中国科学: 数学 2022 年 第 52 卷 第 9 期: 997 ~ 1014
SCIENTIA SINICA Mathematica
《中国科学》杂志社
SCIENCE CHINA PRESS

论 文

BiHom-Lie 共形代数的上同调与形变

郭双建[1*], 张晓辉[2], 王圣祥[3]

1. 贵州财经大学数学与统计学院, 贵阳 550025;
2. 曲阜师范大学数学科学学院, 曲阜 273165;
3. 滁州学院金融与数学学院, 滁州 239000

E-mail: shuangjianguo@126.com, zxhui-000@126.com, wangsx-math@163.com

收稿日期: 2020-09-11; 接受日期: 2021-08-27; 网络出版日期: 2021-11-12; * 通信作者
国家自然科学基金 (批准号: 12161013, 11761017 和 11801304)、贵州省科技厅基金 (批准号: 黔科合基础 [2020]1Y005) 和安徽省自然科学基金 (批准号: 1908085MA03) 资助项目

摘要 本文首先引入 BiHom-Lie 共形代数的概念并研究它的上同调理论. 随后, 讨论正则 BiHom-Lie 共形代数的形变理论并给出一些具体应用. 最后, 引入 BiHom-Lie 共形代数的导子并研究它的性质.

关键词 BiHom-Lie 共形代数 上同调 形变 Nijenhuis 算子 导子

MSC (2020) 主题分类 17A30, 17B45, 17D25, 17B81

1 引言

Kac[1] 引入了 Lie 共形代数, 并对共形场理论中手征性场 (chiral fields) 的算子积展开的奇异部分给出了一个公理化的描述. 它是研究顶点代数的一个有用工具, 在 Lie 代数理论中有许多应用. 此外, Lie 共形代数与非线性演化方程理论中的 Hamilton 形式有着密切的联系. 有限 Lie 共形代数在结构理论[2]、表示理论[3] 和上同调理论[4] 等方面得到了广泛的研究. 此外, Liberati[5] 引入了 Lie 共形双代数结构, 包括共形经典 Yang-Baxter 方程、共形 Manin 三元组和共形 Drinfeld 偶. 正是这些非平凡的结论使得对于 Lie 共形代数理论的研究更有理论价值和应用前景. 近年来, Hong 和 Bai[6]、Hong 和 Wu[7]、Wu 和 Yuan[8]、Fan 等[9] 和 Su 等[10] 系统地研究了 Lie 共形代数的共形导子、O 算子、半单性、扩张与分类等内容.

代数形变理论最早由 Gemstenhaber 提出, 他构造与分析了结合代数与 Lie 代数的形变的单参数族. 后来, 这种形变方法特别是保运算的离散形变方法被应用到各种量子现象的模型中, 用来分析某些复杂的系统和过程, 而这些被离散形变后的代数结构具有更好的性质, 从而使得此系统和过程更有研究价值. 这种形变的例子最初与 Witt 代数和 Virasoro 代数有关 (参见文献 [11]). 扭导子离散形

英文引用格式: Guo S J, Zhang X H, Wang S X. Cohomology and deformations of BiHom-Lie conformal algebras (in Chinese). Sci Sin Math, 2022, 52: 997–1014, doi: 10.1360/SSM-2020-0279

变作用在 Lie 代数的向量空间上就产生了 Hom-Lie 代数 [12], 其中 Jacobi 等式被扭曲为 Hom-Jacobi 等式:

$$[\alpha(x),[y,z]]+[\alpha(y),[z,x]]+[\alpha(z),[x,y]]=0.$$

Yuan [13] 引入了 Hom-Lie 共形代数的概念, 研究了它的性质, 并验证了一类 Hom-Lie 共形代数等价于 Hom-Gel'fand-Dorfman 双代数. 随后, Zhao 等 [14] 发展了 Hom-Lie 共形代数的上同调理论, 讨论了正则 Hom-Lie 共形代数的形变, 引入了 Hom-Lie 共形代数的导子并研究了它的一些性质. 最近, Guo 等 [15] 引入了 Hom- 左对称共形双代数的概念, 给出了一些非平凡的例子, 验证了 Hom- 左对称共形双代数等价于 Hom-parakähler Lie 共形双代数.

BiHom- 代数是一种其定义的结构的恒等式被两个同态 α 和 β 扭曲的代数. 这类代数由一种范畴方法引入, 它是 Hom- 代数的推广. 自引入以来, 许多学者对 BiHom- 代数的研究一直很感兴趣, 主要是因为它们在数学物理中的应用. Graziani 等 [16] 给出了 BiHom- 代数的基础概念、动机和结果. 经典的 BiHom- 代数结构包括 BiHom- 结合代数和 BiHom-Lie 代数等. 由于 Lie 共形代数与无限维 Lie 代数是紧密相关的, 因此 BiHom-Lie 共形代数也与无限维 BiHom-Lie 代数紧密相关, 这是本文研究的动机之一. 结合 Hom-Lie 共形代数与 BiHom-Lie 代数的最新研究结果, 本文引入 BiHom-Lie 共形代数的概念并研究它的上同调理论, 讨论正则 BiHom-Lie 共形代数的形变理论并得到形变理论的一些应用. 最后, 介绍 BiHom-Lie 共形代数的导子并研究它的性质.

2 预备知识

本文假设 $\mathbb{C}$ 为复数域, 所有代数系统均在 $\mathbb{C}$ 上, $\mathbb{Z}$ 表示整数集, $\mathbb{Z}_+$ 表示非负整数集. 下面简要介绍本文中涉及的一些概念和符号, 更多有关 Hom-Lie 共形代数和 BiHom- 代数中的概念与结果参见文献 [13,16].

定义 2.1 Hom-Lie 共形代数是一个三元组 $(R,[\cdot_\lambda\cdot],\alpha)$, 其中 R 是 $\mathbb{C}[\partial]$- 模, α 是 R 上的线性自同态并满足 $\alpha\partial=\partial\alpha$, $[\cdot_\lambda\cdot]:R\otimes R\rightarrow R[\lambda]=\mathbb{C}[\lambda]\otimes R$ 是 $\mathbb{C}$- 线性映射, 满足: 对任意的 $a,b,c\in R$, 有

$$\begin{aligned}&[\partial a_\lambda b]=-\lambda[a_\lambda b],\quad [a_\lambda \partial b]=(\partial+\lambda)[a_\lambda b],\\&[a_\lambda b]=-[b_{-\lambda-\partial}a],\\&[\alpha(a)_\lambda[b_\mu c]]=[[a_\lambda b]_{\lambda+\mu}\alpha(c)]+[\alpha(b)_\mu[a_\lambda c]].\end{aligned}$$

为了书写方便, 用 $\mathcal{A}$ 表示不定式 ∂ 中的多项式环 $\mathbb{C}[\partial]$.

