



# Multiquadric 拟插值对高阶导数逼近的稳定性分析

谨以此文致《中国科学》创刊六十周年

马利敏<sup>①②</sup>, 吴宗敏<sup>①\*</sup>

① 上海市现代应用数学重点实验室, 复旦大学数学科学学院, 上海 200433;

② 浙江工商大学统计与数学学院, 杭州 310018

E-mail: zmwu@fudan.edu.cn

收稿日期: 2009-07-08; 接受日期: 2009-11-30; \* 通信作者

国家重点基础研究发展计划 (973 项目)(批准号: 2006CB303102) 与上海市科学技术委员会 (批准号: 09DZ2272900) 资助项目

**摘要** 基于样本数据来数值模拟函数的高阶导数是数值逼近中遇到的一类重要而且基本的问题, 差商方法是数值微分的传统方法. 但是在实际问题的求解中, 它表现出强烈的不稳定性. 在实际应用中, 由于差商计算的不稳定性, 它仅能用来模拟函数的低阶导数. 为了更好地模拟函数的高阶导数, 本文利用 multiquadric 拟插值提出了一种新的方法. 并将 multiquadric 拟插值方法模拟函数导数的稳定性与传统差商方法所得结果进行了对比. 数值例子很好地验证了本文的理论. 从理论论证和数值例子比较来看, multiquadric 拟插值方法比差商方法更为稳定. 这个性质也表明, 基于散乱甚至有干扰的数据, 在逼近函数的高阶导数时, multiquadric 拟插值方法是一个有效的工具.

**关键词** 径向基函数 (RBFs) Hardy's multiquadric (MQ) 拟插值 差商方法 白噪声 期望 方差

**MSC (2000) 主题分类** 65D25, 41A25

## 1 引言

本文讨论数值逼近中遇到的一类基本问题. 已知定义在区间  $[a, b]$  上的函数  $f(x)$  的样本数据  $\{f(x_j); j = 0, 1, \dots, N\}$ , 这里  $N + 1$  是数据点的个数, 并且数据点按升序排列, 即

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b, \quad h := \max_{1 \leq j \leq N} (x_j - x_{j-1}).$$

希望要做的事情是模拟或者估计这个函数的高阶导数  $f^{(n)}(x)$ . 事实上, 函数的取值

$$\{f(x_j); j = 0, 1, \dots, N\}$$

通常不能准确地得到, 因为在测量时, 测量的方法可能会造成数据不精确, 甚至计算机本身的精度可能也达不到要求. 假设我们仅仅能得到含有扰动误差的数据集  $\{f^*(x_j) = f(x_j) + \xi_j\}$ , 这里  $\{\xi_j\}$  是两两相互独立的白噪声. 对于随机白噪声  $\xi$ , 用  $E(\xi)$  表示  $\xi$  的期望,  $\sigma^2(\xi)$  表示它的方差. 两两相互独立的白噪声  $\xi_j$  应该满足

$$E\xi_j = 0, \quad j = 0, \dots, N \quad (1)$$

以及

$$E\xi_j \xi_k = \begin{cases} \sigma^2, & j = k, \\ 0, & j \neq k. \end{cases} \quad (2)$$

(1) 式说明  $\{\xi_j\}$  是期望为零的随机变量.

本文的目的是提出一种新的数值方法, 基于含有上文定义白噪声  $\{\xi_j\}$  的散乱数据样本点集  $\{f^*(x_j) = f(x_j) + \xi_j\}$ , 来逼近函数  $f(x)$  的高阶导数.

讨论这个问题的思想来源是:

- 在数值逼近中, 高阶导数的精确度 (无论是估计还是模拟) 是非常重要的, 尤其是应用在求解微分方程的数值解时.

- 在数值逼近中, 除了差商方法以外, 只有极少的方法能用来估计函数的高阶导数<sup>[1,2]</sup>, 而这类逼近的误差估计通常也是基于 Taylor 展开或者说等价于差商方法.

- 如果数据点非常密集, 使用差商方法计算时, 会造成噪声误差除以计算机精度零的状况. 这就引起了差商方法的不稳定性. 因此, 差商方法通常只能用来模拟函数的低阶导数.

- 在实际应用中, 迫切需要一种高精度、稳定、简单的方法来模拟函数的高阶导数.

