基于微分改正和圆轨道约束的广义Laplace方法初轨确定

汤靖师^{1,2,3*}, 程昊文^{4,5}

1. 南京大学天文与空间科学学院, 南京 210023;
2. 现代天文与天体物理教育部重点实验室, 南京 210023;
3. 南京大学空间环境与航天动力学研究所, 南京 210023;
4. 中国科学院国家天文台, 北京 100012;
5. 中国科学院大学天文与空间科学学院, 北京 100012

*联系人, E-mail: jstang@nju.edu.cn

收稿日期: 2021-08-05; 接受日期: 2021-10-20; 网络出版日期: 2022-02-16

国家自然科学基金(编号: 11873031)资助项目

摘要 航天器的初轨确定在卫星测控、空间碎片监测等场景中重要的作用. 广义Laplace方法以经典的Laplace方法为基础, 支持摄动和多种观测类型, 过程清晰、原理简单、构造方便, 在实测场景中可以取得较好的使用效果. 但在处理中高轨目标的观测数据时, 现有的广义Laplace方法仍时有失效的情况出现. 事实上, 由于中高轨目标弧段较短, 特别是同步轨道目标相对地面静止, 短弧段定轨相对观测几何较差. 受观测误差的影响, 即使观测量均方根差(RMS)收敛到极小值, 所得初轨中的轨道面内根数有时也会出现较大的偏差. 本文在现有的广义Laplace方法基础上, 使用微分改正来求解法化方程, 提高收敛稳定性. 同时对于明确的圆轨道目标, 引入额外的约束. 结果表明, 通过这两项改进, 初轨计算的收敛和结果的合理性有明显改善. 以往很难收敛或不合理的初轨结果仅通过数次迭代就能稳定地得到圆轨道结果.

关键词 初轨确定, 广义Laplace方法, 地球同步轨道, 空间碎片监测

PACS: 95.75.Qr, 95.10.Ce, 95.10.Eg, 95.40.+s, 91.10.Sp

1 引言

航天器的初轨确定在卫星测控、空间碎片监测等场景中重要的作用, 可以为后续引导观测、精密定轨等工作提供重要的输入. 在空间碎片监测中, 初轨确定对碎片等空间目标, 特别是新目标的编目定轨、

引导观测有重要的作用, 因此可靠、合理的初轨结果至关重要^[1,2].

天体力学中经典的定初轨方法包括Laplace, Gauss两类^[3], 前者估计目标在同一时刻的位置、速度矢量, 后者估计目标在不同时刻的两个位置矢量. 针对航天器定初轨的观测场景和动力学模型, 每一类方法

引用格式: 汤靖师, 程昊文. 基于微分改正和圆轨道约束的广义Laplace方法初轨确定. 中国科学: 物理学 力学 天文学, 2022, 52: 269511
Tang J S, Cheng H W. Initial orbit determination using the generalized Laplacian method with differential correction and circular-orbit constraint (in Chinese). Sci Sin-Phys Mech Astron, 2022, 52: 269511, doi: [10.1360/SSPMA-2021-0224](https://doi.org/10.1360/SSPMA-2021-0224)

都有不同的实现. 比如对观测方程两端操作的不同, 可以有广义Laplace方法^[3]、参考矢量法^[4]等; 常说的双r方法顾名思义就是一种Gauss方法的实现.

对空间碎片监测等实际定初轨场景中, 每次观测的弧段较短且观测量不多, 多数时候观测弧段的长度从数分钟到十几分钟不等, 观测量的数量从十几到几十个不等, 极端情况下甚至只有个位数的观测量. 这一情况结合观测误差、中高轨碎片观测几何较差等具体问题, 会导致初轨确定在空间碎片监测的实际应用中出现定轨不稳定、结果可靠性不高等问题. 因此无论是何种定初轨方法, 在实际应用中有时都需要进行适应性改进或调整.

以空间碎片监测等场景中单条短弧定初轨为目标, 以往文献中不乏对已有方法的讨论和适应性的调整. 文献[5,6]以参考矢量法为例讨论了外部约束在定初轨中的应用; 文献[7]讨论了在短弧场景中应用能量守恒来进一步判断和约束初轨结果; 在弧段极短, 无法得到有意义的、确定的初轨结果时, 文献[8,9]及此后多篇文献讨论了通过运动可行区域(Admissible Region)分析初轨可能的分布, 为初轨确定提供了新的思路.

文献[3]中介绍的广义Laplace方法虽然构造简单、方便, 但针对该方法的“适应性”讨论尚不多见. 上述工作中, 参考矢量法的背景与本文比较相似, 但外部约束在广义Laplace方法框架下的添加和定轨表现值得探索; 能量守恒对本文工作中用来约束初轨偏心率并不适用; 而运动可行区域在空间碎片监测中多见诸短于1 min甚至只有十几秒的极短弧, 对本文而言并无必要. 本文以广义Laplace方法为基础, 主要讨论利用数分钟至十几分钟的弧段解算初轨时通过微分改正提高迭代效率和收敛稳定性, 以及通过圆轨道约束消除大偏心率初轨假解^[5]的影响, 提高使用广义Laplace方法对中高轨碎片定初轨结果的可靠性.

2 初轨确定方法

2.1 广义Laplace方法

广义Laplace方法通过结合测量方程和动力学方程得到形如下面线性方程组的条件方程^[3]:

$$\mathbf{A} \begin{pmatrix} \mathbf{r}_0 \\ \dot{\mathbf{r}}_0 \end{pmatrix} = \mathbf{b}, \quad (1)$$

其中 $(\mathbf{r}_0, \dot{\mathbf{r}}_0)$ 是待估的定轨历元的轨道状态量, $\mathbf{A}$ 是 $M \times 6$ 维的矩阵, M 为观测弧段对应的方程数. 如果保留所有(包括非独立的)方程用于最小二乘, 那么 $M=3N$ (N 为观测量组数).

该方法支持多种观测类型, 并可在动力学方程中加入 J_2 和第三体引力等摄动, 在不少实测场景的应用中可以取得较好的效果^[10].

广义Laplace方法中, (1)式的构造采用了展开式 $\mathbf{r}(t) = \mathbf{F}(\mathbf{r}_0, \dot{\mathbf{r}}_0, t)\mathbf{r}_0 + \mathbf{G}(\mathbf{r}_0, \dot{\mathbf{r}}_0, t)\dot{\mathbf{r}}_0$, 因此系数矩阵 $\mathbf{A}$ 也包含待估参数 $(\mathbf{r}_0, \dot{\mathbf{r}}_0)$. 在首轮采用 $F(t_j) \approx 1$, $G(t_j) \approx \tau_j = t_j - t_0$ 的近似后, 后续一般通过简单迭代的方法, 利用前一次结果计算系数矩阵 $\mathbf{A}$ 后解算新的 $(\mathbf{r}_0, \dot{\mathbf{r}}_0)$, 直至收敛.

