论文

偏心圆柱Taylor-Couette流动的数值模拟研究

李明达, 程万*, 罗喜胜

中国科学技术大学工程科学学院, 合肥 230027

*联系人, E-mail: wancheng@ustc.edu.cn

收稿日期: 2021-03-01; 接受日期: 2021-05-24; 网络出版日期: 2022-03-16

国家自然科学基金(编号: 11625211)资助项目

摘要 本文采用四阶有限差分的数值模拟方法研究了低雷诺数下偏心双圆柱间的Taylor-Couette流动, 通过选取两个半径比(0.5和0.9), 两个内圆柱雷诺数(50和100)并改变偏心度 e ($0 \leq e \leq 0.8$), 详细讨论了随着偏心度的增长, 流动形态的变化和内圆柱受力的变化. 模拟结果完整地描述了层流、分离流和偏心泰勒涡流动三种不同流动形态. 在流态变化方面, 通过流线图分析发现, 三维泰勒涡流转变为三维分离流, 然后退化为二维分离流的过程. 在内圆柱受力方面, 从层流到分离流的过程, 发现在与圆心连线相垂直的方向即 x 方向, 合力绝对值因不断增长的挤压效应持续增大; 在圆心连线方向即 y 方向, 合力绝对值由于惯性影响呈现先增大后减小趋势. 此外, 在三维泰勒涡流退化为二维分离流的过程中, 临界偏心度附近内圆柱在 x 方向受力形成平台, 变化很小. x 方向的压力占比随偏心度持续增大. 在偏心度趋于零的情况下, x 方向的压力占比随半径比而不同: 大半径比层流的压力占比接近1(半径比为0.9时压力占比约为0.97), 小半径比层流的压力占比减小很多(半径比为0.5时压力占比约为0.8), 在三维泰勒涡流的情况下的压力占比则更小.

关键词 偏心Taylor-Couette流动, 低雷诺数, 数值模拟**PACS:** 47.11.Bc, 47.20.Ib, 47.20.Qr

1 引言

泰勒-库埃特(Taylor-Couette, TC)流动是两个同向或反向旋转圆柱体之间的流动, 是流体力学中的典型流动系统, 在流体力学基本问题的研究尤其湍流研究中具有重要意义, 近些年来也有学者将其应用到黑洞吸积盘中湍流产生机理的研究中^[1]. TC流动从1923年Taylor^[2]的首次理论分析至今, 已经有了长足的研究进展. 几何结构上研究者们提出了球型结构^[3]和双圆柱型结构. 其中双圆柱间的旋转流动现象

在石油钻井、轴承润滑等工程领域中广泛存在, 其特点是控制参数较多、流动形态复杂, 因此受到了广泛的关注和研究.

双圆柱间TC流动可以分为同心圆柱流动和偏心圆柱流动两类. 针对同心圆柱间旋转流动的研究, 有非牛顿流方面的研究^[4], 但是更多的是关于牛顿流方面的研究: 包括低雷诺数方面的力矩分析^[5,6]、流态分类^[7,8]、转捩分叉现象^[9,10]和高雷诺数方面的湍流边界层^[11-13]、羽流湍流^[14,15]、终极湍流^[16,17]等. 近几年, Grossmann等人^[18]对同心TC湍流进行了总结性的

引用格式: 李明达, 程万, 罗喜胜. 偏心圆柱Taylor-Couette流动的数值模拟研究. 中国科学: 物理学 力学 天文学, 2022, 52: 244712
Li M D, Cheng W, Luo X S. Numerical simulation of the Taylor-Couette flow between eccentric cylinders (in Chinese). Sci Sin-Phys Mech Astron, 2022, 52: 244712, doi: 10.1360/SSPMA-2021-0050

研究工作, 系统性地研究了高雷诺数下同心TC湍流流动的性质. 偏心圆柱间旋转流动的无量纲参数有4个, 即圆柱半径比、偏心度、内圆柱雷诺数以及外圆柱雷诺数. 因此, 相比同心圆柱流动, 偏心圆柱流动更加复杂, 现象也更加丰富, 应用也更为广泛. 带有偏心的圆柱流动在工业方面更加贴近应用的实际情况, 并且偏心度的大小会影响泰勒涡的生成, 从而影响流动状态, 进一步影响圆柱受力, 在工业上如钻井作业中会影响钻头受力和使用寿命. 因此, 对其开展深入系统研究具有重要的科学意义和应用价值, 并且也受到学者们的广泛关注.

学术界目前对偏心圆柱旋转流动的研究依然停留在低雷诺数、定性分析的阶段. Cole^[19], Kamal^[20]通过实验研究发现, 在低雷诺数、高偏心度时会出现从层流, 即环形库埃特流动(Circular Couette Flow, CCF)到分离流(Separation Flow, SF)的转变, 而当雷诺数较高, 偏心度较低时又会出现泰勒涡流动(Taylor Vortex Flow, TVF). 在这些不同的流动形态下, 内圆柱的受力有显著不同. Vohr^[21]对不同偏心度流动内圆柱受力进行了实验测量, 确定了偏心双圆柱流动泰勒涡生成的临界速度. 随后Lim等人^[22]得到了临界雷诺数与偏心度的修正表达式, 以便更好地区分不同的流动状态. 另外, 两圆柱的半径比, 与偏心度密切相关, 对内圆柱受力变化的影响也非常大. Podryabinkin^[23]以及Shu等人^[24]对较大间隙的偏心圆柱间流动进行了数值模拟研究, 发现作用在内圆柱上的力以压力占主导. 当偏心度在某一临界值以下的时候, 内圆柱受到的径向力使其偏离外圆柱的圆心, 但是当偏心度足够大的时候径向力又使内圆柱远离外壁面. 近期, Leclercq等人^[25,26]使用稳定性方法针对较大间隙的情况, 给出了不同雷诺数下内圆柱受到的合力随偏心度的变化. 在低雷诺数层流方面, 前人有很多的理论分析. Wood^[27]首先从理论方面对偏心圆柱流动进行了线性化分析, 为后续研究者进一步分析内圆柱受力奠定了一定的理论基础. DiPrima和Stuart^[28]从纳维-斯托克斯(Navier-Stokes, N-S)方程出发, 在小间隙情况下, 通过将方程的解按间隙比进行展开, 导出了压力分布的近似解. Ballal和Rivlin^[29]从斯托克斯近似的角度, 对层流流动情况进行了详细的理论分析, 计算了流体作用在圆柱上的合力及其压力在内圆柱上的分布情况. Wannier^[30]从几何结构出发对不同内外半径比

的偏心圆柱中的内圆柱进行了详细的二维流动受力分析.