定义 2.2 $\mathcal{A}$- 模 V 与 W 之间的共形线性映射是一个线性映射 $\phi:V\rightarrow\mathcal{A}[\lambda]\otimes_{\mathcal{A}}W$, 满足

$$\phi(\partial v)=(\partial+\lambda)\phi(v).$$

$\mathrm{Chom}(V,W)$ 表示所有共形线性映射 V 到 W 的集合, 使得 $\mathrm{Chom}(V,W)$ 成为 $\mathcal{A}$- 模, 只需

$$(\partial\phi)_\lambda v=-\lambda\phi_\lambda v.$$

本文用 $\mathrm{Cend}(V)$ 来代替 $\mathrm{Chom}(V,V)$.

定义 2.3 BiHom-Lie 代数是一个四元组 $(L,[\cdot,\cdot],\alpha,\beta)$, 其中 L 是线性空间, $\alpha,\beta:L\to L$ 和 $[\cdot,\cdot]:L\otimes L\to L$ 是线性映射, 满足

$$\begin{aligned}&\alpha\circ\beta=\beta\circ\alpha,\\&\alpha([a,b])=[\alpha(a),\alpha(b)],\quad \beta([a,b])=[\beta(a),\beta(b)],\\&[\beta(a),\alpha(a')]=-[\beta(a'),\alpha(a)],\\&[\beta^2(a),[\beta(a'),\alpha(a'')]]+[\beta^2(a'),[\beta(a''),\alpha(a)]]+[\beta^2(a''),[\beta(a),\alpha(a')]]=0,\end{aligned}$$

其中 $a,a',a''\in L$.

如果 α 和 β 为代数同构, 则称 $(L,[\cdot,\cdot],\alpha,\beta)$ 为正则的.

3 BiHom-Lie 共形代数的上同调

定义 3.1 BiHom-Lie 共形代数是一个四元组 $(R,[\cdot_\lambda\cdot],\alpha,\beta)$, 其中 R 是 $\mathbb{C}[\partial]$- 模, α 和 β 是 R 上交换的线性自同态并满足 $\alpha\partial=\partial\alpha$, $\beta\partial=\partial\beta$, $\alpha([a_\lambda b])=[\alpha(a)_\lambda\alpha(b)]$, $\beta([a_\lambda b])=[\beta(a)_\lambda\beta(b)]$, $[\cdot_\lambda\cdot]:R\otimes R\to R[\lambda]=\mathbb{C}[\lambda]\otimes R$ 是 $\mathbb{C}$- 线性映射, 满足: 对任意的 $a,b,c\in R$, 有

$$[\partial a_\lambda b]=-\lambda[a_\lambda b],\quad [a_\lambda\partial b]=(\partial+\lambda)[a_\lambda b],\tag{3.1}$$

$$[\beta(a)_\lambda\alpha(b)]=-[\beta(b)_{-\lambda-\partial}\alpha(a)],\tag{3.2}$$

$$[\beta^2(a)_\lambda[\beta(b)_\mu\alpha(c)]]+[\beta^2(b)_\mu[\beta(c)_{-\lambda-\partial}\alpha(a)]]+[\beta^2(c)_{-\lambda-\mu-\partial}[\beta(a)_\lambda\alpha(b)]]=0.\tag{3.3}$$

如果 α 和 β 为代数同构, 则称 (R,α,β) 为正则的.

若 R 为有限生成的 $\mathbb{C}[\partial]$- 模, 则 BiHom-Lie 共形代数 R 称为有限的, 否则称为无限的.

设 (R,α,β) 为 BiHom-Lie 共形代数, 则有

$$\mathrm{Lie}R:=\frac{R[t,t^{-1}]}{(\partial+\partial_t)R[t,t^{-1}]},\quad a_m:=\overline{at^m}\in\mathrm{Lie}R,\quad a\in R.$$

定义 $[\cdot,\cdot]$ 为

$$[a_m,b_n]:=\sum_{j\in\mathbb{Z}_+}\binom{m}{j}(a_{(j)}b)_{m+n-j},\quad \alpha(a_m):=\overline{\alpha(a)t^m},\quad \beta(a_m):=\overline{\beta(a)t^m}.$$

可以得到 $(\mathrm{Lie}R,[\cdot,\cdot],\alpha,\beta)$ 是一个 BiHom-Lie 代数, 并且由所有的 a_n $(n\geqslant 0)$ 张成的线性空间 $\mathrm{Lie}R^+$ 构成它的一个子代数.

例 3.1 设 R 为 Lie 共形代数, $\alpha,\beta:R\to R$ 为交换的线性自同态并满足

$$\alpha\partial=\partial\alpha,\quad \beta\partial=\partial\beta,\quad \alpha([a_\lambda b])=[\alpha(a)_\lambda\alpha(b)],\quad \beta([a_\lambda b])=[\beta(a)_\lambda\beta(b)].$$

定义 $\mathbb{C}$- 线性映射 $[\cdot_\lambda\cdot]':R\otimes R\to R[\lambda]=\mathbb{C}[\lambda]\otimes R$ 为 $[a_\lambda b]':=[\alpha(a)_\lambda\beta(b)]$, 则 (R,α,β) 为关于 $[\cdot_\lambda\cdot]'$ 成立的 BiHom-Lie 共形代数.

例 3.2 设 $(L,[\cdot,\cdot],\alpha,\beta)$ 为 BiHom-Lie 代数. 令 $\hat{L}=L\otimes\mathbb{C}[t,t^{-1}]$ 并在 $\hat{L}$ 上定义括号积与扭曲映射:

$$[u\otimes t^m,v\otimes t^n]':=[u,v]\otimes t^{m+n},$$

$$\alpha(u\otimes t^m):=\alpha(u)\otimes t^m,\quad \beta(u\otimes t^m):=\beta(u)\otimes t^m,$$

其中 $u,v\in L$, $m,n\in\mathbb{Z}$, 则 $(\hat{L},[\cdot,\cdot]',\alpha,\beta)$ 为一个 BiHom-Lie 代数. 简单计算可得 BiHom-Lie 共形代数 $R=\mathbb{C}[\partial]L$, 其中

$$\begin{aligned}&[u_\lambda v]:=[u,v],\\&\alpha(f(\partial)u):=f(\partial)\alpha(u),\quad \beta(f(\partial)u):=f(\partial)\beta(u).\end{aligned}$$