因为插值多项式的首项系数就是差商<sup>[3]</sup>, 差商方法实际上是利用局部多项式插值方法表模拟函数的导数. 事实上, 如果样本点含有噪声, 则利用插值方法是不合理的, 因为它把含有噪声的数据作为精确数据来对待, 另外多项式插值存在 Runge 现象. 总之, 这造成了差商方法的强烈不稳定性. 可惜的是, 到目前为止, 除差商方法外尚未发现更好的方法来解决函数高阶导数的逼近问题. 使用任何其它的局部插值的方法来计算高阶导数也会引起同样的问题. 在样本点含有噪声的情况下, 我们最好能够打破插值的限制. 这样如果不使用差商或者说插值方法, 那么局部最小二乘方法可能是一个不错的选择. 但是, 在用来估计高阶导数时, 从文献中我们没有查找到运用最小二乘方法得到好的结果的例子.

在逼近理论中, 作为简单而稳定的逼近方法, 拟插值方法是非常著名的. 拟插值最早的例子大概是 Bernstein 的逼近, 他使用 Bernstein 多项式来构造定义在区间  $[0, 1]$  上的单变量函数  $f(x)$  的拟插值. 这种方法以 Beziér 和 de Casteljau 命名并被广泛地应用在计算机辅助几何设计上. 还有一个著名的拟插值方法应用于信号处理领域, 通过 Whittaker-Shannon 采样序列重构有限带宽函数, 譬如声音语言等. 当然, B-样条序列也是非常有名且被广泛应用的, 许多计算机软件都含有这个用来表示曲线或者曲面的程序包. 因为 multiquadric 函数有很多优点, 因此近年来在逼近理论和应用中, multiquadric 拟插值是一类非常流行的方法<sup>[4]</sup>. Beatson 甚至把它应用在获得了 11 个奥斯卡奖项的电影“指环王 -III”的场景设计中, 以取得更好的动画效果, 场景设计就是该电影所获得的其中一个奥斯卡奖项.

定义 multiquadric 函数  $\phi(x) = \sqrt{c^2 + x^2}$  以及  $\phi_j(x) = \phi(x - x_j)$ , 这里  $c$  称为形状参数. 散乱数据点上函数的 multiquadric 拟插值的一般形式为

$$(\mathcal{L}f)(x) = \sum f(x_j)\psi_j(x), \quad (3)$$

这里  $\psi_j(x)$  是 multiquadric 函数的线性组合, 即

$$\psi_j(x) = \frac{\phi_{j+1}(x) - \phi_j(x)}{2(x_{j+1} - x_j)} - \frac{\phi_j(x) - \phi_{j-1}(x)}{2(x_j - x_{j-1})}.$$

众所周知  $(\mathcal{L}f)(x)$  收敛于  $f(x)$  (参见文献 [5, 6]). 那么这种方法能不能用来逼近函数的导数呢? 最近 Ma 和 Wu 在文献 [7] 中论证了 multiquadric 拟插值方法可以对函数导数提供一个很好的逼近. 具

体来说,  $(\mathcal{L}f)^{(n)}(x)$  收敛于  $f^{(n)}(x)$ , 且当  $c = \mathcal{O}(h^{\frac{1}{n+1}})$  时, 逼近阶为  $\mathcal{O}(h^{\frac{2}{n+1}})$ . 更多关于定义在有界区间上的 multiquadric 拟插值的细节, 可以参考文献 [7]. 基于 [7] 的一些结论, 本文进一步就方法的数值稳定性进行讨论, 从理论上详细给出它与差商方法在数值稳定性上的比较. 通过理论分析, 验证 multiquadric 拟插值方法比差商方法更稳定. 数值例子也很好体现了这个优点. 值得提醒的是, 对于多变量问题, 网格点上的拟插值可以通过张量积的方法得到, 散乱数据点上的拟插值方法可以参考文献 [8] 中展示的方法, 因此文章的重点放在考虑含单变量的问题.

本文的结构如下. 第 2 节分析差商的稳定性问题. 第 3 节介绍 multiquadric 拟插值方法并讨论它的稳定性. 另外, 通过与传统的差商方法比较, 进一步地讨论 multiquadric 拟插值方法的稳定性. 为了更好地验证本文的理论, 第 4 节给出了一些数值例子. 第 5 节是这篇文章的结论部分.