采用简单迭代求解方程(1), 一般情况下可以取得理想的效果, 文献[10]展示了该方法在低轨目标中的应用效果. 借助星载GNSS接收机提供的点位信息, 广义Laplace方法可以给出与精密轨道十分接近的初轨根数.

但对于中高轨目标, 特别是同步轨道目标, 上述方法偶有定轨失败出现, 表现为定轨不收敛或结果明显不符合近圆轨道特征. 究其原因, 应和同步轨道目标观测几何较差有关. 受观测误差的影响, 首次近似得到的结果不能保证迭代过程收敛或收敛至合理的初轨结果. 这和简单迭代过程中条件方程(1)式系数矩阵里的 $\mathbf{r}_0, \dot{\mathbf{r}}_0$ 不参与改正有关, 这会影响迭代收敛效率, 在观测数据分布、精度较差时, 甚至会影响收敛性. 针对这一问题, 下面考虑使用微分改正来改善迭代过程.

2.2 微分改正

将待估参数记为 $\mathbf{X}_0 = (\mathbf{r}_0^T, \dot{\mathbf{r}}_0^T)^T$, 将(1)式表示为 $\mathbf{H}(\mathbf{X}_0) = \mathbf{A}(\mathbf{X}_0)\mathbf{X}_0 - \mathbf{b} = 0$, 一共对应 M 组条件. 设其中第 m 个方程(记为 H_m)可表示为 $H_m(\mathbf{X}_0) = \mathbf{A}_m(\mathbf{X}_0)\mathbf{X}_0 - b_m$, 那么根据微分改正(牛顿迭代)方法, 第 k 次迭代待估参数的改正量 $\Delta\mathbf{X}_0^{(k)}$ 满足:

$$\left. \frac{\partial H_m}{\partial \mathbf{X}_0} \right|_{\mathbf{X}_0^{(k-1)}} \Delta\mathbf{X}_0^{(k)} = -H_m(\mathbf{X}_0^{(k-1)}), \quad (2)$$

其中 $\Delta\mathbf{X}_0^{(k)} = [(\Delta x_0, \Delta y_0, \Delta z_0, \Delta \dot{x}_0, \Delta \dot{y}_0, \Delta \dot{z}_0)^T]^{(k)}$;

$\partial H_m / \partial \mathbf{X}_0$ 为 1×6 维的矩阵, 形式如下:

$$\frac{\partial H_m}{\partial \mathbf{X}_0} = \left(\frac{\partial \mathbf{A}_m}{\partial \mathbf{X}_0} \mathbf{X}_0 \right)^T + A_m, \quad (3)$$

其中 $\partial \mathbf{A}_m / \partial \mathbf{X}_0$ 为 6×6 维矩阵, 第 (i, j) 个元素为 $\mathbf{A}_m$ 中第 i 个元素对第 j 个状态量的偏导数.

这一调整显然对任意可观测的数据类型都是适用的, 如测角(地平或赤道)、测角加测距、星载GNSS点位. 即使是多站融合的观测量也没有任何问题. 不失一般性, 考虑到空间碎片监测中中高轨目标往往采用光学设备跟踪, 因此下面针对赤道测角数据 (α, δ) 给出具体表达式, 其他类型数据可采用类似的方式构造具体的方程, 有些类型可能形式更加简单.

对于光学数据, (1)式对应下面三个由不同观测数据构成的条件方程:

$$\begin{cases} (Fv)x_0 - (F'\lambda)z_0 + (Gv)\dot{x}_0 - (G'\lambda)\dot{z}_0 = vX - \lambda Z, \\ (Fv)y_0 - (F'\mu)z_0 + (Gv)\dot{y}_0 - (G'\mu)\dot{z}_0 = vY - \mu Z, \\ (F\mu)x_0 - (F'\lambda)y_0 + (G\mu)\dot{x}_0 - (G'\lambda)\dot{y}_0 = \mu X - \lambda Y, \end{cases} \quad (4)$$

因此, (3)式中的 A_m 取下面形式之一:

$$\begin{aligned} A_m^{(1)} &: (F_m v_m \ 0 \ -F'_m \lambda_m \ G_m v_m \ 0 \ -G'_m \lambda_m), \\ A_m^{(2)} &: (0 \ F_m v_m \ -F'_m \mu_m \ 0 \ G_m v_m \ -G'_m \mu_m), \\ A_m^{(3)} &: (F_m \mu_m \ -F'_m \lambda_m \ 0 \ G_m \mu_m \ -G'_m \lambda_m \ 0), \end{aligned} \quad (5)$$

其中展开式系数 F, G (又称Lagrange系数^[11]) 在考虑 J_2 后 z 分量不同于 x, y 分量^[3], 记为 F', G' . 单位矢量 $(\lambda_m, \mu_m, v_m)^T$ 表示当前观测数据对应的目标方位矢量, 该矢量与对状态量的偏导数无关; (4)式中等式右边即为(1)式中的 $\mathbf{b}$ 矢量, 其中 (X, Y, Z) 是测站在J2000历元平赤道下的位置矢量. 这些符号和过程是广义Laplace方法的常用表达, 可参见文献[3,11]等, 下文不再赘述.

方便起见, 下面忽略表示条件方程的编号 m . 记(5)式中 $A^{(1)}, A^{(2)}, A^{(3)}$ 分别对应(2)和(3)式中 $H^{(1)}, H^{(2)}, H^{(3)}$, 不难得到相应的(2)式如下:

$$\begin{aligned} A^{(1)} &: E_{11}\Delta x_0 + E_{12}\Delta y_0 + E_{13}\Delta z_0 + E_{14}\Delta \dot{x}_0 \\ &\quad + E_{15}\Delta \dot{y}_0 + E_{16}\Delta \dot{z}_0 = b^{(1)} - A^{(1)}\mathbf{X}_0, \\ A^{(2)} &: E_{21}\Delta x_0 + E_{22}\Delta y_0 + E_{23}\Delta z_0 + E_{24}\Delta \dot{x}_0 \\ &\quad + E_{25}\Delta \dot{y}_0 + E_{26}\Delta \dot{z}_0 = b^{(2)} - A^{(2)}\mathbf{X}_0, \\ A^{(3)} &: E_{31}\Delta x_0 + E_{32}\Delta y_0 + E_{33}\Delta z_0 + E_{34}\Delta \dot{x}_0 \\ &\quad + E_{35}\Delta \dot{y}_0 + E_{36}\Delta \dot{z}_0 = b^{(3)} - A^{(3)}\mathbf{X}_0, \end{aligned} \quad (6)$$