定义 3.2 BiHom-Lie 共形代数 (R,α,β) 的模是一个三元组 (M,α_M,β_M), 其中 M 为 $\mathbb{C}[\partial]$- 模, $\alpha_M,\beta_M:M\to M$ 为线性自同态. $\mathbb{C}$- 线性映射 $\cdot_\lambda\cdot:R\otimes M\to M[\lambda]$, $a\otimes v\mapsto a_\lambda v$ 满足: 对任意的 $a,b\in R$, $v\in M$, 有

$$\begin{aligned}&\alpha_M\circ\beta_M=\beta_M\circ\alpha_M,\\&\alpha_M(a\cdot m)=\alpha(a)\cdot\alpha_M(m),\\&\beta_M(a\cdot m)=\beta(a)\cdot\beta_M(m),\\&\alpha\beta(a)_\lambda(b_\mu v)-\beta(b)_\mu(\alpha(a)_\lambda v)=[\beta(a)_\lambda b]_{\lambda+\mu}\beta_M(v),\\&(\partial a)_\lambda v=-\lambda(a_\lambda v),\quad a_\lambda(\partial v)=(\partial+\lambda)a_\lambda v,\\&\beta_M\circ\partial=\partial\circ\beta_M,\quad \alpha_M\circ\partial=\partial\circ\alpha_M,\\&\alpha_M(a_\lambda v)=\alpha(a)_\lambda(\alpha_M(v)),\quad \beta_M(a_\lambda v)=\beta(a)_\lambda(\beta_M(v)).\end{aligned}$$

例 3.3 设 (R,α,β) 为 BiHom-Lie 共形代数, 则 (R,α,β) 为 R- 模, 即模作用为 $a_\lambda b:=[a_\lambda b]$, 其中 $a,b\in R$.

命题 3.1 设 (R,α,β) 为正则 BiHom-Lie 共形代数, (M,α_M,β_M) 为 R- 模. 假设 α 和 β_M 是双射. 定义 $\mathbb{C}$- 线性映射 $[\cdot_\lambda\cdot]$: 对任意的 $a,b\in R$, $u,v\in M$, 有

$$[(a+u)_\lambda(b+v)]_M:=[a_\lambda b]+a_\lambda v-\alpha^{-1}\beta(b)_{-\partial-\lambda}\alpha_M\beta_M^{-1}(u);$$

定义扭曲映射 $\alpha+\alpha_M$, $\beta+\beta_M:R\oplus M\to R\oplus M$ 为

$$(\alpha+\alpha_M)(a+u):=\alpha(a)+\alpha_M(u),\quad (\beta+\beta_M)(a+u):=\beta(a)+\beta_M(u),$$

则 $(R\oplus M,\alpha+\alpha_M,\beta+\beta_M)$ 为一个 BiHom-Lie 共形代数.

证明 已知等式

$$\partial(a+u)=\partial(a)+\partial(u),\quad \forall\, a\in R,\quad u\in M.$$

不难验证, 对任意的 $a,b\in R$ 和 $u,v\in M$, 有

$$\begin{aligned}&(\alpha+\alpha_M)\circ\partial=\partial\circ(\alpha+\alpha_M),\quad (\beta+\beta_M)\circ\partial=\partial\circ(\beta+\beta_M),\\&(\alpha+\alpha_M)([(a+u)_\lambda(b+v)]_M)=[((\alpha+\alpha_M)(a+u))_\lambda(\alpha+\alpha_M)(b+v)]_M,\\&(\beta+\beta_M)([(a+u)_\lambda(b+v)]_M)=[((\beta+\beta_M)(a+u))_\lambda(\beta+\beta_M)(b+v)]_M.\end{aligned}$$

对于 (3.1), 有

$$[\partial(a+u)_\lambda(b+v)]_M=[(\partial a+\partial u)_\lambda(b+v)]_M$$

$$
\begin{aligned}
&= [\partial a_\lambda b] + (\partial a)_\lambda v - \alpha^{-1}\beta(b)_{-\partial-\lambda}\partial\alpha_M\beta_M^{-1}(u)\\
&= -\lambda[a_\lambda b] - \lambda a_\lambda v - (\partial-\lambda-\partial)\alpha^{-1}\beta(b)_{-\partial-\lambda}\alpha_M\beta_M^{-1}(u)\\
&= -\lambda([a_\lambda b] + a_\lambda v - \alpha^{-1}\beta(b)_{-\partial-\lambda}\alpha_M\beta_M^{-1}(u))\\
&= -\lambda[(a+u)_\lambda(b+v)]_M,\\
[(a+u)_\lambda\partial(b+v)]_M &= [(a+u)_\lambda(\partial b+\partial v)]_M\\
&= [a_\lambda\partial b] + a_\lambda\partial v - \partial\alpha^{-1}\beta(b)_{-\partial-\lambda}\alpha_M\beta_M^{-1}(u)\\
&= (\partial+\lambda)[a_\lambda b] + (\partial+\lambda)a_\lambda v - (\partial+\lambda)\alpha^{-1}\beta(b)_{-\partial-\lambda}\alpha_M\beta_M^{-1}(u)\\
&= (\partial+\lambda)([a_\lambda b] + a_\lambda v - \alpha^{-1}\beta(b)_{-\partial-\lambda}\alpha_M\beta_M^{-1}(u))\\
&= (\partial+\lambda)[(a+u)_\lambda(b+v)]_M.
\end{aligned}
$$

对于 (3.2), 有

$$
\begin{aligned}
&[(\beta(b)+\beta_M(v))_{-\partial-\lambda}(\alpha(a)+\alpha_M(u))]_M\\
&\quad= [\beta(b)_{-\partial-\lambda}\alpha(a)] + \beta(b)_{-\partial-\lambda}\alpha_M(u) - \beta(a)_\lambda\alpha_M(v)\\
&\quad= -[\beta(a)_\lambda\alpha(b)] - \beta(a)_\lambda\alpha_M(v) + \beta(b)_{-\partial-\lambda}\alpha_M(u)\\
&\quad= -[(\beta(a)+\beta_M(u))_\lambda(\alpha(b)+\alpha_M(v))]_M.
\end{aligned}
$$

对于 (3.3), 有

$$
\begin{aligned}
&[(\alpha+\alpha_M)(\beta+\beta_M)(a+u)_\lambda[(b+v)_\mu(c+w)]_M]_M\\
&\quad= [(\alpha\beta(a)+\alpha_M\beta_M(u))_\lambda[(b+v)_\mu(c+w)]_M]_M\\
&\quad= [(\alpha\beta(a)+\alpha_M\beta_M(u))_\lambda\big([b_\mu c] + b_\mu w - \alpha^{-1}\beta(c)_{-\partial-\mu}\alpha_M\beta_M^{-1}(v)\big)]_M,\\
&[(\beta+\beta_M)(b+v)_\mu[(\alpha+\alpha_M)(a+u)_\lambda(c+w)]_M]_M\\
&\quad= [\beta(b)_\mu[\alpha(a)_\lambda c]] + \beta(b)_\mu(\alpha(a)_\lambda w) - \beta(b)_\mu\big(\alpha^{-1}\beta(c)_{-\partial-\mu}\alpha_M^2\beta_M^{-1}(u)\big)\\
&\qquad - \alpha^{-1}\beta([\alpha(a)_\lambda c])_{-\partial-\mu}\alpha_M(v),\\
&[[(\beta+\beta_M)(a+u)_\lambda(b+v)]_{M\lambda+\mu}(\beta+\beta_M)(c+w)]_M\\
&\quad= [[\beta(a)_\lambda b]_{\lambda+\mu}\beta(c)] + [\beta(a)_\lambda b]_{\lambda+\mu}\beta_M(w) - \alpha^{-1}\beta^2(c)_{-\partial-\lambda-\mu}\alpha_M\beta_M^{-1}(\beta(a)_\lambda v)\\
&\qquad - \alpha^{-1}\beta^2(c)_{-\partial-\lambda-\mu}\alpha_M\beta_M^{-1}(\alpha^{-1}\beta(b)_{-\partial-\lambda}\alpha_M(u)).
\end{aligned}
$$