## 2 差商方法的稳定性分析

首先我们分析差商方法的稳定性. 差商是通过如下的递推公式来定义的:

$$[x_0]f = f(x_0), \quad [x_0, x_1]f = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}, \quad [x_0, x_1, \dots, x_n]f = \frac{[x_1, \dots, x_n]f - [x_0, \dots, x_{n-1}]f}{x_n - x_0}.$$

可以证明, 存在一个  $\xi \in (x_0, x_n)$ , 使得  $[x_0, x_1, \dots, x_n]f = f^{(n)}(\xi)/n!$ . 因此, 当点  $x$  在  $\xi$  附近时, 人们通常利用分段常数的阶梯函数  $n![x_0, x_1, \dots, x_n]f$  来估计函数的导数  $f^{(n)}(x)$ .

在逼近理论中, 差商还有一个等价定义. 令  $\{x_j; j = 0, 1, \dots, n\} \subset [a, b]$  是两两不同的  $n+1$  个点构成的集合. 令  $p \in \mathcal{P}_n$  且满足插值条件

$$p(x_j) = f(x_j), \quad j = 0, 1, \dots, n. \quad (4)$$

则多项式  $p(x)$  的首项  $x^n$  的系数就是关于插值数据的  $n$  阶差商 [3]. 根据 Lagrange 插值公式, 令  $l_k(x)$  表示函数

$$l_k(x) = \prod_{j \neq k} \frac{(x - x_j)}{(x_k - x_j)}, \quad x_0 \leq x \leq x_n. \quad (5)$$

可以得到插值函数

$$p(x) = \sum_{k=0}^n f(x_k)l_k(x). \quad (6)$$

则我们可以得到差商的另一个显式表示, 即

$$[x_0, x_1, \dots, x_n]f = \sum_{k=0}^n \frac{f(x_k)}{\prod_{j \neq k} (x_k - x_j)}. \quad (7)$$

为了讨论差商的稳定性, 我们引用文献 [9] 中如下的定理做做准备.

**定理 2.1** 令  $f \in C^n[a, b]$ , 且  $\{x_j; j = 0, 1, \dots, n\}$  是区间  $[a, b]$  上一列两两不同点组成的集合. 则在包含点集  $\{x_j; j = 0, 1, \dots, n\}$  的最小区间内, 存在一个点  $\xi$ , 满足等式

$$[x_0, x_1, \dots, x_n]f = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}. \quad (8)$$

为了讨论差商的误差和稳定性, 从现在开始, 假定  $f \in C^{n+1}$ . 在定理 2.1 的帮助下, 可以得到下面的定理.

**定理 2.2** 令  $\{x_j; j = 0, \dots, n\}$  是均匀分布点列,  $H$  表示步长, 如果  $|x - \xi| \sim \mathcal{O}(H)$ , 则

$$E[(\mathcal{D}f^*)^{(n)}(x) - f^{(n)}(x)]^2 \leq \mathcal{O}\left(\frac{\sigma^2}{H^{2n}}\right) + \mathcal{O}(H^2),$$

这里  $\mathcal{D}$  是点列  $x_0, x_1, \dots, x_n$  上  $n$  阶的多项式差商算子, 函数  $f^*(x)$  表示对含有白噪声的函数  $f(x)$  进行多项式插值.

**证明** 我们有

$$\begin{aligned} & E[(\mathcal{D}f^*)^{(n)}(x) - f^{(n)}(x)]^2 \\ &= E[(\mathcal{D}f^*)^{(n)}(x) - (\mathcal{D}f)^{(n)}(x) + (\mathcal{D}f)^{(n)}(x) - f^{(n)}(x)]^2 \\ &= (n!)^2 \cdot E\left(\sum_{k=0}^n \frac{f^*(x_k)}{\prod_{j \neq k} (x_k - x_j)} - \sum_{k=0}^n \frac{f(x_k)}{\prod_{j \neq k} (x_k - x_j)}\right)^2 + \mathcal{O}(H^2) \\ &= (n!)^2 \cdot E\left(\sum_{k=0}^n \frac{\xi_j}{\prod_{j \neq k} (x_k - x_j)}\right)^2 + \mathcal{O}(H^2) = (n!)^2 \cdot \sigma^2 \cdot \sum_{k=0}^n \frac{1}{\prod_{j \neq k} (x_k - x_j)^2} + \mathcal{O}(H^2) \\ &= (n!)^2 \cdot \sigma^2 \cdot \sum_{k=0}^n \frac{1}{(k!(n-k)!H^n)^2} + \mathcal{O}(H^2) = \sigma^2 \cdot \frac{1}{H^{2n}} \sum_{k=0}^n \left(\frac{n!}{k!(n-k)!}\right)^2 + \mathcal{O}(H^2) \\ &= \sigma^2 \cdot \frac{1}{H^{2n}} \sum_{k=0}^n (C_n^k)^2 + \mathcal{O}(H^2) = \mathcal{O}\left(\frac{\sigma^2}{H^{2n}}\right) + \mathcal{O}(H^2), \end{aligned} \tag{9}$$

这样就完成了定理的证明.