综上所述, 前人对偏心圆柱的工作各有侧重, 但未对低雷诺数下所有流动状态做出系统的定量数值研究. 针对偏心圆柱流动状态随偏心度、雷诺数以及内外半径比如何变化等关键科学问题, 目前学术界还停留在分析单一变量对流动状态的影响上, 并未给出一个完整具体的讨论. 偏心度如何影响泰勒涡出现的临界参数, 也仅有实验拟合的经验公式以及较大内外半径比工况的近似理论公式. 对此, 本文针对偏心圆柱间旋转流动, 模拟低雷诺数下所有三种流动形态, 进而进行完备的受力研究. 本研究将从外圆柱固定, 内圆柱旋转这一最简单的失稳构架出发, 详细讨论内圆柱在低雷诺数旋转流动中的受力现象. 具体来说, 在半径比方面, 考虑窄缝(0.5)和宽缝(0.9)两种情况; 在内圆柱雷诺数选取上, 保证分别捕捉了从层流、分离流到TC流的转变过程. 在如上选择的基础下, 主要分小半径比低雷诺数、小半径比高雷诺数、大半径比不同雷诺数三个部分进行讨论分析, 通过改变偏心度 e , 研究内圆柱受到的合力以及压强、黏滞力等物理量的变化趋势, 以期给出不同流动过程的共性与特性.

2 数值方法与算例设置

2.1 控制方程与数值方法

本文中的流动控制方程为不可压缩黏性牛顿流体的N-S方程:

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0, \quad \frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(u_i u_j) = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_i \partial x_j}, \quad (1)$$

其中, u_i 是速度向量($i = x, y, z$). u_x , u_y 和 u_z 代表速度矢量的三个分量. p 为压强, ν 为动力黏度.

在模拟偏心圆柱流动时, 采用双极坐标系网格以保证正交性. 在程序求解中使用广义曲线坐标系, 参考Zang等人^[31]的思路, 计算过程中使用当地曲线位置坐标和笛卡儿坐标系下速度分量 u_i .

在空间离散中, 使用交错网格, 将速度分量 u_i 定义在曲线坐标系的网格面上, 将压强 p 定义在网格中心, 从而保证了速度和压强的耦合. 在整个计算域中, 我们运用四阶精度的中心差分格式. 在非线性项处理中, 采用Morinishi等人^[32]的守恒离散格式处理斜对称项.

在时间推进方面, 使用三阶Runge-Kutta方法^[33]. 每个子时间步中, 采用分裂步算法: 首先求解速度预测方程, 然后求解压力方程, 最后做速度修正. 使用多重网格方法求解三维压强泊松方程和速度亥姆霍兹方程, 并使用MPI并行保证能够计算较大网格的算例.

边界条件方面, 内外圆柱壁面设定无滑移边界条件, 在圆柱的上下端设定周期性边界条件.

2.2 偏心双圆柱旋转流的设置

偏心圆柱间的旋转流动如图 1 所示. 几何参数有内圆柱半径 r_i , 外圆柱半径 r_o 和内外圆柱圆心之间的距离 c . 运动参数有内圆柱线速度 U_i 和外圆柱线速度 U_o .

基于此可以定义 4 个无量纲参数: 内外半径比 $\eta = r_i/r_o$, 偏心度 $e = c/d$, 内圆柱雷诺数 $Re_i = U_i d/\nu$, 外圆柱雷诺数 $Re_o = U_o d/\nu$, 其中 $d = r_o - r_i$ 为内外圆柱半径差. 本文的研究中取 $Re_o = 0$. 此外, 在展向长度 L_z 的选取上, 参考同心圆柱间泰勒涡流动的数值研究, 如Dong^[11]和Ostilla-Mónico等人^[13], 取 $L_z/d = \pi$. 此外, 我们对部分算例进行了 $L_z/d = 2\pi$ 的对比验证, 发现结果未有差别.

图 1 (网络版彩图) 计算设定示意图. 内圆柱半径为 r_i , 外圆柱半径为 r_o . 展向长度为 L_z , 圆心距离为 c . 运动参数有内圆柱线速度 U_i 和外圆柱线速度 U_o .

Figure 1 (Color online) Sketch of computational configuration. The radii of inner and outer cylinders are, respectively, r_i and r_o . L_z is the length of the cylinders, and c is the distance between the two centers. Linear velocities of the inner and outer cylinders are, respectively, U_i and U_o .

在受力分析中, 定义内外圆柱圆心连线方向为 y 轴, 与之垂直方向定义为 x 轴, 如图 2 所示. 本文使用的网格为双极坐标系正交网格, 由 $\rho=\text{constant}$ 和 $\phi=\text{constant}$ 相交构成. 在计算中, 使用的网格为 $N_\rho \times N_\phi = 512 \times 64$. 在确保二维流动的算例中, 采用二维程序计算, 即 $N_z = 1$. 在泰勒涡流动的算例中, 使用三维程序计算, 取 $N_z = 64$.

图 2 中外圆柱 ρ 的取值 β 由几何形状决定:

$$\beta = \frac{1 + \delta(1 + e) - \gamma}{1 - \gamma(1 + \delta(1 + e))}, \quad (2)$$

$$\gamma = \sqrt{\frac{2 + \delta(1 - e^2)^2}{2e} - 1} - \frac{2 + \delta(1 - e^2)}{2e},$$

其中, $\delta = (1 - \eta)/\eta$, 当偏心度 $e = 0$ 时, $\gamma = 0$.

如前所述, 低雷诺的偏心流动存在三种可能的流动形态. 在TVF转变为SF的临界点附近, Ashwin等人^[34]通过理论分析指出, 参数的变化会导致流线的动力学分岔. 临界点附近参数的轻微变化使得流场中的泰勒涡受到破坏, 从而使流线不再拘束在泰勒涡内而是扩散到全流场当中. 另一方面, 从流动分区图中可以直观地看出, 当偏心度越大时, TVF出现的临界雷诺数越大. 偏心TC流动中临界雷诺数附近的分叉现象与同心TC的类似, 但是偏心度, 尤其是分离涡的出现会阻

图 2 (网络版彩图) 坐标系设定与网格示意图. 两圆心连线的方向为 y , 与 y 垂直方向为 x . 双极坐标系网格由正交曲线 $\rho=\text{constant}$ 和 $\phi=\text{constant}$ 构成

Figure 2 (Color online) The coordinate system and mesh sketch. y is defined along the line connecting two centers, x is perpendicular to y . Present bipolar coordinate is composed of orthogonal curves $\rho=\text{constant}$ and $\phi=\text{constant}$.

碍泰勒涡的生成, 从而使分叉行为更加复杂. 宏观表现为, 偏心情况下的临界雷诺数比同心情况下更高 [22, 35].

通过Lim等人 [22] 实验所得到的TVF流动与二维流动的临界雷诺数随偏心度变化公式, 以及DiPrima和Stuart [28] 得到的TVF流动与SF流动的临界偏心度公式, 我们可以大致绘出三种流动状态的分区示意图. 如图 3 所示, 分别给出半径比 $\eta = 0.5, 0.9$ 两种情况下的分区图, 图中每个圆点代表本文中的算例. 我们选取的雷诺数为 $Re_i = 50, 100$. 为了研究内圆柱受力随偏心度的变化, 本文算例设置偏心度变化范围为 $0 \leq e \leq 0.8$.