由于 (M,α_M,β_M) 为 R- 模, 因此有

$$
\alpha\beta(a)_\lambda(b_\mu v) - \beta(b)_\mu(\alpha(a)_\lambda v) = [\beta(a)_\lambda b]_{\lambda+\mu}\beta_M(v).
$$

由此可得

$$
\begin{aligned}
&[(\alpha+\alpha_M)(\beta+\beta_M)(a+u)_\lambda[(b+v)_\mu(c+w)]_M]_M\\
&\quad= [(\beta+\beta_M)(b+v)_\mu[(\alpha+\alpha_M)(a+u)_\lambda(c+w)]_M]_M\\
&\qquad + [[(\beta+\beta_M)(a+u)_\lambda(b+v)]_{M\lambda+\mu}(\beta+\beta_M)(c+w)]_M.
\end{aligned}
$$

因此, $(R\oplus M,\alpha+\alpha_M,\beta+\beta_M)$ 为 BiHom-Lie 共形代数. □

定义 3.3 正则 BiHom-Lie 共形代数 (R,α,β) 的 n- 上链 $(n\in\mathbb{Z}_+)$ 为系数在模 (M,α_M,β_M) 中的 $\mathbb{C}$- 线性映射:

$$\gamma: R^n\to M[\lambda_1,\dots,\lambda_n],\quad (a_1,\dots,a_n)\mapsto \gamma_{\lambda_1,\dots,\lambda_n}(a_1,\dots,a_n),$$

其中 $M[\lambda_1,\dots,\lambda_n]$ 表示系数在 M 中的多项式空间, 满足

(1) 共形反线性:

$$\gamma_{\lambda_1,\dots,\lambda_n}(a_1,\dots,\partial a_i,\dots,a_n)=-\lambda_i\gamma_{\lambda_1,\dots,\lambda_n}(a_1,\dots,a_i,\dots,a_n);$$

(2) 斜对称性:

$$\gamma(a_1,\dots,\beta(a_{i+1}),\alpha(a_i),\dots,a_n)=-\gamma(a_1,\dots,\beta(a_i),\alpha(a_{i+1}),\dots,a_n);$$

(3) 交换性:

$$\gamma\circ\alpha=\alpha_M\circ\gamma,\quad \gamma\circ\beta=\beta_M\circ\gamma.$$

设 $R^{\otimes 0}=\mathbb{C}\in M$ 为 0- 上链. 定义上链 γ 的微分 d 为

$$\begin{aligned}&(d\gamma)_{\lambda_1,\dots,\lambda_{n+1}}(a_1,\dots,a_{n+1})\\&\quad=\sum_{i=1}^{n+1}(-1)^{i+1}\alpha\beta^{n-1}(a_i)_{\lambda_i}\gamma_{\lambda_1,\dots,\hat{\lambda}_i,\dots,\lambda_{n+1}}(a_1,\dots,\hat{a}_i,\dots,a_{n+1})\\&\qquad+\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n+1}(-1)^{i+j}\gamma_{\lambda_i+\lambda_j,\lambda_1,\dots,\hat{\lambda}_i,\dots,\hat{\lambda}_j,\dots,\lambda_{n+1}}([\alpha^{-1}\beta(a_i)_{\lambda_i}a_j],\beta(a_1),\dots,\hat{a}_i,\dots,\hat{a}_j,\dots,\beta(a_{n+1})),\end{aligned}$$

其中 γ 在多项式 λ_i 是线性的. 特别地, 若 γ 是 0- 上链, 则 $(d\gamma)_\lambda a=a_\lambda\gamma$.

命题 3.2 $d\gamma$ 是上链并且 $d^2=0$.

证明 设 γ 为 n- 上链, 不难验证 d 满足共形反线性、斜对称性和交换性, 即 d 为 $(n+1)$- 上链, 只需验证 $d^2=0$. 事实上, 对任意的 $a_1,\dots,a_{n+2}\in R$, 有

$$\begin{aligned}&(d^2\gamma)_{\lambda_1,\dots,\lambda_{n+2}}(a_1,\dots,a_{n+2})\\&\quad=\sum_{i=1}^{n+1}(-1)^{i+1}\alpha\beta^{n}(a_i)_{\lambda_i}(d\gamma)_{\lambda_1,\dots,\hat{\lambda}_i,\dots,\lambda_{n+2}}(a_1,\dots,\hat{a}_i,\dots,a_{n+2})\\&\qquad+\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n+1}(-1)^{i+j}(d\gamma)_{\lambda_i+\lambda_j,\lambda_1,\dots,\hat{\lambda}_i,\dots\hat{\lambda}_j,\dots,\lambda_{n+2}}([\alpha^{-1}\beta(a_i)_{\lambda_i}a_j],\beta(a_1),\dots,\hat{a}_i,\dots,\hat{a}_j,\dots,\beta(a_{n+2}))\\&\quad=\sum_{i=1}^{n+2}\sum_{j=1}^{i-1}(-1)^{i+j}\alpha\beta^{n}(a_i)_{\lambda_i}(\alpha\beta^{n-1}(a_j)_{\lambda_j}\gamma_{\lambda_1,\dots,\hat{\lambda}_{j,i},\dots,\lambda_{n+2}}(a_1,\dots,\hat{a}_{j,i},\dots,a_{n+2}))\qquad(3.4\text{a})\\&\qquad+\sum_{i=1}^{n+2}\sum_{j=i+1}^{n+2}(-1)^{i+j+1}\alpha\beta^{n}(a_i)_{\lambda_i}(\alpha\beta^{n-1}(a_j)_{\lambda_j}\gamma_{\lambda_1,\dots,\hat{\lambda}_{i,j},\dots,\lambda_{n+2}}(a_1,\dots,\hat{a}_{i,j},\dots,a_{n+2}))\qquad(3.4\text{b})\\&\qquad+\sum_{i=1}^{n+2}\sum_{1\leqslant j<k<i}^{n+2}(-1)^{i+j+k+1}\alpha\beta^{n}(a_i)_{\lambda_i}\gamma_{\lambda_j+\lambda_k,\lambda_1,\dots,\hat{\lambda}_{j,k,i},\dots,\lambda_{n+2}}\\&\qquad\times([\alpha^{-1}\beta(a_j)_{\lambda_j}a_k],\beta(a_1),\dots,\hat{a}_{j,k,i},\dots,\beta(a_{n+2}))\qquad(3.4\text{c})\\&\qquad+\sum_{i=1}^{n+2}\sum_{1\leqslant j<i<k}^{n+2}(-1)^{i+j+k}\alpha\beta^{n}(a_i)_{\lambda_i}\gamma_{\lambda_j+\lambda_k,\lambda_1,\dots,\hat{\lambda}_{j,i,k},\dots,\lambda_{n+2}}\end{aligned}$$