**注记 2.3** 当样本点为非均匀分布时, 差商方法的稳定性通常会更差.

**注记 2.4** 从定理 2.1 可以看出, 为了确保差商方法不稳定部分 (第一项) 引起的误差能被理论误差 (第二项) 控制,  $\sigma^2$  需要满足  $\sigma_D^2 \leq \mathcal{O}(H^{2n+2})$ . 这意味着, 对于含有不超过 20 位十进制有效数字的 64 位计算机, 我们只能用差商方法来估计函数的低阶导数. 在大量的实际应用中, 随机测量误差的方差  $\sigma_D^2$  都会远远大于 64 位精度 ( $2^{-64}$ ), 因此利用差商对高阶导数进行逼近将会毫无意义. 有时候, 结果甚至会连一位有效数字都没有. 譬如讲, 当  $H < 10^{-4}$ ,  $n > 5$ , 这时利用 64 位计算机进行计算是毫无意义的.

### 3 Multiquadric 拟插值的稳定性

Multiquadric 函数首先由 Hardy<sup>[10]</sup> 应用在波音飞机的外形设计上, 它在许多数值模拟中都表现出很好的特性<sup>[11]</sup>. Beatson 和 Dyn<sup>[12]</sup> 用它构造了 multiquadric B-样条. 当使用 multiquadric 函数插值方法时, 需要解一个大规模的线性代数方程组. 当利用 multiquadric 方法解决稠密点集上插值问题时, 系数矩阵的条件数非常大. 因为 multiquadric 函数插值方法的不稳定性, 近年来, multiquadric 拟插值方法受到了更多的关注. 为了提高在边界附近的逼近水平, Beatson 和 Powell<sup>[4]</sup> 提出了三个 multiquadric 拟插值方法, 相应地命名为  $\mathcal{L}_A$ 、 $\mathcal{L}_B$  和  $\mathcal{L}_C$ . 后来, Wu 和 Schaback<sup>[6]</sup> 改进了这些方法并提出了 multiquadric 拟插值方法  $\mathcal{L}_D$ , 证明了方法的形状保持性质与逼近速度. Ling<sup>[13]</sup> 证明了对  $\mathcal{L}_D$  拟插值公式的重复应用可以进一步提高收敛的速度. 这些工作的重点都放在 multiquadric 拟插值对函数自身的逼近能力上, 而忽略了它对函数导数的逼近能力. 定义

$$(\mathcal{L}f)(x) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} f(x_j)\psi_j(x), \tag{10}$$

这里  $\psi_j(x)$  是 multiquadric 函数的线性组合, 即

$$\psi_j(x) = \frac{\phi_{j+1}(x) - \phi_j(x)}{2(x_{j+1} - x_j)} - \frac{\phi_j(x) - \phi_{j-1}(x)}{2(x_j - x_{j-1})},$$

当  $n \geq 2$  时, Ma 和 Wu<sup>[7]</sup> 讨论了 multiquadric 拟插值方法  $(Lf)^{(n)}(x)$  对  $f^{(n)}(x)$  的逼近阶. 当  $n < 2$  时, 这个问题已经被一些数学家解决了<sup>[5, 6]</sup>. 文献 [7] 的主要结果如下.

**定理 3.1** 如果  $f(x) \in C^{(n+2)}(\mathbb{R})$  并且  $f^{(j)}(x)$  被次数为  $n+2-j$  的多项式所控制, 则  $|(Lf)^{(n)}(x) - f^{(n)}(x)| \leq \mathcal{O}(h^{\frac{2}{n+1}})$  成立, 这里假定  $c = \mathcal{O}(h^{\frac{1}{n+1}})$ .

本文重点讨论利用 multiquadric 拟插值方法计算  $f^{(n)}(x)$  时, 噪声  $\{\xi_j\}$  带来的影响. 为了讨论 multiquadric 函数的性质, 首先考虑标准 multiquadric 函数  $\varphi(x) = \sqrt{1+x^2}$ . 下面从 [7] 中引用一个引理.

**引理 3.2**  $\varphi(x)$  的第  $n$  阶导数 ( $n \geq 2$ ) 可以有一个上界

$$|\varphi^{(n)}(x)| \leq \frac{C_n}{(1+x^2)^{\frac{n+1}{2}}},$$

这里  $C_n$  是一个与  $n$  有关的常数.