2.3 程序验证: 同心算例

首先以 $Re_i = 1000$ 这一内圆柱旋转外圆柱静止的同心圆柱作为算例进行程序验证. 针对该问题, Dong [11] 的直接数值模拟采用的网格为垂直于轴向的平面取 400 个谱单元网格, 轴向为 256. 本文中此算例的网格为 $N_\rho \times N_\phi \times N_z = 256 \times 128 \times 128$. 通过无量纲切向速度 u_ϕ/U_i 沿半径的变化与前人的结果的对比(图 4), 发现整体符合情况较好.

图 3 (网络版彩图) 半径比 $\eta = 0.5, 0.9$ 时流动状态分区示意图, 其中圆点为本文算例. 三种流动形态TVF(泰勒涡流动)、CCF(层流)和SF(分离流)之间的分界曲线根据Lim等人 [22], DiPrima和Stuart [28] 绘制

Figure 3 (Color online) Description of present cases in sketch of flow states at $\eta = 0.5$ and 0.9 . Every dot point denotes one case in present study. Curves separating TVF (Taylor Vortex Flow), CCF (Circular Couette Flow, laminar flow) and SF (Separation Flow) are plotted according to Lim et al. [22] and DiPrima and Stuart [28].

图 4 (网络版彩图) 同心圆柱 $Re_i = 1000$ 验证算例中切向速度 u_ϕ/U_i 沿半径的变化

Figure 4 (Color online) Comparison of u_ϕ/U_i at $Re_i = 1000$ of concentric cylinders.

随后, 设置 $Re_i = 100$ 的同心算例进行了网格收敛性验证, 首先是对于不同网格密度下 u_ϕ/U_i 沿半径的变化(图 5(a)). 可以看到, 当网格加密之后, 速度分布的数值差别很小. 最后, 设置网格数量为 $N_\rho \times N_\phi \times N_z = 512 \times 64 \times 64$, 对于内圆柱不同位置处的 y^+ 进行统计(图 5(b)). y^+ 定义如下:

$$y^+ = \frac{\Delta y}{\nu} \sqrt{|\tau_w|}, \quad (3)$$

其中, τ_w 为内圆柱壁面切应力. 这里分别设置雷诺数 $Re_i = 50$ 和 100 , 偏心度为 0.8 . 通过统计不同角度位置的 y^+ 并和 $Re_i = 100$ 的同心算例进行对比, 我们发现在内圆柱近壁面区的 y^+ 均小于 1, 且窄缝处的 y^+ 更小, 最小值约为 0.02.

3 流动状态分析

本节对计算中所涉及的三种流动状态进行描述并对状态间的转变过程进行讨论.

3.1 三种流动状态

根据前文的讨论, 我们了解到低雷诺数偏心圆柱间流动的三种流动状态: 层流(CCF)、分离流(SF)与泰勒涡流(TVF). 针对三种流态, 图 6 使用了两种描述流动状态的方式进行对比. 第一种为近壁面 Q 值的云图. 此处 Q 为衡量流动过程中旋涡强弱的一种度量方法, 定义为

图 5 (网络版彩图) (a) $Re_i=100$ 同心切向速度 u_ϕ/U_i 沿半径的变化; (b) 内圆柱 y^+ 随角度的变化

Figure 5 (Color online) (a) u_ϕ/U_i versus radius at $Re_i=100$ of concentric cylinders; (b) y^+ at inner cylinder versus ϕ .

图 6 (网络版彩图) 三种流动形态对比图. Q 等值面图: (a) CCF 流态; (b) SF 流态; (c) TVF 流态. 内壁流线图及角向速度图: (d) CCF 流态; (e) SF 流态; (f) TVF 流态. 外壁面流线图及角向速度图: (g) CCF 流态; (h) SF 流态; (i) TVF 流态

Figure 6 (Color online) Comparison of three flow states. Iso-surfaces of Q : (a) CCF; (b) SF; (c) TVF. Streamlines and azimuthal velocity on inner surface: (d) CCF; (e) SF; (f) TVF. Streamlines and azimuthal velocity on outer surface: (g) CCF; (h) SF; (i) TVF.

$$Q = -\frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u_x}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_y}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_z}{\partial z} \right)^2 \right] - \frac{\partial u_x}{\partial y} \frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial z} \frac{\partial u_z}{\partial x} - \frac{\partial u_y}{\partial z} \frac{\partial u_z}{\partial y}, \quad (4)$$

其中, u_x , u_y 和 u_z 为笛卡儿坐标系下速度的分量.

第二种方法为壁面流线图, 包括内壁面和外壁面. 通过对壁面相对速度流线图以及角向速度的观察, 可以定性分析近壁面流动的形态.

图 6(a)显示了层流状态, 选取的示例是 $Re_i=50$, 同心即 $e=0$ 的算例. 三维 Q 图可以看出, 流动在轴向没有变化, 沿圆周方向变化也很小, 只有沿径向方向即 r 的方向, Q 值存在变化. 流线图方面, 层流状态的内外圆柱(图 6(d)和(g)), 均为流向一致的均匀流线图.

图 6(b)展示了典型的分离流, 选取示例是 $Re_i=50$, $e=0.6$ 的算例. 从 Q 图可以清晰看出, 在宽边远离内壁面的区域, 存在一个较大的区域, 其 Q 值与靠近内壁面的 Q 值符号相反, 体现了分离区域的存在. 此分离区域可以从流线图看出. 在外壁面的流线图上(图 6(h)), 只有窄边的区域存在与内圆柱(图 6(e))旋转方向一致的流线图, 而其他大部分区域, 均为分离流动. 图 6(h)中, 红虚线标示了分离线, 蓝虚线标示了再附线.

图 6(c)为TVF流动的情况, 选取示例为 $Re_i=100$, 同心即 $e=0$ 的算例. 在该流动中存在清晰的轴向流动, 可见清晰的 Q 值交错区域, 代表了TVF的存在. 流线上(图 6(f)和(i))可以看出TVF在壁面附近退化成的渐近分离线与再附线.

本文的研究集中讨论随着 e 的增长, 流动状态间的变化过程. 从流线可以看出, 当 $Re_i=50$ 时, 从层流到分离流的过程, 内壁面并没有定性的变化, 而外壁面出现分离状态, 这是个比较清晰的过程. 而当 $Re_i=100$ 时, 从泰勒涡流到分离流的过程, 外壁面的流线, 是一个周向渐近分离线转变为轴向二维分离线的过程, 这一过程值得进一步研究.