其中, 系数矩阵 $E_{3 \times 6}$ 各元素如下:

$$\begin{cases} E_{11} = (F_1 x_0 + G_1 \dot{x}_0)v + (-F'_1 z_0 - G'_1 \dot{z}_0)\lambda + Fv, \\ E_{12} = (F_2 x_0 + G_2 \dot{x}_0)v + (-F'_2 z_0 - G'_2 \dot{z}_0)\lambda, \\ E_{13} = (F_3 x_0 + G_3 \dot{x}_0)v + (-F'_3 z_0 - G'_3 \dot{z}_0)\lambda - F'\lambda, \\ E_{14} = (F_4 x_0 + G_4 \dot{x}_0)v + (-F'_4 z_0 - G'_4 \dot{z}_0)\lambda + Gv, \\ E_{15} = (F_5 x_0 + G_5 \dot{x}_0)v + (-F'_5 z_0 - G'_5 \dot{z}_0)\lambda, \\ E_{16} = (F_6 x_0 + G_6 \dot{x}_0)v + (-F'_6 z_0 - G'_6 \dot{z}_0)\lambda - G'\lambda, \end{cases} \quad (7)$$

$$\begin{cases} E_{21} = (F_1 y_0 + G_1 \dot{y}_0)v + (-F'_1 z_0 - G'_1 \dot{z}_0)\mu, \\ E_{22} = (F_2 y_0 + G_2 \dot{y}_0)v + (-F'_2 z_0 - G'_2 \dot{z}_0)\mu + Fv, \\ E_{23} = (F_3 y_0 + G_3 \dot{y}_0)v + (-F'_3 z_0 - G'_3 \dot{z}_0)\mu - F'\mu, \\ E_{24} = (F_4 y_0 + G_4 \dot{y}_0)v + (-F'_4 z_0 - G'_4 \dot{z}_0)\mu, \\ E_{25} = (F_5 y_0 + G_5 \dot{y}_0)v + (-F'_5 z_0 - G'_5 \dot{z}_0)\mu + Gv, \\ E_{26} = (F_6 y_0 + G_6 \dot{y}_0)v + (-F'_6 z_0 - G'_6 \dot{z}_0)\mu - G'\mu, \end{cases} \quad (8)$$

$$\begin{cases} E_{31} = (F_1 x_0 + G_1 \dot{x}_0)\mu + (-F_1 y_0 - G_1 \dot{y}_0)\lambda + F\mu, \\ E_{32} = (F_2 x_0 + G_2 \dot{x}_0)\mu + (-F_2 y_0 - G_2 \dot{y}_0)\lambda - F\lambda, \\ E_{33} = (F_3 x_0 + G_3 \dot{x}_0)\mu + (-F_3 y_0 - G_3 \dot{y}_0)\lambda, \\ E_{34} = (F_4 x_0 + G_4 \dot{x}_0)\mu + (-F_4 y_0 - G_4 \dot{y}_0)\lambda + G\mu, \\ E_{35} = (F_5 x_0 + G_5 \dot{x}_0)\mu + (-F_5 y_0 - G_5 \dot{y}_0)\lambda - G\lambda, \\ E_{36} = (F_6 x_0 + G_6 \dot{x}_0)\mu + (-F_6 y_0 - G_6 \dot{y}_0)\lambda. \end{cases} \quad (9)$$

上面诸式中 F_j ($j = 1-6$) 分别依次表示 F 对轨道状态量 $(\mathbf{r}_0, \dot{\mathbf{r}}_0)$ 的偏导数, G_j, F'_j, G'_j 与此类似. 这组偏导数用于微分改正算法中为迭代提供正确的收敛方向, 精度可稍低于定轨动力学方程中的精度, 因此推导可以适当简化: 如果不考虑展开式中 $O(\tau^2)$ 的项, 那么 $F_j = G_j = F'_j = G'_j = 0$; 如果 F, F' 精确到 $O(\tau^2)$, G, G' 精确到 $O(\tau^3)$, 且不考虑 J_2 和第三体, 那么上述偏导数对位置分量不为零, 对速度分量为零, 即

$$\begin{aligned} F_{1-3} &= F'_{1-3} = \frac{\partial}{\partial(x, y, z)} \left(-\frac{\tau^2}{2r^3} \right) = \frac{3\tau^2}{2r^5}(x, y, z), \\ G_{1-3} &= G'_{1-3} = \frac{\partial}{\partial(x, y, z)} \left(-\frac{\tau^3}{6r^3} \right) = \frac{\tau^3}{2r^5}(x, y, z), \\ F_{4-6} &= F'_{4-6} = G_{4-6} = G'_{4-6} = 0. \end{aligned} \quad (10)$$

上式基于二体关系得到, 因此也可以利用Lagrange系数 F, G 的封闭表达式^[11,12] 给出封闭形式. 但对于本文讨论的问题, (10)式形式简单, 精度也足够.

至此, 已经给出了基于微分改正的条件方程(1)式求解. 这一过程对迭代的首次计算和迭代控制没有影响, 仅改变了以往广义Laplace方法迭代过程中条件方程的求解过程. 简单迭代法每次迭代求解的是 $(\mathbf{r}_0, \dot{\mathbf{r}}_0)$,

而微分改正从第二次迭代开始求解其改正量 $\Delta \mathbf{X}_0$. 这一做法的好处是可以提高收敛速度, 在观测误差较大、观测几何较差、弧段较短等有些无法收敛或收敛不稳定(在极值间跳动)的场景中提高收敛的稳定性.

需要说明的是, 相比简单迭代, 微分改正对求解非线性方程组迭代过程的改进是显而易见的. 一般来说, 对非线性方程(组)采用形如 $\mathbf{x}_{n+1} = f(\mathbf{x}_n)$ 的简单迭代对 f 的性质有一定要求. 在定初轨问题中, 使用简单迭代求解条件方程(1)式时往往迭代次数较多, 收敛稳定性不佳. 而微分改正通过一阶导数(Jacobi矩阵)给出了极值方向, 对减少迭代次数和改善收敛稳定性无疑是有益的. 迭代求解非线性方程(组)是数值方法的基本技巧, 这里不再赘述有关数学原理, 感兴趣的读者可参见相关文献, 如文献[13].

此外, 本文虽引入了微分改正, 但和同样采用微分改正的精密定轨(或称轨道改进, 可参见文献[10])无关. 精密定轨基于多变元展开线性化构造法方程, 而本文虽然引入微分改正, 求解的仍是广义Laplace方法基于时间幂级数构造的条件方程(1)式. 两者并不相同, 请读者注意辨别.

2.3 圆轨道约束

在处理部分中高轨, 特别是同步轨道目标时, 受弧段短、观测误差较大的影响, 虽然在加入微分改正后广义Laplace方法仍能稳定收敛到RMS极小的结果, 但初轨根数和预期的近圆轨道明显不符^[3,5]. 这会导致半长径 a 也出现较大的偏差, 但对定向根数 i 和 Ω 影响不大. 这一问题在计算中轨GNSS卫星的初轨时也偶有发生.

