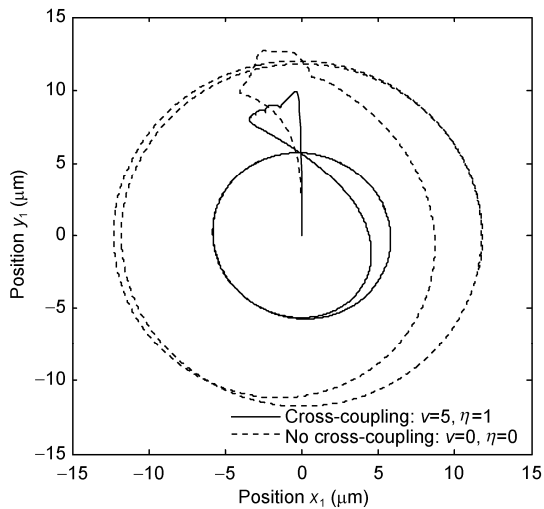


图5 周期扰动下上轴承平面内转子轨迹

图8给出了飞轮转速为810 rpm时,磁悬浮飞轮上下两端分别在 x 和 y 方向上的4个涡流传感器检测到的转子位移值 x_1, x_2, y_1, y_2 。

从图8(a)中可以看出:在 x 方向上,转子上下两端的位移 x_1 和 x_2 的主分量相位相反; y 方向也一样.这说明转子位移的主要分量是圆锥涡动所造成的。

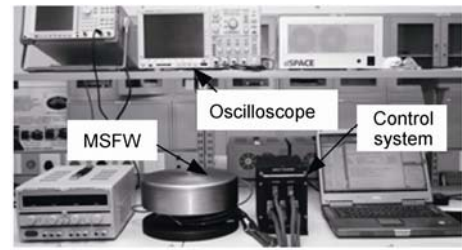


图6 实验平台

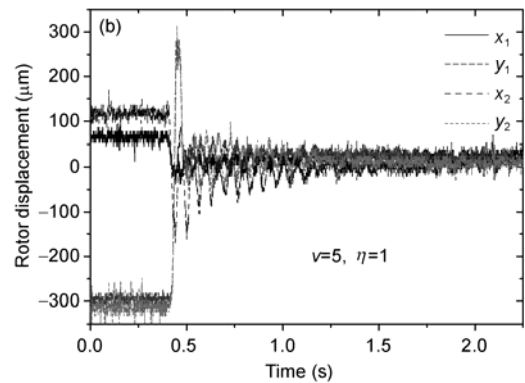
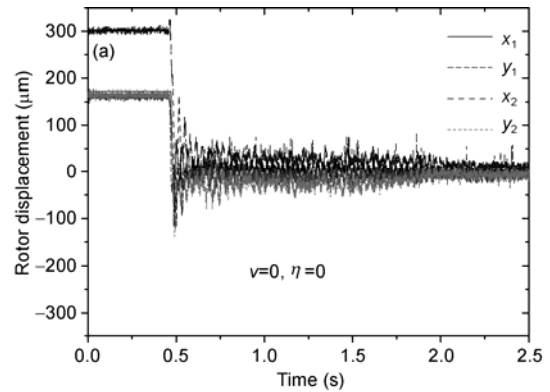
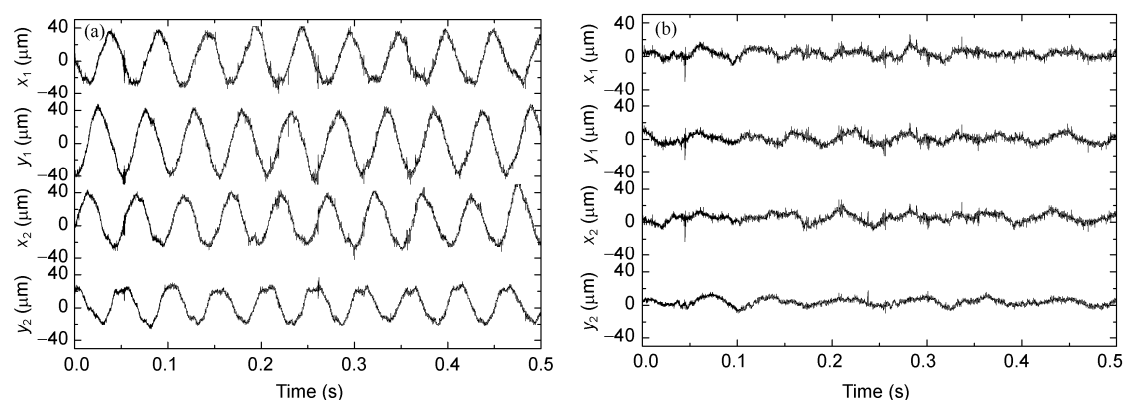