含有参数  $c$  的 multiquadric 函数定义为  $\phi(x) = \sqrt{c^2+x^2} = c \cdot \varphi(\frac{x}{c})$ , 它的导数也有一个上界

$$|\phi^{(n)}(x)| \leq \frac{C_n \cdot c^2}{(c^2+x^2)^{\frac{n+1}{2}}}.$$

这样可以直接推导出下面两个不等式:  $|\phi^{(n)}(x)| \leq \frac{C_n \cdot c^2}{|x|^{n+1}}$ ,  $|\phi^{(n)}(x)| \leq \frac{C_n}{c^{n-1}}$ .

为了得到稳定性的结果, 在证明中, 还需要下面一个引理.

**引理 3.3** 不等式

$$\int_{-\infty}^{+\infty} [\phi^{(n)}(x)]^2 dx \leq \mathcal{O}\left(\frac{1}{c^{2n-3}}\right)$$

成立.

**证明** 我们有

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} [\phi^{(n)}(x)]^2 dx &= \int_{|x| \leq c} [\phi^{(n)}(x)]^2 dx + \int_{|x| > c} [\phi^{(n)}(x)]^2 dx \\ &\leq \int_{-c}^c \left[\frac{C_n}{c^{n-1}}\right]^2 dx + 2 \int_c^{+\infty} \frac{[C_n \cdot c^2]^2}{x^{2(n+1)}} dx = \frac{c \cdot C_n^2}{(c^{n-1})^2} - \frac{[C_n \cdot c^2]^2}{2n+1} \cdot \frac{1}{x^{2n+1}} \Big|_c^\infty \\ &\leq \mathcal{O}\left(\frac{1}{c^{2n-3}}\right) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{c^{2n-3}}\right) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{c^{2n-3}}\right). \end{aligned}$$

引理得证.

这样我们就可以得到下面的定理.

**定理 3.4** 对于 multiquadric 拟插值算子  $\mathcal{L}$ , 令  $c = \mathcal{O}(h^{\frac{1}{n+1}})$ , 则有

$$\mathbb{E}[(\mathcal{L}f^*)^{(n)}(x) - f^{(n)}(x)]^2 \leq \mathcal{O}\left(\frac{\sigma^2}{h^{\frac{n}{n+1}}}\right) + \mathcal{O}(h^{\frac{4}{n+1}})$$

成立, 这里  $f^*$  表示对含有噪声的函数  $f(x)$  的 multiquadric 拟插值.

证明 我们有

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}[(\mathcal{L}f^*)^{(n)}(x) - f^{(n)}(x)]^2 \\ &= \mathbb{E}[(\mathcal{L}f^*)^{(n)}(x) - (\mathcal{L}f)^{(n)}(x) + (\mathcal{L}f)^{(n)}(x) - f^{(n)}(x)]^2 \\ &= \mathbb{E}\left[\sum_{j=-\infty}^{+\infty} f^*(x_j)\psi_j^{(n)}(x) - \sum_{j=-\infty}^{+\infty} f(x_j)\psi_j^{(n)}(x) + \sum_{j=-\infty}^{+\infty} f(x_j)\psi_j^{(n)}(x) - f^{(n)}(x)\right]^2 \end{aligned}$$

成立. 注意到

$$\mathbb{E}\left[\sum_{j=-\infty}^{+\infty} f^*(x_j)\psi_j^{(n)}(x) - \sum_{j=-\infty}^{+\infty} f(x_j)\psi_j^{(n)}(x)\right] = 0,$$