文献[5]对这一问题进行了探讨, 认为这是定初轨问题中对应局部极小值的一个假解. 为了处理这一问题, 有些文献(如文献[6])中换用参考矢量法、双r法等方法, 但由于迭代过程也会面临同样的收敛问题, 因此通常会假设半长径的取值或限制其范围. 究其原因, 在于无论何种方法, 如果稳定收敛到观测量RMS极小, 说明方法本身已经就所给观测数据和条件(测量方程、动力学方程)给出了合理的结果. 初轨根数与实际轨道相符与否, 很大程度上受到观测数据长度、精度的制约. 从这一点出发, 广义Laplace方法中也可以引入额外的约束(假设)来保证结果符合圆轨道特性.

约束初轨为圆轨道可以有多种办法, 比如直接设定初轨满足偏心率为零的条件:

$$\begin{cases} e \cos E = 1 - r/a, \\ e \sin E = (\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}}) / \sqrt{\mu a}, \end{cases} \quad (11)$$

$$\Rightarrow e^2 = \left(1 - \frac{r}{a}\right)^2 + \frac{(\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}})^2}{\mu a} = 0.$$

考虑到广义Laplace方法直接求解目标初轨的位置速度矢量, 下面采用两个形式简单的约束, 既便于推导和实现, 效果也很好. 首先要求初轨所在位置满足圆轨道特征 $v^2 = \mu/r$. 满足这一条的初轨也可能是在椭圆轨道上的特定位置($E = \pi/2$ 或 $3\pi/2$), 并不能保证轨道本身为圆轨道, 还要再加上一条 $\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}} = 0$. 后者也可能是在椭圆轨道的拱线上, 但除非是圆轨道, 否则不可能和第一条同时成立. 结合这两条可以保证初轨一定是圆轨道.

在微分改正的框架下, 额外的两个条件可表示为

$$\begin{cases} H' = v^2 - \mu/r = 0, \\ H'' = \mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}} = 0. \end{cases} \quad (12)$$

相应的偏导数矩阵为

$$\begin{aligned} \frac{\partial H'}{\partial \mathbf{X}_0} &= \begin{pmatrix} \frac{\mu x_0}{r_0^3} & \frac{\mu y_0}{r_0^3} & \frac{\mu z_0}{r_0^3} & 2\dot{x}_0 & 2\dot{y}_0 & 2\dot{z}_0 \end{pmatrix}, \\ \frac{\partial H''}{\partial \mathbf{X}_0} &= (\dot{x}_0 \quad \dot{y}_0 \quad \dot{z}_0 \quad x_0 \quad y_0 \quad z_0). \end{aligned} \quad (13)$$

将(12)式对应的条件和2.2节中的其他条件方程联立, 就可以在广义Laplace方程中加入圆轨道约束.

关于圆轨道约束, 下面有两点说明. 一是(12)式约束与观测资料无关, 添加这一约束可以有两种实现: 一是在每组观测资料中都并联(12)式, 如果一共有 N 组观测资料, 这等于对每组资料都用(12)式进行约束, 在构造法化方程时对(12)式添加了 N 倍权重; 另一种是将(12)式和所有观测资料构成的条件方程(1)式(或其微分改进形式(6)式)并列构造法化方程, 等价于(12)式与每个方程等权重. 这两种实现其实是对(12)式的两种加权策略. 从原理上来说, 数学上最优的权重应介于1和 N 之间, 但就短弧定初轨这个有些病态的问题, 最优权重应和数据弧长、分布、类型以及观测精度、相对几何都有关系. 目前文献中没有发现普适的定量算法, 也没有经验性实践指导. 因此本文下面的算例不尝试通过频繁的试错来寻找最优权重, 一方面这样的结果

对其他场景的适用性有限, 另一方面不利于算法部署在无人值守的实时场景中.

根据测试, 等权加入(12)式对初轨的大偏心率结果确有改进, 但偏心率仍为原来结果的1/2–1/10, 依然是歪曲的. 因此下面的算例在处理每组观测资料时都加入(12)式, 将圆轨道约束 N 倍权重加入最终的法化方程.

另一点关于圆轨道约束的讨论, 是对于观测数据约束不强的弧段, 比如数据较少时, 当圆轨道约束以 N 倍权重加入法化方程时, 反而可能导致迭代过程受到圆轨道约束的主导, 出现不合理的圆轨道初轨结果.

对于这种情况, 一种可行的调整是引入两步迭代. 在迭代开始时不加入圆轨道约束, 在初步收敛之后加入圆轨道约束继续迭代, 将初轨结果改正至圆轨道. 这一做法以迭代效率为代价, 保证迭代过程首先以观测数据为约束迭代至收敛, 然后在此基础上调整为圆轨道.

这一调整(两步迭代)在观测数据很少时作用显著, 但在数据较多时并无必要, 反而会影响效率. 本文后面的算例一般都直接加入圆轨道约束, 仅在下一节末尾3.3.3节测试数据较少的弧段时会对比两种策略. 当观测测量较少, 处于“弱势”时, 观测测量残差RMS会明显增大, 远远超过没有圆轨道约束的结果, 表明观测测量没有起作用. 因此这一情况在实际场景中并不难判断, 不存在不确定因素. 下文将结合算例进行讨论.

关于圆轨道约束, 第三点说明回到其定初轨的背景. 虽然我们引入(12)式是为了取代(11)式以方便推导偏导数, 但不难发现这两组式子本质上是等价的. (11)式成立的前提是(12)式两个等式同时成立; (12)式两个等式成立则(11)式也必然成立. 因此, 无论我们在何种定初轨方法中引入何种形式的圆轨道约束, 都隐含(11)式或(12)式成立. 从等式约束下的最小二乘的角度来看(12)式, 不难发现这两个式子暗含了对卫星近点角的约束. 这表明圆轨道约束的本质是将原来6个自由度的问题降低了2个自由度. 当然, 对于圆轨道, 由于近地点幅角 ω 和近点角是耦合的, 因此虽然近点角受到外部约束也依然对精度没有影响, 这一点是显而易见的, 不再赘述.

与偏心率约束类似, 通过 z 和 $\dot{z}$ 的约束也可以实现对 i 的约束, 比如 $z=0 \Leftrightarrow i=0$. 但通常来说初轨结果中的轨道根数(i 和 Ω)是比较好且稳定的. 即使在3.3.3节这

样比较极端的算例中, 自然依靠观测量也可以得到比较理想的 i 和 Ω . 在这里指出这一点, 仅供有需要的读者参考, 下文的算例中并不对 i 和 Ω 施加外部约束.