$$\times([\alpha^{-1}\beta(a_j)_{\lambda_j}a_k],\beta(a_1),\ldots,\hat{a}_{j,i,k},\ldots,\beta(a_{n+2})) \quad (3.4\text{d})$$

$$+\sum_{i=1}^{n+2}\sum_{1\leqslant i<j<k}^{n+2}(-1)^{i+j+k+1}\alpha\beta^n(a_i)_{\lambda_i}\gamma_{\lambda_j+\lambda_k,\lambda_1,\ldots,\hat{\lambda}_{i,j,k},\ldots,\lambda_{n+2}}$$

$$\times([\alpha^{-1}\beta(a_j)_{\lambda_j}a_k],\beta(a_1),\ldots,\hat{a}_{i,j,k},\ldots,\beta(a_{n+2})) \quad (3.4\text{e})$$

$$+\sum_{1\leqslant i<j}^{n+2}\sum_{k=1}^{i-1}(-1)^{i+j+k}\alpha\beta^n(a_k)_{\lambda_k}\gamma_{\lambda_i+\lambda_j,\lambda_1,\ldots,\hat{\lambda}_{k,i,j},\ldots,\lambda_{n+2}}$$

$$\times([\alpha^{-1}\beta(a_i)_{\lambda_i}a_j],\beta(a_1),\ldots,\hat{a}_{k,i,j},\ldots,\beta(a_{n+2})) \quad (3.4\text{f})$$

$$+\sum_{1\leqslant i<j}^{n+2}\sum_{k=i+1}^{j-1}(-1)^{i+j+k+1}\alpha\beta^n(a_k)_{\lambda_k}\gamma_{\lambda_i+\lambda_j,\lambda_1,\ldots,\hat{\lambda}_{i,k,j},\ldots,\lambda_{n+2}}$$

$$\times([\alpha^{-1}\beta(a_i)_{\lambda_j}a_j],\beta(a_1),\ldots,\hat{a}_{i,k,j},\ldots,\beta(a_{n+2})) \quad (3.4\text{g})$$

$$+\sum_{1\leqslant i<j}^{n+2}\sum_{k=j+1}^{n+2}(-1)^{i+j+k}\alpha\beta^n(a_k)_{\lambda_k}\gamma_{\lambda_i+\lambda_j,\lambda_1,\ldots,\hat{\lambda}_{i,j,k},\ldots,\lambda_{n+2}}$$

$$\times([\alpha^{-1}\beta(a_i)_{\lambda_i}a_j],\beta(a_1),\ldots,\hat{a}_{i,j,k},\ldots,\beta(a_{n+2})) \quad (3.4\text{h})$$

$$+\sum_{1\leqslant i<j}^{n+2}(-1)^{i+j}\alpha\beta^{n-1}([\alpha^{-1}\beta(a_i)_{\lambda_i}a_j])_{\lambda_i+\lambda_j}\gamma_{\lambda_1,\ldots,\hat{\lambda}_j,\ldots\hat{\lambda}_i,\ldots,\lambda_{n+2}}(\beta(a_1),\ldots,\hat{a}_j,\ldots,\hat{a}_i,\ldots,\beta(a_{n+2})) \quad (3.4\text{i})$$

$$+\sum_{i,j,k,l\text{互不相同},i<j,k<l}^{n+2}(-1)^{i+j+k+l}\operatorname{sign}\{i,j,k,l\}$$

$$\times\gamma_{\lambda_k+\lambda_l,\lambda_i+\lambda_j,\lambda_1,\ldots,\hat{\lambda}_{i,j,k,l},\ldots,\lambda_{n+2}}(\beta[\alpha^{-1}\beta(a_k)_{\lambda_k}a_l],\beta[\alpha^{-1}\beta(a_i)_{\lambda_i}a_j],\ldots,\hat{a}_{i,j,k,l},\ldots,\beta^2(a_{n+2})) \quad (3.4\text{j})$$

$$+\sum_{i,j,k=1,i<j,k\neq i,j}^{n+2}(-1)^{i+j+k+l}\operatorname{sign}\{i,j,k\}$$

$$\times\gamma_{\lambda_i+\lambda_k+\lambda_j,\lambda_1,\ldots,\hat{\lambda}_{i,j,k},\ldots,\lambda_{n+2}}([[\alpha^{-1}\beta(a_i)_{\lambda_i}a_j]_{\lambda_i+\lambda_j},\beta(\alpha_k)],\beta^2(a_1),\ldots,\hat{a}_{i,j,k},\ldots,\beta^2(a_{n+2})), \quad (3.4\text{k})$$

其中 $\operatorname{sign}\{i_1,\ldots,i_p\}$ 是将指标按递增顺序排列的符号, $\hat{a}_{i,j}$, $\hat{a}_i$, $\hat{a}_j,\ldots$ 表示省略.

显然, (3.4c) + (3.4h) = 0. 类似地, (3.4d) + (3.4g) = (3.4e) + (3.4f) = 0. 由 BiHom-Jacobi 等式可知 (3.4k) = 0. 由斜对称性可知 (3.4j) = 0. 由于 (M,α_M,β_M) 为 R- 模, 计算可得

$$\alpha\beta(a)_\lambda(b_\mu v)-\beta(b)_\mu(\alpha(a)_\lambda v)=[\beta(a)_\lambda b]_{\lambda+\mu}\beta_M(v).$$

因为 $\gamma\circ\alpha=\alpha_M\circ\gamma$, $\gamma\circ\beta=\beta_M\circ\gamma$, 所以有 (3.4a) + (3.4b) + (3.4i) = 0. 因此 $d^2\gamma=0$. □

因此系数在模 M 中 BiHom-Lie 共形代数 R 的上链构成一个复形, 表示为

$$\widetilde{C}^\bullet_{\alpha,\beta}=\widetilde{C}^\bullet_{\alpha,\beta}(R,M)=\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}_+}\widetilde{C}^n_{\alpha,\beta}(R,M),$$

称为 R- 模 (M,α_M,β_M) 的基本复形.