3.2 从泰勒涡流到分离流

本节从 $Re_i=100$ 的算例出发, 讨论随 e 的增长, 流动形态从泰勒涡流到分离流的过程. 图 7 给出了近外壁面区域 Q 值的变化, 图 7(a)–(i) 分别对应偏心率 $e = 0, 0.1, \dots, 0.8$. 从图 7 中可以看出, 随着偏心度的增大, 在 z 方向产生的两对泰勒涡 Q 值逐渐增大, 在上游(ϕ 值较小)出现内凹结构, 在下游(ϕ 较大)出现凸起结构. 最终在窄边($\phi=\pi$)沿 z 方向逐渐融合, 当偏心率超过

图 7 (网络版彩图) $Re_i=100$, $\eta=0.5$ 时, 不同偏心率情况下近外壁面区域 Q 图. (a)–(i) 的偏心率分别为 0, 0.1, ..., 0.8

Figure 7 (Color online) Q value of $Re_i=100$, $\eta=0.5$ cases and the eccentricity of (a)–(i) is 0, 0.1, ..., 0.8, respectively.

临界值时, 三维的泰勒涡彻底消失, 退化为二维的分离涡结构.

外壁面的流线图以及角向涡量 ω_ϕ 可以更清楚看出系统的分离和再附变化过程, 如图 8 所示. 在偏心度较低时, 如 $e=0, 0.1, 0.2$ (图 8(a)–(c)), 流线一直由两组渐近分离线和渐近再附线组成, 并且角向涡量首先在 $\phi=4$ 附近出现减弱的情况, 并且流线也在这个位置附近出现了一点细微的变化. 当 $e=0.3, 0.4$ 时(图 8(d), (e)), 在 ω_ϕ 出现间断的位置, 流线中的分离线上首先出现了鞍点. 而在 $\phi=2$ 附近 ω_ϕ 仍然较强, 且在其上游, 即 $\phi=1.5$ 附近流线中的分离线上出现了源点.

进一步提高偏心度, 流动快速退变为二维流动. 其中图 8(f)在原有的鞍点下游, 即 $\phi=5$ 附近, 在流线的渐近再附线上出现了汇点. 值得强调的是, 二维的分离点在轴向是没有结构的, 在图 8(g)–(i), 我们手工标注了二维分离点的位置, 仅为参考, 不代表轴向运动. 在二维分离流中可以看出, 随着偏心度增大, 分离区域越大, 仅有靠近窄边很小的区域内, 流线依然与内圆柱旋转方向一致.

值得指出的是, 图 7 的 Q 值分布可以清晰分辨出

三维转变为二维过程中的内凹和凸起结构(如图 7(f)), 在二维流动中也可以发现多块的强旋涡分布区(如图 7(i)), 充分体现了随着内圆柱旋转产生的非对称效应. 而这些非对称的变化过程, 在流线图(图 8)中并不能有效体现. 值得注意的是, 流线以及角向涡量图则反映出了三维结构被破坏以及转变的具体过程和位置, 从流场角度出发观察到了一些细致的流场结构.

3.3 轴向流场的定量分析

为了进一步了解偏心度变化对流动状态和扰动速度的影响, 我们统计了 $Re_i=100, \eta=0.5$ 算例的全局 u_z^2 并做了平均, 得到 $\bar{u}_z^2$ (图 9).

由于初始速度并没有 z 方向的速度, 因此 $\bar{u}_z^2$ 相当于扰动强度. 从图中可以明显看到, 在TVF流态时, $\bar{u}_z^2$ 在同心情况下最大, 随着偏心度的增大, 分离涡在生成的过程中会明显减小TVF在 z 方向产生扰动的强度, 并在TVF退化成SF流态时完全变成0. 因此, 三维TVF流动退化为二维SF流动过程中, 扰动强度衰减的速度随偏心度越来越大.

图 8 (网络版彩图) $Re_i=100, \eta=0.5$ 时, 不同偏心度情况下外壁面流线及角向涡量 ω_ϕ 示意图. (a)–(i) 的偏心度分别为 0, 0.1, ..., 0.8

Figure 8 (Color online) Streamlines and azimuthal vorticity ω_ϕ on outer cylinder of $Re_i=100, \eta=0.5$ cases. The eccentricity of (a)–(i) is 0, 0.1, ..., 0.8, respectively.

图 9 (网络版彩图) $Re_i=100, \eta=0.5$ 算例, u_z^+ 随偏心率变化图
Figure 9 (Color online) u_z^+ versus eccentricity at $Re_i=100, \eta=0.5$.

4 内圆柱受力分析

针对三个关键参数: 雷诺数 Re_i 、半径比 η 以及偏心率 e , 我们通过固定两个参数, 调整一个参数的方案, 对不同的流动状态及其对应的内圆柱受力变化进行对比研究. 在本节讨论部分, 所统计的物理量均为无量纲量, 包括内圆柱受合力、压力以及黏滞力等. 其中 x 方向的力分量定义如下:

$$\tau_x = \frac{1}{U_i^2} \nu \int_l \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{u_\phi}{r} \right) \bigg|_{r=r_i} \mathbf{dl} \cdot \hat{x}, \quad p_x = \frac{1}{U_i^2} \int_l p \mathbf{dn} \cdot \hat{x}, \quad (5)$$

其中, 合力 $F_x = p_x + \tau_x$, $\mathbf{dl}$ 方向为内圆柱切线逆时针方向, $\mathbf{dn}$ 为垂直内圆柱壁面指向内的法向量. $\hat{x}$ 为 x 方向的单位向量. 各物理量在 y 方向上分量 (如 F_y , p_y , τ_y 等) 可类似定义.

4.1 半径比 $\eta=0.5$, 雷诺数 $Re_i=50$

首先考虑小半径比情况下没有泰勒涡的流动情况. 根据图 3(a) 的流动分区图, 我们选择 $Re_i=50$. 图 3(a) 显示, 在增大偏心率 e 的过程中, 流动从层流转变为二维分离流动. Wannier^[30] 给出的合力随内外半径比以及偏心率的变化公式为

$$F_x = \frac{8\pi\mu Le(r_i v_i + r_o v_o)}{(r_i^2 + r_o^2) \log((d_i + s)(d_o - s)/(d_i - s)(d_o + s)) - 4se}, \quad (6)$$

其中, μ 为流体的运动黏度. Wannier 利用参考圆来定义内外圆柱的偏心状态, 内外圆圆心到参考圆圆心的距离分别为 d_i 以及 d_o . 参考圆的半径为 s , 是一个随偏

度变化的量. 当偏心率 $e \rightarrow 0$ 时, $d_i, d_o, s \rightarrow \infty$. L 为圆柱的长度.

进一步, 给出内圆柱所受合力的结果, 如图 10 所示. 其中图 10(a) 为 x 方向合力 F_x 随着偏心率 e 的变化, 为方便显示, 纵轴采用 $-F_x Re_i$. 图 10(b) 中显示 y 方向受力 F_y . 图 10 也给出了 Leclercq 等人^[25] 通过正则模方法做出的受力分析. 对比发现, 本文的数值模拟数据和 Leclercq 等人的预测吻合较好. 随着偏心率 e 增加, $-F_x Re_i$ 随偏心率 e 单调增加, 在 e 较小的范围内呈现近似线性增长. 在 y 方向上, F_y 随着偏心率 e 的增加, 首先呈现减小的趋势, 在 $e=0.4$ 附近达到极小值, 随后一直呈现逐渐增大的趋势, 其中在 $e=0.7$ 附近 F_y 存在零值.