可以得到

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}[(\mathcal{L}f^*)^{(n)}(x) - f^{(n)}(x)]^2 \\ &= \mathbb{E}\left[\sum_{j=-\infty}^{+\infty} f^*(x_j)\psi_j^{(n)}(x) - \sum_{j=-\infty}^{+\infty} f(x_j)\psi_j^{(n)}(x)\right]^2 + \left[\sum_{j=-\infty}^{+\infty} f(x_j)\psi_j^{(n)}(x) - f^{(n)}(x)\right]^2 \\ &\leq \sigma^2 \sum_{j=-\infty}^{+\infty} [\psi_j^{(n)}(x)]^2 + \mathcal{O}(h^{\frac{2}{n+1}})^2 \\ &= \frac{\sigma^2}{4} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \left[\frac{\phi_{j+1}^{(n)}(x) - \phi_j^{(n)}(x)}{(x_{j+1} - x_j)} - \frac{\phi_j^{(n)}(x) - \phi_{j-1}^{(n)}(x)}{(x_j - x_{j-1})}\right]^2 + \mathcal{O}(h^{\frac{4}{n+1}}) \\ &= \frac{\sigma^2}{4} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \left\{ \left[ \frac{\frac{\phi_{j+1}^{(n)}(x) - \phi_j^{(n)}(x)}{(x_{j+1} - x_j)} - \frac{\phi_j^{(n)}(x) - \phi_{j-1}^{(n)}(x)}{(x_j - x_{j-1})}}{\frac{x_{j+1} - x_{j-1}}{2}} \right]^2 \cdot \left(\frac{x_{j+1} - x_{j-1}}{2}\right)^2 \right\} + \mathcal{O}(h^{\frac{4}{n+1}}) \\ &\leq \frac{\sigma^2}{4} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \left\{ [\phi^{(n+2)}(x - \xi_j)]^2 \cdot \left(\frac{x_{j+1} - x_{j-1}}{2}\right)^2 \right\} + \mathcal{O}(h^{\frac{4}{n+1}}), \end{aligned}$$

这里  $\xi_j \in (x_{j-1}, x_{j+1})$  是利用中值定理获得的, 而不是采用了相同符号的随机白噪声. 利用 [6] 中的技巧, 我们可以得到

$$\mathbb{E}[(\mathcal{L}f^*)^{(n)}(x) - f^{(n)}(x)]^2 \leq \mathcal{O}(\sigma^2 h) \int_{-\infty}^{+\infty} [\phi^{(n+2)}(x)]^2 dx + \mathcal{O}(h^{\frac{4}{n+1}}) \leq \mathcal{O}\left(\frac{\sigma^2}{h^{\frac{n}{n+1}}}\right) + \mathcal{O}(h^{\frac{4}{n+1}}). \quad (11)$$

这样就完成了定理的证明.

**注记 3.5** 从定理 3.4 可以看出, 如果令  $h^{\frac{2}{n+1}} = H$ , 就可以得到与差商相同的逼近阶, 但这时仅仅要求  $\sigma_{\mathcal{L}}^2 \leq \mathcal{O}(H^{\frac{n}{2}+2})$ . 这意味着 multiquadric 拟插值方法比差商更为稳定, 且有  $\sigma_{\mathcal{D}}^2 \ll \sigma_{\mathcal{L}}^2$ . 粗略的来说,  $\sigma_{\mathcal{D}}^2 < H^{\frac{3n}{2}} \sigma_{\mathcal{L}}^2$ .

通过本节的对比讨论可知, 假设在 64 位的计算机上至多含有不超过 20 位的十进制有效数字. 在保持相同精度  $H^2$  的前提下, 对相同的采样随机误差, 应用我们估计导数的方法可以估计更高阶的导数. 反之, 要达到相同的逼近误差及相同的有效位精度, 我们对采样的随机误差要求 (小于  $\sigma_{\mathcal{L}}^2$ ) 远远低于差商对采样的随机误差的要求 (要满足  $\sigma_{\mathcal{D}}^2 < H^{\frac{3n}{2}} \sigma_{\mathcal{L}}^2$  才行).