最后说明的是, 圆轨道约束适用的是计算对象的先验轨道已知为近圆轨道的场景. 不过即使是在搜索模式下, 如果确实对大偏心率轨道目标应用了该约束, 也并非无法判断. 因为圆轨道约束以 N 倍权重加入最小二乘, 除非出现了文献[5]中提到的假解, 否则初轨结果必然不符合观测量, 会造成观测测量残差RMS显著增大, 明显超过不使用圆轨道约束的情况. 关于这一问题, 下文3.3.3节给出了相关讨论.

3 数值算例

本节将通过1组仿真数据和10组实测数据来验证上一节中提出的对广义Laplace方法的两种改进. 从原理上就可以看出这两种改进针对的问题不同, 前者用于改善非线性方程组的迭代收敛, 后者通过引入外部约束克服观测测量约束不足的情况.

本节中3.1节通过两组算例展示了微分改正正在求解定初轨条件方程时对迭代收敛的贡献; 3.2节通过3.1节中GEO目标的算例, 讨论了圆轨道约束的贡献和结果; 3.3节进一步利用其他多组中高轨测试数据进行验证, 展示不同中高轨道、不同测量场景下, 两种改进共同作用得到的定初轨结果.

值得一提的是, 虽然从第2节的原理不难看出, 这两方面改进与观测测量类型、目标轨道类型都无关, 但本节中10组实测数据均为中高轨目标的单站测角数据(赤经赤纬). 这是因为从定初轨的实际问题来看, 测角数据(单站)的收敛性不如测角加测距、GNSS点位. 又因为中高轨目标更容易在定初轨中遇到收敛的问题, 而中高轨目标一般又多用光学手段观测, 所以本节选择的实测数据算例均为中高轨目标的单站赤道测角数据. 请读者注意, 这并不表示本文方法的适用性有局限, 3.1节的仿真数据中包括一组低轨的地平测角数据, 可以作为参考.

本节中所有定初轨算例设定为连续两次迭代的位置改正量不超过 $10^{-6}a_e$ 时收敛(约为6.4 m, 其中 a_e 为地球参考椭球赤道半径6378.137 km). 算例中通过观测测量残差RMS评估初轨结果和观测量的符合程度, 但没有将其作为收敛的控制指标. 原因在于短弧定轨时,

即使轨道状态量还没有稳定收敛或者偏差较大, 观测量依然可以符合得较好, 这一点在文献[3]中有阐述.

此外, 本文处理的实测弧段主要用于设备测试或后续跟踪引导, 因此并无长弧精密定轨数据可供比对. 实际中如果弧段后续有长弧精密定轨的结果, 也可以更好地用来评估初轨结果的精度. 本方法是对广义Laplace方法的扩展, 文献[10]中列举了广义Laplace方法在几组低轨实测数据算例中与精密定轨结果的比对, 可供参考.

3.1 微分改正的效果

本节采用一组仿真地平测角数据和一组实测赤道测角数据来比较简单迭代和微分改正的差别.

仿真地平测角数据的目标是一颗低轨卫星(LEO), 数据长度约388 s, 观测数据中加入 10^{-5} rad的随机差. 采用简单迭代和微分改正求解广义Laplace方法的条件方程的结果如表1所示.

可以发现, 两者的收敛结果并没有显著差异. 图1和2展示了迭代过程中位置变化量和观测量残差RMS随迭代的变化图像, 不难看出, 使用微分改正确实对迭代过程有较大的改进. 相比简单迭代需要60多次迭代才能实现初轨位置改正量小于1 m, 微分改进可以在7次迭代后就收敛.

另一组实测同步轨道(GEO)数据对应NORAD编号(下同)为48618的目标, 数据为长度约1460 s的赤道测角数据, 共182组. 在广义Laplace方法下, 该目标利用简单迭代无法收敛, 但通过微分改正可以在26次迭代后收敛至观测量残差RMS为 4.1×10^{-5} rad. 初轨位置

表 1 广义Laplace方法中条件方程的不同解法对低轨卫星定初轨的结果

Table 1 Solutions of LEO preliminary orbits to the condition equations using different implementations of generalized Laplacian method

算法	简单迭代	微分改正
迭代次数	65	7
RMS (rad)	2.34×10^{-5}	2.34×10^{-5}
a (km)	7866.797	7866.824
e	0.002030	0.002031
i (°)	49.968694	49.968688
Ω (°)	322.325274	322.325246
$\omega+M$ (°)	139.559155	139.559209

图 1 (网络版彩图)低轨目标定初轨算例中, 使用或不使用微分改正(DC)求解条件方程时每次迭代的位置变化

Figure 1 (Color online) For preliminary orbit determination of LEO object, position differences between iterations when solving condition equations with or without differential correction (DC).

图 2 (网络版彩图)低轨目标定初轨算例中, 使用或不使用微分改正求解条件方程时每次迭代的观测量残差RMS

Figure 2 (Color online) For preliminary orbit determination of LEO object, observation residual RMS between iterations when solving condition equations with or without differential correction (DC).

改正量和观测量残差RMS随迭代的变化如图3所示, 最终的观测量残差如图4所示.

上面的结果已经展示了微分迭代求解条件方程时的明显优势, 但这只能“忠实”地在观测数据和约束(测量方程、动力学方程)下给出最小二乘意义下的最优

图 3 (网络版彩图)同步轨道目标定初轨算例中, 使用微分改正求解条件方程时每次迭代的位置变化(a)和观测量残差 RMS (b)

Figure 3 (Color online) For preliminary orbit determination of GEO object, position differences (a) and observation residual RMS (b) between iterations when solving condition equations with differential correction.

图 4 (网络版彩图)同步目标定初轨算例中, 使用微分改正求解条件方程收敛后的观测量残差

Figure 4 (Color online) For preliminary orbit determination of LEO object, observation residuals of the final iteration when solving condition with differential correction.

解. 当观测数据客观上弧段短、误差大时, 即使是最小二乘下的最优解, 结果依然可能是歪曲的. 在处理 #48618 的实测数据时, 虽然迭代过程是稳定收敛的,

但初轨根数有明显的偏差, 具体为: $a = 25404.341$ km, $e = 0.398570$, $i = 8.319977^\circ$.

对于同步轨道目标, 初轨给出了一个中轨大偏心率轨道, 仅轨道倾角仍看似正常. 这和定初轨中轨道面内根数易受观测误差影响的结论和经验是一致的.

针对这一问题, 下面在广义 Laplace 方法条件方程的基础上, 加入圆轨道约束, 重新构造法化方程并使用微分改正求解.

3.2 同步轨道加入圆轨道约束的效果

在加入圆轨道约束后, 初轨结果得到了明显改进, 迭代过程也快了很多. 相比上一次没有加入圆轨道约束, 此时定轨过程和结果如表 2 所示.

迭代过程中位置改正量和观测量残差 RMS 如图 5 所示, 所有观测量的残差如图 6 所示.

比起不使用圆轨道约束, 加入约束后迭代过程收敛明显更快, 并且赤纬的观测量残差也优于不使用约束的情况.