进一步讨论内圆柱上压力与黏滞力随偏心率的变化及其在合力里的占比. 图 11 给出了沿 x 方向上的压力 p_x 与黏滞力 τ_x . 可以看出, 随偏心率的增大, 压力的影响越来越大, 而黏滞力的影响在 $e < 0.6$ 的情况下随 e 的增大而变大. 在更大偏心率下, 黏滞力影响逐渐变小.

对比压力和黏滞力的相对影响可以看出, 在 x 方向上, 偏心率较小的时候, 压力占比为 80% 左右 (图 11(b)), 也就是说, 黏滞力对于 F_x 有 20% 左右的贡献, 并且其绝对值在偏心率 $e=0.6$ 左右到达最大值, 随后随着偏心率的增大逐渐缩减为零. 在图 11 中, 我们也与 Wannier^[30] 的理论分析结果进行了对比. 可以看出, Wannier 对 x 方向的受力分析与本文数据所给出的变化趋势基本吻合.

y 方向的压力和黏滞力与 x 方向有很大不同. 如图 12 所示, 我们发现压力 p_y 随 e 的变化与合力 F_y 类似, 而黏滞力 τ_y 在层流部分和分离流部分均几乎为 0, 从压力的相对占比也可以看出这一点. 值得注意的是, 当 e 约为 0.7 时, 由于此时 p_y 几乎为 0, 这导致黏滞力与压力占比看起来大致相当. 需要指出的是, Wannier^[30] 的理论, 由于只是进行了简单的斯托克斯近似, 不能预测 y 方向上的受力变化趋势; 而通过引入惯性修正项之后, Ballal 和 Rivlin^[29] 预测了 y 方向受力绝对值呈现先增大后减小的变化趋势, 然而其结果与本计算及 Leclercq 等人^[25] 的结果都有所差异.

4.2 半径比 $\eta=0.5$, 雷诺数 $Re_i=100$

在图 13 中, 我们给出了两个不同雷诺数的合力对

图 10 (网络版彩图) $\eta=0.5$, $Re_i=50$ 时, 内圆柱的受力. (a) x 方向上的分力 $-F_x Re_i$; (b) y 方向上的分力 F_y

Figure 10 (Color online) Forces exerted on inner cylinder $-F_x Re_i$ (a) and F_y (b) at $\eta=0.5$, $Re_i=50$.

图 11 (网络版彩图) $\eta=0.5$, $Re_i=50$ 时, x 方向的压力以及黏滞力随偏心度的变化. (a) p_x 和 τ_x ; (b) p_x/F_x

Figure 11 (Color online) Pressure and viscous force in x direction at $\eta=0.5$, $Re_i=50$. (a) p_x and τ_x ; (b) p_x/F_x .

图 12 (网络版彩图) $\eta=0.5$, $Re_i=50$ 时, y 方向的压力以及黏滞力随偏心度的变化. (a) p_y 和 τ_y ; (b) p_y/F_y .

Figure 12 (Color online) Pressure and viscous force in y direction at $\eta=0.5$, $Re_i=50$. (a) p_y and τ_y ; (b) p_y/F_y .

比图, 包括图 13(a)的 x 方向合力 F_x (图中显示为 $-F_x Re_i$)和图 13(b)的 y 方向合力 F_y . 图中虚线代表了两种流动形态的区分偏心度, 即: 左侧低偏心度部分为三维泰勒涡流动, 右侧为分离流动.

从图中我们可以看到, 由于泰勒涡的存在, 无论在 x 方向还是 y 方向, 内圆柱受力都和经典二维流动

状态有明显的不同. 在 x 方向(图 13(a)), $Re_i=100$ 算例的 $-F_x Re_i$ 随偏心度的增长更快, 且在转变偏心度附近($e \approx 0.57$)变得平缓, 在进入分离流状态后又逐渐与 $Re_i=50$ 算例重合.

在 y 方向上, $Re_i=100$ 的算例合力整体趋势与 $Re_i=50$ 情况类似, 包括极小值点对应的 e 几乎一致,

但是整体合力数值偏低.

在进一步的压力和黏滞力的分析中, 我们首先关注 x 方向(图 14)的合力. 可以看出, $Re_i=100$ 时, p_x 和 τ_x 随 e 的变化趋势, 与 $Re_i=50$ 的大致趋势基本类似, 表现为: 压力绝对值随 e 单调增大, 而黏滞力绝对值先增大, 后减小; 在合力中压力占主导地位. 我们也注意到低 e 时三维泰勒涡流动带来的不同之处, 表现为: p_x 和 τ_x 在靠近 $e \approx 0.6$ 时均呈现变缓趋势. 相对占比方面, 在偏心度较小时, 泰勒涡流所对应的 p_x/F_x 数值更低. 随着 e 的增大, 泰勒涡流的 p_x/F_x 增长更为迅速, 直到接近分离流的平台部分.

图 15则描述了 y 方向的压力和黏滞力. 由于 τ_y 在合力中贡献很小, 因此 p_y 与 F_y 趋势基本一致. 在三维泰勒涡流阶段, 由于压力和黏滞力反向, 导致压力占比出现了大于1的情况.

总结 $Re_i=100$ 与 $Re_i=50$ 的结果, 我们发现随 e 增大, 虽然低雷诺数意味着二维层流转变为二维分离流而较

高雷诺数则是三维泰勒涡流退化为二维分离流, 但合力分布基本呈现相似的变化趋势. 值得注意的是, 较高雷诺数下, 在泰勒涡流退化为分离流的临界流动部分($Re_i=100$ 时的临界偏心度 e_c 约为0.57), x 方向的压力和黏滞力均呈现较为平缓的趋势, 这一现象在二维层流到分离流的转变过程中未曾出现.

4.3 半径比 $\eta=0.9$, 雷诺数 $Re_i=50, 100$

为研究半径比对内圆柱受力的影响, 我们选取了较大半径比 $\eta=0.9$ 的情况. 从图 3可以看出 $\eta=0.9$ 时, 雷诺数 $Re_i=50, 100$ 均为二维流动, 即随 e 的增加, 流动从二维层流转变为二维分离流. 这一部分的讨论关注合力的变化趋势, 及其与小半径比 $\eta=0.5$ 的异同.