4 BiHom-Lie 共形代数的形变与 Nijenhuis 算子

设 R 为正则 BiHom-Lie 共形代数. 对任意的 $a,b\in R$, 定义 $a_\lambda b=[\alpha^s(a)_\lambda b]$. 设 R_s 为 R 的 α^s 伴随模. 令 $\gamma\in\widetilde{C}^n_{\alpha,\beta}(R,R_s)$. 定义算子 $d_s:\widetilde{C}^n_{\alpha,\beta}(R,R_s)\to\widetilde{C}^{n+1}_{\alpha,\beta}(R,R_s)$:

$$(d_s\gamma)_{\lambda_1,\ldots,\lambda_{n+1}}(a_1,\ldots,a_{n+1})$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^{n+1}(-1)^{i+1}[\alpha^{s+1}\beta^{n-1}(a_i)_{\lambda_i}\gamma_{\lambda_1,\ldots,\hat{\lambda}_i,\ldots,\lambda_{n+1}}(a_1,\ldots,\hat{a}_i,\ldots,a_{n+1})] \\
&\quad + \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n+1}(-1)^{i+j}\gamma_{\lambda_i+\lambda_j,\lambda_1,\ldots,\hat{\lambda}_i,\ldots\hat{\lambda}_j,\ldots,\lambda_{n+1}}([\alpha^{-1}\beta(a_i)_{\lambda_i}a_j],\beta(a_1),\ldots,\hat{a}_i,\ldots,\hat{a}_j,\ldots,\beta(a_{n+1})).
\end{aligned}
$$

显然, 微分 d 可诱导出算子 d_s. 因此 d_s 保留上链的空间并且满足 $d_s^2=0$. 假定 $\widetilde{C}^{\bullet}_{\alpha,\beta}(R,R_s)$ 关于算子 d_s 是结合的.

令 $s=-1$. 设 $\psi\in\widetilde{C}^2(R,R)_{\bar{0}}$ 为与 α 和 β 可交换的双线性算子. 考虑 R 上一簇 t- 参数化的双线性算子,

$$
[a_\lambda b]_t=[a_\lambda b]+t\psi_{\lambda,-\partial-\lambda}(a,b),\quad \forall\, a,b\in R. \tag{4.1}
$$

若 $[\cdot_\lambda\cdot]$ 赋予 $(R,[\cdot_\lambda\cdot],\alpha,\beta)$ 一个 BiHom-Lie 共形代数结构, 则称 ψ 生成 BiHom-Lie 共形代数 R 的一个形变. 容易验证 $[\cdot_\lambda\cdot]$ 满足 (3.1). 由 $[\cdot_\lambda\cdot]$ 的斜对称性可知

$$
\begin{aligned}
&[\beta(a)_\lambda\alpha(b)]_t=[\beta(a)_\lambda\alpha(b)]+t\psi_{\lambda,-\partial-\lambda}(\beta(a),\alpha(b)),\\
&[\beta(b)_{-\partial-\lambda}\alpha(a)]_t=[\beta(b)_{-\partial-\lambda}\alpha(a)]+t\psi_{-\partial-\lambda,\lambda}(\beta(b),\alpha(a)),
\end{aligned}
$$

则 $[\beta(a)_\lambda\alpha(b)]_t=-[\beta(b)_{-\partial-\lambda}\alpha(a)]_t$ 当且仅当

$$
\psi_{\lambda,-\partial-\lambda}(\beta(a),\alpha(b))=-\psi_{-\partial-\lambda,\lambda}(\beta(b),\alpha(a)). \tag{4.2}
$$

若等式 (3.3) 成立, 则

$$
\begin{aligned}
&[\alpha\beta(a)_\lambda[b_\mu c]]+t([\alpha\beta(a)_\lambda\psi_{\mu,-\partial-\mu}(b,c)]+\psi_{\lambda,-\partial-\lambda}(\alpha\beta(a),[b_\mu c]))+t^2\psi_{\lambda,-\partial-\lambda}(\alpha\beta(a),\psi_{\mu,-\partial-\mu}(b,c))\\
&\quad=[\beta(b)_\mu[\alpha(a)_\lambda c]]+t([\beta(b)_\mu(\psi_{\lambda,-\partial-\lambda}(\alpha(a),c))]+\psi_{\mu,-\partial-\mu}(\beta(b),[\alpha(a)_\lambda c]))\\
&\quad\quad+t^2\psi_{\mu,-\partial-\mu}(\beta(b),\psi_{\lambda,-\partial-\lambda}(\alpha(a),c))+[[\beta(a)_\lambda b]_{\lambda+\mu}\beta(c)]\\
&\quad\quad+t([(\psi_{\lambda,-\partial-\lambda}(\beta(a),b))_{\lambda+\mu}\beta(c)]+\psi_{\lambda+\mu,-\partial-\lambda-\mu}([\beta(a)_\lambda b],\beta(c)))\\
&\quad\quad+t^2\psi_{\lambda+\mu,-\partial-\lambda-\mu}(\psi_{\lambda,-\partial-\lambda}(\beta(a),b),\beta(c))
\end{aligned}
$$

当且仅当

$$
\begin{aligned}
&\psi_{\lambda,-\partial-\lambda}(\alpha\beta(a),\psi_{\mu,-\partial-\mu}(b,c))\\
&\quad=\psi_{\mu,-\partial-\mu}(\beta(b),\psi_{\lambda,-\partial-\lambda}(\alpha(a),c))+\psi_{\lambda+\mu,-\partial-\lambda-\mu}(\psi_{\lambda,-\partial-\lambda}(\beta(a),b),\beta(c)),
\end{aligned} \tag{4.3}
$$

$$
\begin{aligned}
&[\alpha\beta(a)_\lambda(\psi_{\mu,-\partial-\mu}(b,c))]+\psi_{\lambda,-\partial-\lambda}(\alpha\beta(a),[b_\mu c])\\
&\quad=[\beta(b)_\mu(\psi_{\lambda,-\partial-\lambda}(\alpha(a),c))]+\psi_{\mu,-\partial-\mu}(\beta(b),[\alpha(a)_\lambda c])\\
&\quad\quad+[(\psi_{\lambda,-\partial-\lambda}(\beta(a),b))_{\lambda+\mu}\beta(c)]+\psi_{\lambda+\mu,-\partial-\lambda-\mu}([\beta(a)_\lambda b],\beta(c)).
\end{aligned} \tag{4.4}
$$

显然, (4.3) 和 (4.4) 意味着 ψ 在 R 上定义了一个 BiHom-Lie 共形代数结构.