#### 4 数值例子

为了说明 multiquadric 拟插值方法的稳定性, 我们基于散乱数据  $\{f^*(x_j) = f(x_j) + \xi_j, j = 0,$

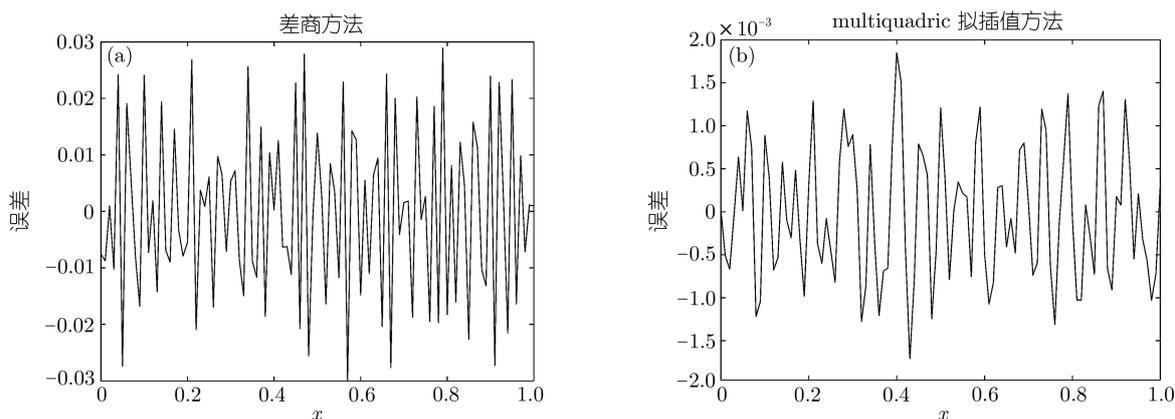


图 1 当  $f = 1/(1 + x^2)$  时, 使用不同方法模拟产生的  $\tilde{f}''(x)$  与真实值  $f''(x)$  之间的误差. (a) 差商方法; (b) multiquadric 拟插值方法

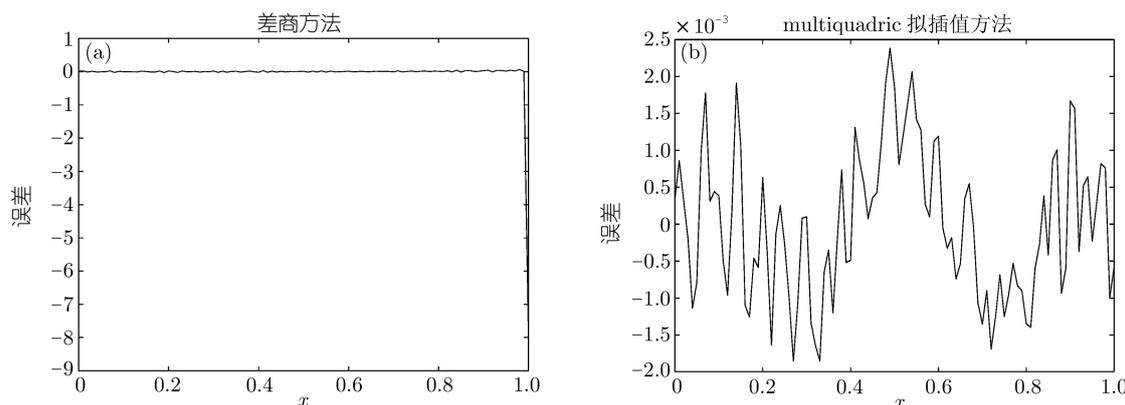


图 2 当  $f(x) = \sin(x) + e^{2x^2}$  时, 使用不同方法模拟产生的  $\tilde{f}''(x)$  与真实值  $f''(x)$  之间的误差. (a) 差商方法; (b) multiquadric 拟插值方法

$1, \dots, n$  来模拟函数的二阶导数  $f''(x)$ , 这里  $\{\xi_j\}$  是白噪声. 并把我们的结果与传统的差商方法得到的结果做一对比.

### 4.1 例 1

选择 Runge 使用的函数  $f_1(x) = \frac{1}{1+x^2}$  作为第一个例子. 我们知道  $f_1''(x) = \frac{x^2}{(1+x^2)^3} - \frac{2}{(1+x^2)^2}$ . 图 1 分别画出了利用差商与利用 multiquadric 拟插值逼近的两阶导数的误差函数  $(Df_1^*)''(x) - f_1''(x)$  与  $(\mathcal{L}f_1^*)''(x) - f_1''(x)$  的图像, 这里随机产生的白噪声方差取为  $h^3$ . 从图像可以看出 multiquadric 拟插值方法比差商方法更为稳定、同时得到的逼近结果也更为精确 (multiquadric 拟插值相比于利用差商的误差函数振幅小且频率低).

### 4.2 例 2

第二个例子是  $f_2(x) = \sin(x) + e^{2x^2}$ , 可以得出它的二阶导数  $f_2''(x) = -\sin(x) + 4e^{2x^2} + 16x^2e^{2x^2}$ . 图 2 分别画出了利用差商与利用 multiquadric 拟插值逼近的二阶导数的误差函数  $(Df_2^*)''(x) - f_2''(x)$  和  $(\mathcal{L}f_2^*)''(x) - f_2''(x)$  的图像.