首先计算内圆柱受力随偏心度变化(图 16). 对于 x 方向的受力, 我们依然采取乘以雷诺数后取反的做法. 从图 16(a)可以看出, 当纵坐标取为 $-F_x Re_i$ 时, $Re_i=50, 100$ 两组算例的趋势几乎吻合. 说明在二维层

图 13 (网络版彩图) $\eta=0.5$ 时, $Re_i=50$ 以及 $Re_i=100$ 算例内圆柱受力对比. (a) x 方向分力 $-F_x Re_i$; (b) y 方向分力 F_y .
Figure 13 (Color online) Comparison of forces between $Re_i=50$ and $Re_i=100$ at $\eta=0.5$. (a) x -component $-F_x Re_i$; (b) the y -component F_y .

图 14 (网络版彩图) $\eta=0.5$, $Re_i=100$ 时, x 方向的压力以及黏滞力随偏心度的变化. (a) p_x 和 τ_x ; (b) p_x/F_x .
Figure 14 (Color online) Pressure and viscous force in x direction at $\eta=0.5$, $Re_i=100$. (a) p_x and τ_x ; (b) p_x/F_x .

图 15 (网络版彩图) $\eta=0.5$, $Re_i=100$ 时, y 方向的压力以及黏滞力随偏心度的变化. (a) p_y 和 τ_y ; (b) p_y/F_y .
Figure 15 (Color online) Pressure and viscous force in y direction at $\eta=0.5$, $Re_i=100$. (a) p_y and τ_y ; (b) p_y/F_y .

图 16 (网络版彩图) $\eta=0.9$ 算例内圆柱所受合力. (a) x 方向分力 $-F_x Re_i$; (b) y 方向分力 F_y .
Figure 16 (Color online) Forces exerted on inner cylinder at $\eta=0.9$. (a) $-F_x Re_i$; (b) F_y .

流转变为二维分离流的整个过程中, F_x 基本上是与雷诺数成正比: Re_i 越大, F_x 越大. 而图 16(b) 中所示的 y 方向的受力 F_y 和 $\eta=0.5$ 计算结果的趋势也基本相似, 先下降, 在 $e=0.35-0.4$ 附近达到极值点, 然后增加. 对于 $\eta=0.9$, 再次回到零点的偏心度大概在 $0.6-0.7$ 之间, 相比于 $\eta=0.5$ 的情况, 当前零点位置对应的偏心度更小.

此外, 一个显著的不同则是不同半径比下内圆柱合力数值的大小. 对比当前两组数据发现, 相比 $\eta=0.5$, $\eta=0.9$ 的算例, $-F_x Re_i$ 明显较大, 而 F_y 则差别不大.

为观察 $\eta=0.9$ 情况下压力与黏滞力占比, 我们给出了 x 和 y 方向的压力、黏滞力随偏心度的变化图(图 17). 从图中可以看出, 不论在 x 方向还是 y 方向, 黏滞力都是远小于压力的, 由于压力过大, 在图 17(a) 中已经看不到类似于图 11(a) 和图 14(a) 中黏滞力先减小后增大的变化趋势. 但是当偏心度足够小的时候, 压力的占比大概为 97% (图 18(a)), 并且与内圆柱雷诺数 Re_i 无明显关系, 证实了 Wannier^[30] 的理论结果.

综合 $\eta=0.5, 0.9$ 的二维层流到二维分离流的算例来看, 在 y 方向上, 内圆柱所受的合力 F_y 始终都是先减小后增大, 相同内外半径比时, 最小值点和零点位置差别很小. 而 $\eta=0.9$ 的算例的零点与极值点对应的偏心度 e 相比 $\eta=0.5$ 算例而言, 整体都更加小一些.

5 圆柱间角动量输运

最后, 针对偏心 TC 流动中角动量输运问题, 我们选取半径比 $\eta = 0.5$, 雷诺数 $Re_i = 100$ 的算例. 偏心度变化范围为 $0-0.8$, 间隔为 0.1 . 分别统计内圆柱上 $\phi = 0, \pi/2, \pi, 3\pi/2$ 四个面上的归一化角动量 $\rho u_\phi / \rho_i U_i$ 随归一化半径位置 $(r - r_i)/(r_\beta - r_i)$ 的变化趋势. 其中 r 为流体质点到内圆柱圆心的距离, r_β 为外壁面 $\rho = \beta$ 处的点到内圆柱圆心的距离.

从图 19 中我们可以看到, 随着偏心度的增加, 流动状态从 TVF 转变到 SF 的过程中, 不同位置的角动量输运呈现不同的变化趋势.

图 17 (网络版彩图) $\eta=0.9$ 算例内圆柱所受不同方向压力 p 以及黏滯力 τ 随偏心度 e 的变化. (a) x 方向; (b) y 方向
Figure 17 (Color online) The pressure and viscous force for cases at $\eta=0.9$ in different directions. (a) x direction; (b) y direction.

图 18 (网络版彩图) $\eta=0.9$ 算例内圆柱压力占比. (a) x 方向 p_x/F_x ; (b) y 方向 p_y/F_y
Figure 18 (Color online) The ratio of pressure for cases at $\eta=0.9$. (a) p_x/F_x in x direction; (b) p_y/F_y in y direction.

首先, 在 $\phi = 0$ 处, 随着偏心度的变化, 归一化的角动量从内圆柱到外圆柱的变化趋势从单调下降变为先下降后上升. 在较低偏心度的时候, 由于泰勒涡的出现, 在归一化位置0.4–0.6范围内角动量的斜率出现了较为平缓的阶段.

而当偏心度提高之后, 泰勒涡退化为分离涡, 角动量在归一化位置等于0.6之前快速下降, 随后又缓慢上升. 偏心度越大, 角动量下降的程度越大, 甚至出现了负值的情况, 这是由于在靠近外壁面附近, 分离涡中出现了反向的角向速度所导致的.

在图 19(b)中, TVF流态的趋势线和SF的趋势线较为明显的分为两簇. TVF流态的趋势线在归一化位置0.4–0.6范围斜率都会出现变缓的现象, 而SF流态的趋势线则呈现先快速下降, 后上升的趋势.

在窄边处(图 19(c)), 角动量的变化趋势略有不同. 随着偏心度的变化, 趋势线逐渐抬升, 在归一化位置0.4–0.6处斜率逐渐变大. 值得注意的是, 由于在窄边不存在分离涡, 流场状态更加接近经典层流的状态. 偏

心度为0.6, 0.7以及0.8三条线的趋势线基本重合, 表明在高偏心度情况下, 偏心度对层流状态窄边角动量运输的影响较小.

最后, 在图 19(d)中角动量的变化趋势与图 19(b)中较为相似. 除了偏心度为0.1的算例与同心算例的趋势线几乎重合之外, 随着偏心度变化, 角动量趋势线逐渐从TVF流态变成先下降后上升的SF流态.

6 结论

本文对不可压缩牛顿流体在偏心圆柱之间的低雷诺数TC流动进行了数值模拟, 研究采用四阶精度的中心差分格式. 通过变换内外半径比 $\eta(0.5, 0.9)$ 以及雷诺数 $Re_e(50, 100)$, 并使偏心度 e 从0到0.8范围变化, 主要关注层流、分离流和泰勒涡流三种流动形态的转变过程和内圆柱受力的分析.