若存在线性算子 $f\in\widetilde{C}^1_{\alpha,\beta}(R,R_{-1})$ 满足

$$
T_t([a_\lambda b]_t)=[T_t(a)_\lambda T_t(b)], \tag{4.5}
$$

其中 $a,b\in R$, $T_t=\mathrm{id}+tf$, 则称形变是平凡的.

定义 4.1 对任意的 $a,b\in R$, 如果

$$[f(a)_\lambda f(b)]=f([a_\lambda b]_N) \tag{4.6}$$

成立, 其中 $[\cdot,\cdot]_N$ 定义为

$$[a_\lambda b]_N=[f(a)_\lambda b]+[a_\lambda f(b)]-f([a_\lambda b]), \tag{4.7}$$

则称线性算子 $f\in\widetilde{C}^1_{\alpha,\beta}(R,R_{-1})$ 为 Nijenhuis 算子.

定理 4.1 设 (R,α,β) 为正则 BiHom-Lie 共形代数, $f\in\widetilde{C}^1_{\alpha,\beta}(R,R_{-1})$ 为 Nijenhuis 算子, 则由 (R,α,β) 上的形变可得

$$\psi_{\lambda,-\partial-\lambda}(a,b)=[a_\lambda b]_N, \tag{4.8}$$

其中 $a,b\in R$. 此外, 形变是平凡的.

证明 为了验证 ψ 生成一个形变, 只需验证 (4.2)–(4.4) 成立. 首先验证

$$\psi(\beta(a),\alpha(b))=-\psi(\beta(b),\alpha(a)).$$

事实上, 对任意的 $a,b\in R$, 有

$$\begin{aligned}\psi(\beta(a),\alpha(b))&=[a_\lambda b]_N\\&=[f(\beta(a))_\lambda\alpha(b)]+[\beta(a)_\lambda f(\alpha(b))]-f[\beta(a)_\lambda\alpha(b)]\\&=-([f(\beta(b))_\lambda\alpha(a)]+[\beta(b)_\lambda f(\alpha(a))]-f[\beta(b)_\lambda\alpha(a)])\\&=-[\beta(b),\alpha(a)]_N\\&=-\psi(\beta(b),\alpha(a)).\end{aligned}$$

由等式 (4.5)–(4.7) 可得

$$\begin{aligned}&\psi_{\lambda,-\partial-\lambda}(\alpha\beta(a),\psi_{\mu,-\partial-\mu}(b,c))+\psi_{\mu,-\partial-\mu}(\beta(b),\psi_{-\partial-\lambda,\lambda}(\alpha^{-1}\beta(c),\alpha^2\beta^{-1}(a)))\\&\quad+\psi_{-\partial-\lambda-\mu,\lambda+\mu}(\alpha^{-1}\beta^2(c),\psi_{\lambda,-\partial-\lambda}(\alpha(a),\alpha\beta^{-1}(b)))\\&\quad=[f(\alpha\beta(a))_\lambda[f(b)_\mu c]]+[f(\alpha\beta(a))_\lambda[b_\mu f(c)]]-[f(\alpha\beta(a))_\lambda f([b_\mu c])]\\&\qquad+[\alpha\beta(a)_\lambda[f(b)_\mu f(c)]]-f([\alpha\beta(a)_\lambda[f(b)_\mu c]])-f([\alpha\beta(a)_\lambda[b_\mu f(c)]])\\&\qquad+f([\alpha\beta(a)_\lambda f([b_\mu c])])+[f(\beta(b))_\mu[f(\alpha^{-1}\beta(c))_{-\partial-\lambda}\alpha^2\beta^{-1}(a)]]\\&\qquad+[f(\beta(b))_\mu[\alpha^{-1}\beta(c)_{-\partial-\lambda}f(\alpha^2\beta^{-1}(a))]]-[f(\beta(b))_\mu f([\alpha^{-1}\beta(c)_{-\partial-\lambda}\alpha^2\beta^{-1}(a)])]\\&\qquad+[\beta(b)_\mu[f(\alpha^{-1}\beta(c))_{-\partial-\lambda}f(\alpha^2\beta^{-1}(a))]]-f([\beta(b)_\mu[f(\alpha^{-1}\beta(c))_{-\partial-\lambda}\alpha^2\beta^{-1}(a)]])\\&\qquad-f([\beta(b)_\mu[\alpha^{-1}\beta(c)_{-\partial-\lambda}f(\alpha^2\beta^{-1}(a))]])+[f(\beta(b))_\mu f([\alpha^{-1}\beta(c)_{-\partial-\lambda}\alpha^2\beta^{-1}(a)])]\\&\qquad+[f(\alpha^{-1}\beta^2(c))_{-\partial-\lambda-\mu}[f(\alpha(a))_\lambda\alpha\beta^{-1}(b)]]+[f(\alpha^{-1}\beta^2(c))_{-\partial-\lambda-\mu}[\alpha(a)_\lambda f(\alpha\beta^{-1}(b))]]\\&\qquad-[f(\alpha^{-1}\beta^2(c))_{-\partial-\lambda-\mu}f([\alpha(a)_\lambda\alpha\beta^{-1}(b)])]+[\alpha^{-1}\beta^2(c)_{-\partial-\lambda-\mu}[f(\alpha(a))_\lambda f(\alpha\beta^{-1}(b))]]\\&\qquad-f([\alpha^{-1}\beta^2(c)_{-\partial-\lambda-\mu}[f(\alpha(a))_\lambda\alpha\beta^{-1}(b)]])-f([\alpha^{-1}\beta^2(c)_{-\partial-\lambda-\mu}[\alpha(a)_\lambda f(\alpha\beta^{-1}(b))]])\\&\qquad+f([\alpha^{-1}\beta^2(c)_{-\partial-\lambda-\mu}f([\alpha(a)_\lambda\alpha\beta^{-1}(b)])]).\end{aligned}$$

由于 f 为 Nijenhuis 算子, 于是

$$\begin{aligned}
&-[f(\alpha\beta(a))_\lambda f([b_\mu c])]+f([\alpha\beta(a)_\lambda f([b_\mu c])])\\
&\quad=-f([f(\alpha\beta(a))_\lambda[b_\mu c]])+f^2([\alpha\beta(a)_\lambda[b_\mu c]])\\
&\qquad-[f(\beta(b))_\mu f([\alpha^{-1}\beta(c)_{-\partial-\lambda}\alpha^2\beta^{-1}(a)])]+f([\beta(b)_\mu f([\alpha^{-1}\beta(c)_{-\partial-\lambda}\alpha^2\beta^{-1}(a)])])\\
&\quad=-f([f(\beta(b))_\mu[\alpha^{-1}\beta(c)_{-\partial-\lambda}\alpha^2\beta^{-1}(a)]])+f^2([\beta(b)_\mu[\alpha^{-1}\beta(c)_{-\partial-\lambda}\alpha^2\beta^{-1}(a)]])\\
&\qquad-[f(\alpha^{-1}\beta^2(c))_{-\partial-\lambda-\mu}f([\alpha(a)_\lambda\alpha\beta^{-1}(b)])]+f([\alpha^{-1}\beta^2(c)_{-\partial-\lambda-\mu}f([\alpha(a)_\lambda\alpha\beta^{-1}(b)])])\\
&\quad=-f[f(\alpha^{-1}\beta^2(c))_{-\partial-\lambda-\mu}[\alpha(a)_\lambda\alpha\beta^{-1}(b)]]+f^2([\alpha^{-1}\beta^2(c)_{-\partial-\lambda-\mu}[\alpha(a)_\lambda\alpha\beta^{-1}(b)]]).
\end{aligned}$$