不过对于加入约束得到的结果, 轨道偏心率存在约束“过度”的情况, 偏心率量级明显小于实际近圆轨道的偏心率. 这一情况在其他算例加入圆轨道约束后也普遍存在. 对于 #48618 目标, 其实际轨道偏心率约在 10^{-4} 的量级.

这一情况和对圆轨道约束加入 N 倍权重有关. 如果想改变这一结果, 可以尝试将 (12) 式 $H' = 0$ 和 $H'' = 0$ 两个等式约束改为形如 $H' < 10^{-2}$ 和 $H'' < 10^{-2}$ 的不等式约束, 放宽约束允许的偏心率范围. 但我们认为这一修改并无必要, 原因有二: 一是这一初轨结果与实际轨道的偏差已经不大, 对于后续目标关联、编目定轨或引

表 2 有无圆轨道约束时, 同步轨道目标的初轨结果

Table 2 Preliminary orbit of a GEO object, with and without circular-orbit constraint

圆轨道约束	无	有
迭代次数	26	8
RMS (rad)	4.1×10^{-5}	3.7×10^{-5}
a (km)	25404.341	42105.840
e	0.398570	0.000001
i ($^\circ$)	8.319977	7.924706
Ω ($^\circ$)	326.959070	328.450460
$\omega + M$ ($^\circ$)	272.189149	275.462799

图 5 (网络版彩图)同步轨道目标定初轨算例中, 加入圆轨道约束后每次迭代的位置变化(a)和观测量残差RMS (b)

Figure 5 (Color online) For preliminary orbit determination of GEO object, position differences (a) and observation residual RMS (b) between iterations when circular-orbit constraint is applied.

图 6 (网络版彩图)同步目标定初轨算例中, 加入圆轨道约束后迭代收敛时的观测量残差

Figure 6 (Color online) For preliminary orbit determination of LEO object, observation residuals of the final iteration when circular-orbit constraint is applied.

导观测均可适用. 以空间碎片监测为例, 目前大多数望远镜视场都在 1° 以上, 10^{-3} – 10^{-4} 偏心率误差造成的观测引导偏差对后续跟踪观测的影响很小. 二是这里问题的本质是短弧观测量的长度和精度欠佳. 算例表明, 在有无圆轨道等式约束的情况下, 控制迭代的状态

量、改正量以及描述观测量符合程度的残差RMS没有本质的差别, 都可以符合得很好. 即使改为不等式约束, 也不一定能保证约束到更合理的偏心率数值.

基于此, 下文算例使用的圆轨道约束保留2.3节中的形式和权重, 这既避免了反复调整权重带来的不确定性, 实际部署中的可操作性和适用性也更好, 对近圆轨道也不会有本质的影响.

3.3 其他实测数据算例

本节通过更多的算例来检验圆轨道约束对定初轨结果的影响, 包括GEO目标、中轨GPS以及观测数目在5–8个的短弧段GEO目标. 广义Laplace方法的条件方程全部使用微分改正算法解算.

3.3.1 更多同步轨道算例

表3中列出了测试的4个同步轨道目标以及实际观测数据弧长、数量. 观测数据均为赤道测角资料, 在弧段内不均匀分布, 间隔从数秒至数分钟不等.

在没有圆轨道约束的情况下, 利用广义Laplace方法得到的初轨结果如表4所示. 其中RMS和前面表格相同, 表示观测量残差RMS; 由于后两个目标是小倾角轨道, 因此位置幅角使用经度角 $\Omega + \omega + M$ 表示.

不难发现当观测量残差RMS保持在 10^{-4} – 10^{-5} 的合理范围时, 所有目标解算出的初轨都不是同步轨道高度的近圆轨道, 需要额外的约束. 在加入前述的(12)式圆轨道约束后, 重新使用相同的方法定上述四个目标的初轨, 结果如表5所示.

这一结果显然比表4中未加入圆轨道约束的结果更加合理. 无论是用于后续关联、编目定轨或引导跟踪而言, 都是更合适的初值.

表 3 用于定初轨测试的同步轨道目标及实测数据弧长和组数

Table 3 GEO objects and their observation lengths and numbers, for preliminary orbit determination tests

目标编号	观测弧长 (min)	观测组数
23877	24.7	143
30323	26.2	210
37234	19.4	149
37804	19.6	156

表 4 同步轨道目标在不加入圆轨道约束时的定初轨结果

Table 4 Preliminary orbit determination for GEO objects, without circular-orbit constraint

目标编号	迭代次数	RMS (rad)	a (km)	e	i ($^{\circ}$)	$\Omega+\omega+M$ ($^{\circ}$)
23877	26	1.8×10^{-4}	18491.64	0.636076	7.853716	263.148535
30323	54	3.9×10^{-4}	14278.986	0.781897	4.859127	278.197746
37234	16	2.0×10^{-5}	32471.348	0.20409	1.795619	271.311822
37804	16	2.0×10^{-5}	33275.57	0.184265	0.210148	274.581802

表 5 同步轨道目标在加入圆轨道约束时的定初轨结果

Table 5 Preliminary orbit determination for GEO objects, with circular-orbit constraint

目标编号	迭代次数	RMS (rad)	a (km)	e	i ($^{\circ}$)	$\Omega+\omega+M$ ($^{\circ}$)
23877	8	1.6×10^{-4}	42404.348	0.000031	9.189957	264.701323
30323	8	3.4×10^{-4}	42185.617	0.000126	5.626579	277.748453
37234	8	1.9×10^{-5}	42184.747	0	1.816921	270.483591
37804	8	1.9×10^{-5}	42170.286	0	0.05561	273.880936

3.3.2 GPS算例

本小节选择两段GPS卫星的实测数据, 使用上述微分改正加圆轨道约束解算初轨. 这两条弧段对应的目标分别为编号32384和41328的GPS卫星, 观测数据的分布如表6所示.

使用常规的广义Laplace方法, 这两条弧段都无法得到合理的椭圆轨道. 下面给出使用微分改正解算条件方程的结果, 表7和8分别列出不加入圆轨道约束和加入圆轨道约束的初轨结果.

不难发现, 使用微分改正后, 在不加入圆轨道约束

表 6 GPS目标的观测数据分布

Table 6 Observation distribution of GPS objects

目标编号	观测组数	弧长 (min)
32384	9	5.08
41328	80	7.28

的情况下, 解算条件方程得到的初轨对应大偏心率轨道, 显然是不合理的. 在加入圆轨道约束后, 轨道偏心率得到了有效约束, 结果得到了与GPS相符的中地球圆轨道.