在流态分析方面, 首先通过三维 Q 图及内外壁面流线的对比, 展示了三种流动的区别: 层流的内外壁

图 19 (网络版彩图) $\eta = 0.5$, $Re_i = 100$ 算例内圆柱不同位置归一化角动量随归一化径向位置的变化趋势. (a) $\phi = 0$; (b) $\phi = \pi/2$; (c) $\phi = \pi$; (d) $\phi = 3\pi/2$

Figure 19 (Color online) The variation of normalized angular momentum versus normalized radial position $(r - r_i)/(r_\beta - r_i)$ at different positions of inner cylinder. (a) $\phi = 0$; (b) $\phi = \pi/2$; (c) $\phi = \pi$; (d) $\phi = 3\pi/2$.

面上均为二维附着流线; 分离流的内壁面为二维附着流线, 而外壁面为二维分离再附流线; 泰勒涡流的内外壁面均为渐近分离/再附线流线.

进一步, 在讨论泰勒涡流退化为分离流的过程中发现, 外壁面的流线图可以刻画流动形态转变. 随着偏心度的增大, 首先是每条渐近分离线退化为一个源和一个鞍点, 进一步随着 e 的增大, 每条渐近再附线退化为一个汇和一个鞍点, 从而形成泰勒涡结构到三维分离流结构的转变. 随着 e 的进一步增大, 三维分离流迅速转变为二维分离流.

在受力分析方面, 主要讨论在 x 方向和 y 方向, 内圆柱受合力以及压力、黏滞力的变化规律. 计算结果主要分三部分: 小半径比($\eta=0.5$)二维层流转变为二维分离流($Re_i=50$), 小半径比($\eta=0.5$)三维 TC 流退化为二维分离流($Re_i=100$), 大半径比($\eta=0.9$)二维层流转变为二维分离流($Re_i=50, 100$).

通过对比不同部分的合力、压力和黏滞力, 在本

文所包括的雷诺数范围内, 得到如下基本发现.

在不同半径比、雷诺数的情况下, 内圆柱所受合力随偏心度变化的趋势几乎一致. 在层流到分离流的变化过程中, 随着 e 的增加, x 方向上合力的绝对值单调增加, 与雷诺数成反比. y 方向上合力绝对值先增大后减小, 且与雷诺数、半径比关系不大. 而在高雷诺数, 即从三维 TC 流退化为分离流时, 在临界 e 附近, x 方向合力变化缓慢, 出现明显平台. 这一现象在前人研究中未曾发现.

压力和黏滞力随偏心度变化的趋势也基本一致, 受半径比、雷诺数影响不大. 在 x 方向上, 压力绝对值单调增大, 黏滞力绝对值先增大后减小. 占比方面, 压力一直占合力的主要部分. 在 y 方向上, 黏滞力一直很小可以忽略. 值得注意的是, 在偏心度趋近于 0 时, x 方向上压力占比随半径比变化很大. 在大半径比 $\eta=0.9$ 情况下, 压力占比接近 1 (约为 97%). 而小半径比 $\eta=0.5$ 情况下, 则下降很快 (约为 80%), 当三维 TC 流出现时则

更小.

对于偏心TC流动中角动量的输运情况, 我们发现, 随着偏心度的增加, 在TVF流态转变为SF流态的过程中, 4个典型位置 $\phi = 0, \pi/2, \pi, 3\pi/2$ 的切面处角动量变化趋势不同. 其中, 同心TVF流态中主要的趋势是归一化角动量在归一化位置0.4–0.6范围内会明显变缓. 在 $\phi = 0, \pi/2$ 以及 $3\pi/2$ 处随着偏心度增大, 趋势线在0.4–0.6位置处的值逐渐下降并且逐渐变陡, 最终在SF流态时出现了先下降后上升的趋势, 并且受到分离涡影响, 角向速度出现了负值, 进而使归一化角动量

出现了负值. 而在窄边($\phi = \pi$), 则是角动量随偏心度增加逐渐增加, 并且呈现出在靠近内壁面处斜率较低, 靠近外壁面处斜率较高的下降趋势.

值得指出的是, 上述结论围绕三种流动状态转变过程中的流动特征, 雷诺数范围 Re_i 约在 10^1 – 10^2 . 当雷诺数更低, 如 $Re_i \sim 10^{-1}$, 流动中的黏性效应更强, 更适用于润滑理论; 当雷诺数更高时, 如 $Re_i \sim 10^3$, 三维泰勒涡出现强非定常的波状结构(Wavy Taylor Vortex), 该流动中内圆柱的受力更为复杂, 需要进一步地研究讨论.

参考文献

- Shi L, Hof B, Rampp M, et al. Hydrodynamic turbulence in quasi-Keplerian rotating flows. *Phys Fluids*, 2017, 29: 044107
- Taylor G I. Stability of a viscous liquid contained between two rotating cylinders. *Phil Trans R Soc Lond A*, 1923, 223: 289–343
- Yuan L, Fu D X, Ma Y W. Numerical study of bifurcation solutions of spherical Taylor-Couette flow (in Chinese). *Sci China Ser A*, 1995, 25: 967–975 [袁礼, 傅德薰, 马延文. 球形Taylor-Couette流分叉解的数值模拟研究. 中国科学A辑, 1995, 25: 967–975]
- Wang M M, Liu N S, Lu X Y, et al. Direct numerical simulation on transition of viscoelastic Taylor-Couette flow. *Sci Sin-Phys Mech Astron*, 2018, 48: 094704 [王敏妙, 刘难生, 陆夕云, 等. 黏弹性效应作用下Taylor-Couette流动转捩的直接模拟研究. 中国科学: 物理学 力学 天文学, 2018, 48: 094704]
- Bilgen E, Boulos R. Functional dependence of torque coefficient of coaxial cylinders on gap width and reynolds numbers. *J Fluids Eng*, 1973, 95: 122–126
- Dubrule B, Hersant F. Momentum transport and torque scaling in Taylor-Couette flow from an analogy with turbulent convection. *Eur Phys J B*, 2002, 26: 379–386
- Andereck C D, Liu S S, Swinney H L. Flow regimes in a circular Couette system with independently rotating cylinders. *J Fluid Mech*, 1986, 164: 155–183
- Andereck C D, Dickman R, Swinney H L. New flows in a circular Couette system with co-rotating cylinders. *Phys Fluids*, 1983, 26: 1395–1401
- Lasagna D, Tutty O R, Chernyshenko S. Flow regimes in a simplified Taylor-Couette-type flow model. *Eur J Mech-B/Fluids*, 2016, 57: 176–191
- Mullin T, Blohm C. Bifurcation phenomena in a Taylor-Couette flow with asymmetric boundary conditions. *Phys Fluids*, 2001, 13: 136–140
- Dong S. Direct numerical simulation of turbulent Taylor-Couette flow. *J Fluid Mech*, 2007, 587: 373–393
- Cheng W, Pullin D I, Samtaney R. Large-eddy simulation and modelling of Taylor-Couette flow. *J Fluid Mech*, 2020, 890: A17
- Ostilla-Mónico R, van der Poel E P, Verzicco R, et al. Exploring the phase diagram of fully turbulent Taylor-Couette flow. *J Fluid Mech*, 2014, 761: 1–26
- Froitzheim A, Ezeta R, Huisman S G, et al. Statistics, plumes and azimuthally travelling waves in ultimate Taylor-Couette turbulent vortices. *J Fluid Mech*, 2019, 876: 733–765
- Zhu X, Ostilla-Mónico R, Verzicco R, et al. Direct numerical simulation of Taylor-Couette flow with grooved walls: Torque scaling and flow structure. *J Fluid Mech*, 2016, 794: 746–774
- Huisman S G, van Gils D P M, Grossmann S, et al. Ultimate turbulent Taylor-Couette flow. *Phys Rev Lett*, 2012, 108: 024501
- Ezeta R, Huisman S G, Sun C, et al. Turbulence strength in ultimate Taylor-Couette turbulence. *J Fluid Mech*, 2018, 836: 397–412
- Grossmann S, Lohse D, Sun C. High-Reynolds number Taylor-Couette turbulence. *Annu Rev Fluid Mech*, 2016, 48: 53–80
- Cole J A. Taylor vortices with eccentric rotating cylinders. *Nature*, 1967, 216: 1200–1202
- Kamal M M. Separation in the flow between eccentric rotating cylinders. *J Basic Eng*, 1966, 88: 717–724
- Vohr J H. An experimental study of Taylor vortices and turbulence in flow between eccentric rotating cylinders. *J Lubr Tech*, 1968, 90: 285–296
- Lim T T, Lim S S. Modified expression for critical Reynolds number in eccentric Taylor Couette flow. *AIAA J*, 2008, 46: 277–280
- Podryabinkin E V, Rudyak V Y. Moment and forces exerted on the inner cylinder in eccentric annular flow. *J Engin Thermophys*, 2011, 20: 320–328