从图 2 可以看到, 在边界附近差商方法表现得非常差, 而 multiquadric 拟插值甚至是在非常靠近

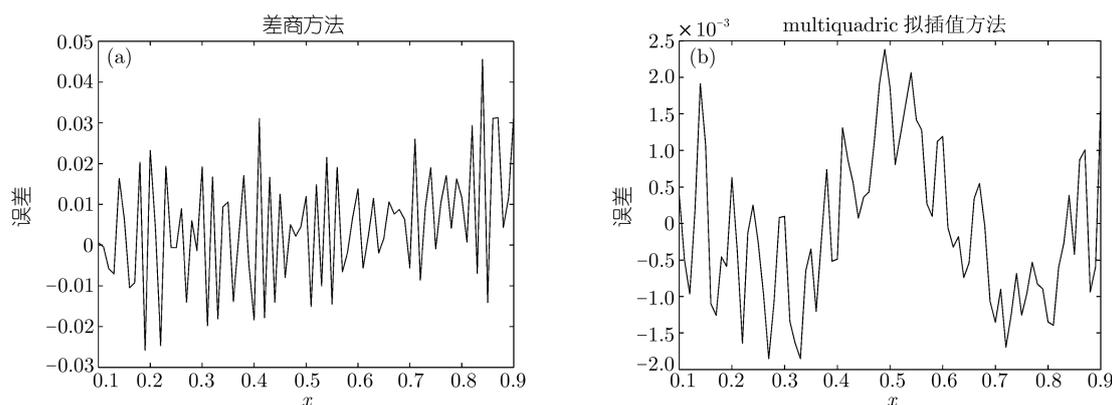


图 3 当  $f(x) = \sin(x) + e^{2x^2}$  时, 在区间  $[0.1, 0.9]$  上, 使用不同方法模拟产生的  $\hat{f}''(x)$  与真实值  $f''(x)$  之间的误差. (a) 差商方法; (b) multiquadric 拟插值方法

边界的地方还能表现出很好的性质. 为了比较差商方法和拟插值方法在区间内部的逼近能力, 图 3 画出了在区间  $[0.1, 0.9]$  上的误差函数. 它展示了在区间内部 multiquadric 拟插值方法也更为稳定、而且也更为精确 (multiquadric 拟插值相比于利用差商的误差函数振幅小且频率低).

## 5 结论

本文研究了 multiquadric 拟插值的稳定性, 并与差商方法进行了比较. 通过理论分析, 证明对于相同阶导数及相同的随机白噪声, multiquadric 拟插值方法比传统的差商方法更稳定、更准确 (误差函数振幅更小, 频率更低). 当使用一般的计算机时高阶差商方法几乎不能用来计算, 但是 multiquadric 拟插值方法依然还可以使用, 并且可以达到一定的精度. 数值例子也很好地验证了理论的结果. 总之, multiquadric 拟插值是一个有效的工具, 可以用来数值模拟函数的高阶导数.

致谢 感谢审稿人认真的阅读与提出的宝贵意见.

## 参考文献

- 1 Takahashi R. Elements of Numerical Analysis. Kyoto: SIBaccess Co. Ltd., 2008
- 2 Thomas J W. Numerical Partial Differential Equations: Finite Difference Methods. Berlin: Springer, 1995
- 3 de Boor C. A Practical Guide to Splines. New York: Springer-Verlag, 1978
- 4 Beatson R K, Powell M J D. Univariate multiquadric approximation: quasi-interpolation to scattered data. Constr Approx, 1992, 8: 275–288
- 5 Buhmann M D. Radial Basis Functions: Theory and Implementations. Cambridge: Cambridge University Press, 2003
- 6 Wu Z M, Schaback R. Shape preserving properties and convergence of univariate multiquadric quasi-interpolation. Acta Math Appl Sin, 1994, 10: 441–446
- 7 Ma L M, Wu Z M. Approximation to the  $k$ -th derivatives by multiquadric quasi-interpolation method. J Comput Appl Math, 2009, 231: 925–932
- 8 Wu Z M, Liu J P. Generalized strang-fix condition for scattered data quasi-interpolation. Adv Comput Math, 2005, 23: 201–214
- 9 Powell M J D. Approximation Theory and Methods. Cambridge: Cambridge University Press, 1981
- 10 Hardy R L. Multiquadric equations of topography and other irregular surfaces. J Geophys Res, 1971, 76: 1905–1915
- 11 Franke R. Scattered data interpolation: tests of some methods. Math Comp, 1982, 38: 181–200
- 12 Beatson R K, Dyn N. Multiquadric B-splines. J Approx Theory, 1996, 87: 1–24
- 13 Ling L. A univariate quasi-multiquadric interpolation with better smoothness. Comput Math Appl, 2004, 48: 897–912