图7 轴承坐标系转子位移起浮响应
(a) $\nu=0, \eta=0$; (b) $\nu=5, \eta=1$

图8(b)中该分量显著下降,这说明考虑了陀螺效应的模型预测最优控制器比普通LQ控制器能更好的抑制陀螺效应导致的转子圆锥涡动,转子轴心位移更小。

5 结论

扁平型转子磁轴承系统存在较强的陀螺效应,高速旋转时转子圆锥涡动较剧烈,影响了悬浮品质和系统稳定性.为了抑制陀螺效应引起的圆锥涡动,本文提出了一种模型预测最优控制器设计方法,在

图8 810 rpm 转子位移波形($H_c=80$, $H_p=480$, $\lambda=0.05$)(a) $v=0$, $\eta=0$; (b) $v=5$, $\eta=1$

二次型性能指标函数中加入表征圆锥涡动幅值的同步误差项, 通过迭代黎卡提差分方程求解出最优控制

器。针对某扁平型磁悬浮飞轮的仿真和实验结果均表明引入同步误差的最优控制器能有效抑制圆锥涡动。

参考文献

- 王曦, 房建成, 樊亚洪, 等. 轴向力偏转五自由度永磁偏置磁轴承及磁路解耦设计. 中国电机工程学报, 2011, 31(17): 91–96
- Fang J C, Sun J J, Xu Y L, et al. A new structure for permanent-magnet-biased axial hybrid magnetic bearings. IEEE T Magn, 2009, 45(2): 5319–5325
- Fang J C, Ren Y. High-precision control for a single-gimbal magnetically suspended control moment gyro based on inverse system method. IEEE T Ind Electron, 2011, 58(9): 4331–4342
- 孙玉坤, 朱志莹. 三自由度混合磁轴承最小二乘向量机逆模辨识与解耦控制. 中国电机工程学报, 2010, 30(15): 112–117
- 张丹红, 陈建华, 苏义鑫, 等. 主动磁力轴承系统的模糊逆建模. 中国电机工程学报, 2006, 26(14): 126–130
- 孙玉坤, 费德成, 朱焜秋. 基于 α 阶逆系统五自由度无轴承永磁电机解耦控制. 中国电机工程学报, 2006, 26(1): 120–126
- Markus A, Ladislav K, Rene L. Performance of a magnetically suspended flywheel energy storage device. IEEE T Contr Sys Tech, 1996, 4(5): 494–501
- Zhao L, Zhang K, Zhu R S, et al. Experimental research on a momentum wheel suspended by active magnetic bearings. In: Proceedings of the 8th International Symposium on Magnetic Bearings. Mito, Japan, 2002. 605–609
- Zhuravlyov Y N. On LQ-control of magnetic bearing. IEEE T Contr Sys Tech, 2000, 8(2): 344–350
- Park J Y, Palazzolo A, Beach R. MIMO active vibration control of magnetically suspended flywheels for satellite IPAC service. J Dyn Syst Meas Contr, 2008, 130(7): 501–522
- Grega W, Pilat A. Comparison of linear control methods for an AMB system. Int J Appl Math Comput Sci, 2005, 15(2): 245–255
- Jastrzebski R P. Design and implementation of FPGA-based LQ control of active magnetic bearings. Dissertation of Doctor Degree, Lappeenranta, Finland: Lappeenranta University of Technology, 2007: 40–65
- Kim C S, Lee C W. Isotropic optimal control of active magnetic bearing system. In: Proceedings of the 4th International Symposium on Magnetic Bearings. Zurich, Switzerland, 1994. 35–40
- Kucera V. The discrete Riccati equation of optimal control. Kybernetika, Prague, 1972, 8(5): 430–447
- Pappas T, Laub A J, Sandell N R. On the numerical solution of the discrete-time algebraic Riccati equation. IEEE T Automat Contr, 1980, AC-25(4): 631–641
- Emami N A, Franklin G F. Dead beat control and tracking of discrete time systems. IEEE T Automat Contr, 1982, AC-27(1): 176–181
- Callier F M, Willems J L. Criterion for the convergence of the solution of the Riccati difference equation. IEEE T Automat Contr, 1981, AC-26(6): 1232–1242
- Chan S C, Goodwin G C, Sin K S. Convergence properties of the Riccati difference equation in optimal filtering of nonstabilizable systems. IEEE T Automat Contr, 1984, AC-29(2): 110–118
- Souza C E, Gevers M, Goodwin G C. Riccati equations in optimal filtering of nonstabilizable systems having singular state transition matrices. IEEE T Automat Contr, 1986, AC-31(9): 831–837
- Zhu K Y, Chen B P. Cross-coupling design of generalized predictive control with reference models. In: Proc IMechE Part I: J Syst Control Eng, 2001, 215(3): 75–84