表 7 GPS目标在不加入圆轨道约束时的定初轨结果

Table 7 Preliminary orbit determination for GPS objects, without circular-orbit constraint

目标编号	迭代次数	RMS (rad)	a (km)	e	i ($^{\circ}$)	$\Omega+\omega+M$ ($^{\circ}$)
32384	100 (上限)	1.6×10^{-4}	17742.543	0.791717	53.040281	171.946521
41328	11	3.0×10^{-6}	17402.146	0.337761	54.334217	164.997863

表 8 GPS目标在加入圆轨道约束时的定初轨结果

Table 8 Preliminary orbit determination for GPS objects, with circular-orbit constraint

目标编号	迭代次数	RMS (rad)	a (km)	e	i ($^{\circ}$)	$\Omega+\omega+M$ ($^{\circ}$)
32384	9	1.1×10^{-4}	26581.159	0.000002	56.350903	56.324007
41328	6	3.0×10^{-6}	26658.112	0	54.88046	159.873534

3.3.3 观测数据较少时的同步轨道算例

和上述仿真和实际观测数据相比, 在空间碎片监测等场景中, 会出现观测弧段更短、观测量更少的情况. 这里的“观测数据较少”可根据实际场景和初轨计算结果进行评估, 具体设定为观测组数和观测频率小于一定的阈值, 比如观测组数 $N < 10$ 且观测频率小于1组/min. 这时对同步轨道目标而言, 定初轨的观测几何显然更加不利. 无论是简单迭代还是微分改正, 初轨结果都会偏离实际同步轨道. 和前面不同的是, 这时如果直接加入圆轨道约束, 由于观测数据较少, 迭代过程会受到圆轨道约束的主导, 出现错误的圆轨道结果.

下面的算例针对编号为11648, 39612和40269三个GEO目标. 图7展示了三个目标的观测量分布.

针对这三个目标少量的数据, 表9–11列出了这三个目标在几种定初轨策略下得到的初轨结果.

这三组数据的共同特征是数据弧段不长, 数据量很少. 数据间隔在1 min以上甚至更久. 在这种情况下, 无圆轨道约束时广义Laplace方法的初轨结果和之前类似, 能够很好地拟合观测量, 但可能歪曲轨道面内的根数, 特别是 a 和 e . 但加入圆轨道约束后, 结果被扭曲得格外严重. 除了 e 保留了近圆轨道特征外, 轨道半长径 a , 甚至连轨道倾角 i 都明显不符合GEO.

前文2.3节讨论了出现这一结果的原因. 当观测量约束不足时, 初轨结果会受到圆轨道约束的主导, 可能出现完全偏离实际轨道的结果. 初轨偏心率符合近圆特征, 但观测量残差RMS明显偏大, 就说明了这一问题.

图 7 (网络版彩图) 观测数据在弧段中的分布. 横轴表示距离该目标观测弧段中观测数据历元相对首个观测历元的间隔

Figure 7 (Color online) Distribution of the few observations. X axis represents the interval of the observation epoch with respect to its first observation epoch.

下面通过采用2.3节中的两步迭代来解决这一问题. 初始迭代时并不加入圆轨道约束, 收敛后再加入圆轨道约束继续迭代至收敛. 这么做的目的是希望通过第一轮迭代得到符合观测量、相对合理(至少轨道面指向是合理的)的初值, 然后再通过其他约束改正偏心率.

通过这一调整, 这三条轨道的初轨结果如表12所示.

不难发现, 调整后的圆轨道约束策略对定初轨结果有明显的改善. 相比表9–11, 延迟应用圆轨道约束后, 再通过额外的3–4次迭代, 在符合观测数据的同时有效地修正了轨道偏心率 and 半长径. 此外, 即使在这三个观测量很少的算例中, 在第二步迭代时圆轨道约束依然采用了和前面一致的 N 倍权重. 结果表明这一做法是可靠的.

表 9 目标11648的定初轨结果

Table 9 Preliminary orbit determination for object 11648, with and without circular-orbit constraint

定初轨策略	迭代次数	RMS (rad)	a (km)	e	i (°)	$\Omega + \omega + M$ (°)
无圆轨道约束	14	8.0×10^{-6}	24136.487	0.441664	12.375424	290.982234
直接加入圆轨道约束	12	7.5×10^{-2}	5911.334	0.000614	138.216915	200.282718

表 10 目标39612的定初轨结果

Table 10 Preliminary orbit determination for object 39612, with and without circular-orbit constraint

定初轨策略	迭代次数	RMS (rad)	a (km)	e	i (°)	$\Omega + \omega + M$ (°)
无圆轨道约束	41	4.0×10^{-6}	43748.944	0.027382	1.260542	242.443265
直接加入圆轨道约束	12	4.0×10^{-2}	4533.016	0.002396	60.983306	297.032658

表 11 目标40269的定初轨结果

Table 11 Preliminary orbit determination for object 40269, with and without circular-orbit constraint

定初轨策略	无圆轨道约束	直接加入圆轨道约束
迭代次数	10	14
RMS (rad)	2.0×10^{-6}	5.2×10^{-2}
a (km)	36599.212	5774.330
e	0.106486	0.000536
i (°)	2.193541	45.280355
$\Omega+\omega+M$ (°)	199.441927	261.216496

本节中圆轨道约束的应用出现了和之前都不同的变化, 但这一变化并不会影响其在实际操作中的适用性. 从原理上来说, 这一节的问题是观测量过少, 导致在和圆轨道约束共同作用时占“弱势”, 后者占据了主导. 在实践中, 这一情况可以从观测量残差RMS直接判断出来: 此时的观测量残差远远大于无圆轨道约束的结果, 这表明观测量的作用没有完全发挥出来.

这一问题影响的是显然观测量很少的场景, 比如观测组数 $N < 10$ 且观测频率小于1组/min. 此时采用下面试探性的策略来应对(图8):

(1) 同时尝试无圆轨道约束和直接使用圆轨道约束的广义Laplace方法定初轨;

(2) 比较两者的观测量残差RMS, 如果加入圆轨道约束对应的RMS明显更大(如大一个量级), 则采用两步迭代重新定初轨.

上述策略虽然多进行了1–2次定初轨计算, 但从本文算例的情况来看, 每次定初轨计算耗时不超过1 s, 这一时间代价是完全可以接受的.

这个策略还可以用来解决2.3节中提出的问题——搜索模式下如何防止对真实的大偏心率轨道目标误用圆轨道约束. 由于圆轨道约束的权重高于观测量约束, 如果两者矛盾, 势必导致最小二乘的初轨结果偏向圆轨道, 进而导致观测量残差RMS偏大. 不难看出

表 12 调整圆轨道约束应用策略后的定初轨结果

Table 12 Preliminary orbit determination results, with modified strategy of circular-orbit constraint

目标编号	迭代次数	RMS (rad)	a (km)	e	i (°)	$\Omega+\omega+M$ (°)
11648	18	9.0×10^{-6}	42333.004	0	12.464895	280.380612
39612	44	4.0×10^{-6}	42174.781	0	1.216113	242.210887
40269	13	2.0×10^{-6}	42049.478	0	2.050688	198.36815

图 8 观测量很少时(观测组数和观测频率小于设定阈值)的定初轨流程

Figure 8 IOD process with few measurements (measurement numbers and frequency below threshold).