- 24 Shu C, Wang L, Chew Y T, et al. Numerical study of eccentric Couette Taylor flows and effect of eccentricity on flow patterns. [Theoret Comput Fluid Dyn](#), 2004, 18: 43–59
- 25 Leclercq C, Pier B, Scott J F. Temporal stability of eccentric Taylor-Couette-Poiseuille flow. [J Fluid Mech](#), 2013, 733: 68–99
- 26 Leclercq C, Pier B, Scott J F. Absolute instabilities in eccentric Taylor-Couette-Poiseuille flow. [J Fluid Mech](#), 2014, 741: 543–566
- 27 Wood W W. The asymptotic expansions at large Reynolds numbers for steady motion between non-coaxial cylinders. [J Fluid Mech](#), 1957, 3: 159–175
- 28 DiPrima R C, Stuart J T. Flow between eccentric rotating cylinders. [J Lubricat Tech](#), 1972, 94: 266–274
- 29 Ballal B Y, Rivlin R S. Flow of a Newtonian fluid between eccentric rotating cylinders: Inertial effects. [Arch Rational Mech Anal](#), 1976, 62: 237–294
- 30 Wannier G H. A contribution to the hydrodynamics of lubrication. [Quart Appl Math](#), 1950, 8: 1–32
- 31 Zang Y, Street R L, Koseff J R. A non-staggered grid, fractional step method for time-dependent incompressible Navier-Stokes equations in curvilinear coordinates. [J Comput Phys](#), 1994, 114: 18–33
- 32 Morinishi Y, Lund T S, Vasilyev O V, et al. Fully conservative higher order finite difference schemes for incompressible flow. [J Comput Phys](#), 1998, 143: 90–124
- 33 Spalart P R, Moser R D, Rogers M M. Spectral methods for the Navier-Stokes equations with one infinite and two periodic directions. [J Comput Phys](#), 1991, 96: 297–324
- 34 Ashwin P, King G P. Streamline topology in eccentric Taylor vortex flow. [J Fluid Mech](#), 1995, 285: 215–247
- 35 Eagles P M, Stuart J T, DiPrima R C. The effects of eccentricity on torque and load in Taylor-vortex flow. [J Fluid Mech](#), 1978, 87: 209–231

Numerical simulation of the Taylor-Couette flow between eccentric cylinders

LI MingDa, CHENG Wan* & LUO XiSheng

College of Engineering, University of Science and Technology of China, Hefei 230027, China

We present the numerical simulation of the Taylor-Couette (TC) flow between eccentric cylinders with only the inner cylinder rotating at low Reynolds numbers. A fourth-order finite difference method was used with a bipolar mesh for cylinders with two radius ratios of 0.5 and 0.9, inner Reynolds numbers of 50 and 100, and varying eccentricity e ($0 \leq e \leq 0.8$). These conditions ensured a complete description of all three flow regimes: the circular Couette flow (CCF), separation flow (SF), and eccentric Taylor vortex flow (TVF). In numerical verifications, the velocity profiles were compared with those in the case of a concentric cylinder, and the forces were compared with those in the case of eccentric cylinders with a radius ratio of 0.5. The present results emphasize on the flow regimes transition and the forces exerted on the inner cylinder. With regard to the description of flow regimes, we first elucidated the characters of three states: the CCF with two-dimensional (2D) streamlines attached to both the inner and outer cylinders, SF with streamlines attached to the inner cylinder while separation/reattachment occurs at the outer cylinder, and TVF with separatrices on both the inner and outer cylinders. For a transition from the TVF to the SF state, first, each separatrix denoting separation degenerates into a source point and saddle point; then, each separatrix representing reattachment degenerates into a sink point and saddle point. This two-step transition implies a transition from the Taylor vortex to a three-dimensional (3D) separation state. This 3D separation then quickly degenerates into 2D separation, as shown in the SF regime. Discussion of the forces on the inner cylinder showed that forces in the x direction (perpendicular to the line connecting the two centers) increase with the increase in e , whereas the forces in the y direction (along the line connecting the two centers) first increase and then decrease. When the regression of the 3D TC flow to a 2D SF is examined, forces in the x direction around the critical eccentricity exhibit a plateau. For pressure and viscous forces, the ratio of the pressure and resultant force in the x direction increases with e , whereas in the y direction, this ratio is close to unity. Furthermore, when e approaches zero, the ratio in the x direction is a function of the radius ratio: it is close to unity for large radius ratios and decreases quickly as the radius ratio decreases (in the present study, the ratio of pressure and resultant force in the x direction is 0.8 for a radius ratio of 0.5). For 3D TC flow cases, this ratio is even smaller.

eccentric Taylor-Couette flow, low Reynolds number, numerical simulation

PACS: 47.11.Bc, 47.20.Ib, 47.20.Qr

doi: [10.1360/SSPMA-2021-0050](https://doi.org/10.1360/SSPMA-2021-0050)