出, 这一矛盾是本质的, 即使使用两步迭代也不会改善. 因此通过判断有无圆轨道约束的初轨结果对应的观测量残差RMS, 就可以判断出圆轨道约束是否被误用了.

4 讨论和结论

本文针对航天器短弧定初轨, 特别是空间碎片监测场景下的定初轨问题, 以广义Laplace方法为基础, 提出了使用微分改正解算条件方程以提高收敛效率和稳定性, 同时加入圆轨道约束, 在必要时可以有效消除大偏心率轨道假解的影响, 得到可靠的近圆初轨结果.

这些改进通过仿真数据和大量的实测数据进行了验证. 算例表明相比简单迭代解算条件方程, 使用微分改正可以显著、有效地提高收敛效率和稳定性.

针对中高轨短弧定初轨可能出现的大偏心率假

解, 本文引入的圆轨道约束可以有效地消除这一问题. 由此得到的初轨结果可以作为空间碎片监测的可靠输入. 即使是对于短弧段、数据极少的情况, 适当调整圆轨道约束的策略就可以得到很好的初轨结果.

致谢 刘林教授参与本文讨论并对文中部分专有名词的名称提出了建议, 在此表示感谢.

参考文献

- 1 Fujimoto K, Scheeres D J. Correlation of optical observations of earth-orbiting objects and initial orbit determination. *J Guid Control Dyn*, 2012, 35: 208–221
- 2 Mni A, Tommei G, Farnocchia D, et al. Correlation and orbit determination of space objects based on sparse optical data. *Mon Not R Astron Soc*, 2011, 417: 2094–2103, arXiv: [1012.5232](https://arxiv.org/abs/1012.5232)
- 3 Liu L, Tang J S. *Satellite orbit theory and Application* (in Chinese). Beijing: Electronic Industry Press, 2015 [刘林, 汤靖师. 卫星轨道理论与应用. 北京: 电子工业出版社, 2015]
- 4 Wu L D. *Satellite and Space Debris Orbit and Detection* (in Chinese). Beijing: China Science and Technology Press, 2011 [吴连大. 人造卫星与空间碎片的轨道和探测. 北京: 中国科学技术出版社, 2011]
- 5 Jia P Z, Wu L D. On the optimal accuracy and double solutions of initial orbit determination (in Chinese). *Acta Astron Sin*, 1998, 39: 337–343 [贾沛璋, 吴连大. 论初轨计算的最佳精度及二重解. 天文学报, 1998, 39: 337–343]
- 6 Jia P Z, Wu L D. An iterative algorithm of the initial orbit determination with a priori value of the element e or a (in Chinese). *Pub Purple Mountain Observ*, 1999, 18: 18–25 [贾沛璋, 吴连大. 已知 e 或 a 的先验值的初轨迭代算法. 紫金山天文台台刊, 1999, 18: 18–25]
- 7 Morton B G, Taff L G. A new method of initial orbit determination. *Celest Mech*, 1986, 39: 181–190
- 8 Milani A, Gronchi G F, Vitturi M D, et al. Orbit determination with very short arcs. I admissible regions. *Celest Mech Dyn*, 2004, 90: 59–87
- 9 Milani A, Gronchi G, Knezevic Z, et al. Orbit determination with very short arcs: II. Identifications. *Icarus*, 2005, 179: 350–374
- 10 Liu L, Hu S J, Cao J F, et al. *Theory and Application of Spacecraft Orbit Determination* (in Chinese). Beijing: Electronic Industry Press, 2015 [刘林, 胡松杰, 曹建峰, 等. 航天器定轨理论与应用. 北京: 电子工业出版社, 2015]
- 11 Battin R H. *An Introduction to the Mathematics and Methods of Astrodynamics*. Revised Edition. Reston: American Institute of Aeronautics and Astronautics Inc., 2001. 110–130
- 12 Li G Y. *Fundamentals of Astrometry and Astromechanics* (in Chinese). Beijing: Science Press, 2015 [李广宇. 天体测量和天体力学基础. 北京: 科学出版社, 2015]
- 13 Suli E, Mayers D F. *An Introduction to Numerical Analysis*. Cambridge: Cambridge University Press, 2003. 1–24

Initial orbit determination using the generalized Laplacian method with differential correction and circular-orbit constraint

TANG JingShi^{1,2,3*} & CHENG HaoWen^{4,5}

¹ School of Astronomy and Space Science, Nanjing University, Nanjing 210023, China;

² Key Laboratory of Astronomy and Astrophysics, Ministry of Education, Nanjing 210023, China;

³ Institute of Space Environment and Astrodynamics, Nanjing University, Nanjing 210023, China;

⁴ National Astronomical Observatories, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100012, China;

⁵ School of Astronomy and Space Science, University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100012, China

Initial orbit determination (IOD) for spacecraft is crucial in various scenarios, including telemetry, tracking, and space debris surveillance. The generalized Laplacian method, based on the classic Laplacian method, supports various perturbations and measurement types. It is simple to comprehend, implement, and convenient to use and has been proven effective in practical applications. However, the current implementation of the generalized Laplacian method can fail when dealing with certain medium earth orbit (MEO) or geosynchronous orbit (GEO) objects. IOD solutions suffer from reduced observation geometry due to the short tracking length of MEO and GEO. The measurement error can cause in-plane elements in IOD solutions, such as the semi-major axis and eccentricity, to be significantly biased even if IOD converges and the measurement residual RMS (root mean square) appears small. In this paper, differential correction (Newton-Raphson iteration) is used to improve the convergence of the generalized Laplacian method. We show that using the first-order derivative (Jacobian matrix) reduces the number of iterations significantly. It also helps in the convergence of iteration procedures when simple iteration techniques fail to solve the condition equation iteratively. Tracking data can be too short or sparse in some cases to effectively constrain the IOD solution to a reasonable level. An eccentric orbit solution can result from the measurements of a circular-orbit object. To overcome the inappropriate solution induced by insufficient tracking data, we introduce an external circular-orbit constraint in the condition equation when dealing with tracking data whose orbit is known to be circular. This constraint is effective in producing a suitable IOD solution when used with the measurements in the generalized Laplacian method. Our results indicate that, with a slight adjustment, the circular-orbit constraint can perform effectively in the generalized Laplacian method even when the tracking data are extremely sparse.

initial orbit determination, generalized Laplacian method, geosynchronous orbit, space debris surveillance

PACS: 95.75.Qr, 95.10.Ce, 95.10.Eg, 95.40.+s, 91.10.Sp

doi: [10.1360/SSPMA-2021-0224](https://doi.org/10.1360/SSPMA-2021-0224)