由等式

$$[\alpha\beta(a)_\lambda[b_\mu c]]+[\alpha^{-1}\beta^2(c)_{-\partial-\lambda-\mu}[\alpha(a)_\lambda\alpha\beta^{-1}(b)]]+[\beta(b)_\mu[\alpha^{-1}\beta(c)_{-\partial-\lambda}\alpha^2\beta^{-1}(a)]]=0$$

可得

$$\begin{aligned}
&\psi_{\lambda,-\partial-\lambda}(\alpha\beta(a),\psi_{\mu,-\partial-\mu}(b,c))+\psi_{\mu,-\partial-\mu}(\beta(b),\psi_{-\partial-\lambda,\lambda}(\alpha^{-1}\beta(c),\alpha^2\beta^{-1}(a)))\\
&\quad+\psi_{-\partial-\lambda-\mu,\lambda+\mu}(\alpha^{-1}\beta^2(c),\psi_{\lambda,-\partial-\lambda}(\alpha(a),\alpha\beta^{-1}(b)))\\
&\qquad=0.
\end{aligned}$$

类似可得 (4.4) 成立. 因此 ψ 在正则 BiHom-Lie 共形代数 (R,α,β) 上定义了一个形变.

设 $T_t=\mathrm{id}+tf$. 由 (4.8), 可得

$$\begin{aligned}
T_t([a_\lambda b]_t)&=(\mathrm{id}+tf)([a_\lambda b]+t\psi_{\lambda,-\partial-\lambda}(a,b))\\
&=(\mathrm{id}+tf)([a_\lambda b]+t[a_\lambda b]_N)\\
&=[a_\lambda b]+t([a_\lambda b]_N+f([a_\lambda b]))+t^2f([a_\lambda b]_N).
\end{aligned}\tag{4.9}$$

另一方面,

$$\begin{aligned}
[T_t(a)_\lambda T_t(b)]&=[(a+tf(a))_\lambda(b+tf(b))]\\
&=[a_\lambda b]+t([f(a)_\lambda b]+[a_\lambda f(b)])+t^2[f(a)_\lambda f(b)].
\end{aligned}\tag{4.10}$$

结合 (4.9) 和 (4.10) 可得 $T_t([a_\lambda b]_t)=[T_t(a)_\lambda T_t(b)]$, 即形变是平凡的. □

5 BiHom-Lie 共形代数的导子

定义 5.1 设 (R,α,β) 为 BiHom-Lie 共形代数, 如果对任意的 $a,b\in R$, 下列等式成立:

$$\begin{aligned}
&D_\lambda\circ\alpha=\alpha\circ D_\lambda,\quad D_\lambda\circ\beta=\beta\circ D_\lambda,\\
&D_\lambda([a_\mu b])=[D_\lambda(a)_{\lambda+\mu}\alpha^k\beta^l(b)]+[\alpha^k\beta^l(a)_\mu D_\lambda(b)],
\end{aligned}\tag{5.1}$$

则称共形线性映射 $D_\lambda:R\to R$ 为 (R,α,β) 的 $\alpha^k\beta^l$- 导子.

记 $\mathrm{Der}_{\alpha^s,\beta^l}$ 为 BiHom-Lie 共形代数 (R,α,β) 的所有 $\alpha^s\beta^l$- 导子的集合.

选取 $a\in R$, 使得 $\alpha(a)=a$, $\beta(a)=a$, 定义 $D_{k,l}:R\to R$ 为

$$D_{k,l}(a)_\lambda(b):=[a_\lambda\alpha^{k+1}\beta^{l-1}(b)],\quad \forall\, b\in R,$$

则 $D_{k,l}(a)$ 是 $\alpha^{k+1}\beta^l$- 导子, 称为内 $\alpha^{k+1}\beta^l$- 导子. 事实上,

$$\begin{aligned}
&D_{k,l}(a)_\lambda(\partial b)=[a_\lambda\alpha^{k+1}\beta^{l-1}(\partial b)]=[a_\lambda\partial\alpha^{k+1}\beta^{l-1}(b)]=(\partial+\lambda)D_{k,l}(a)_\lambda(b),\\
&D_{k,l}(a)_\lambda(\alpha(b))=[a_\lambda\alpha^{k+2}\beta^{l-1}(b)]=\alpha[a_\lambda\alpha^{k+1}\beta^{l-1}(b)]=\alpha\circ D_{k,l}(a)_\lambda(b),\\
&D_{k,l}(a)_\lambda(\beta(b))=[a_\lambda\alpha^{k+1}\beta^{l}(b)]=\beta[a_\lambda\alpha^{k+1}\beta^{l-1}(b)]=\beta\circ D_{k,l}(a)_\lambda(b),\\
&D_{k,l}(a)_\lambda([b_\mu c])=[a_\lambda\alpha^{k+1}\beta^{l-1}([b_\mu c])]\\
&\qquad=[\alpha\beta(a)_\lambda[\alpha^{k+1}\beta^{l-1}(b)_\mu\alpha^{k+1}\beta^{l-1}(c)]]\\
&\qquad=[[\beta(a)_\lambda\alpha^{k+1}\beta^{l-1}(b)]_{\lambda+\mu}\alpha^{k+1}\beta^{l}(c)]+[\alpha^{k+1}\beta^{l}(b)_\mu[\alpha(a)_\lambda\alpha^{k+1}\beta^{l-1}(c)]]\\
&\qquad=[[a_\lambda\alpha^{k+1}\beta^{l-1}(b)]_{\lambda+\mu}\alpha^{k+1}\beta^{l}(c)]+[\alpha^{k+1}\beta^{l}(b)_\mu[a_\lambda\alpha^{k+1}\beta^{l-1}(c)]]\\
&\qquad=[D_{k,l}(a)_\lambda(b)_{\lambda+\mu}\alpha^{k+1}\beta^{l}(c)]+[\alpha^{k+1}\beta^{l}(b)_\mu(D_{k,l}(a)_\lambda(c))].
\end{aligned}$$

记 $\mathrm{Inn}_{\alpha^k\beta^l}(R)$ 为所有内 $\alpha^k\beta^l$- 导子的集合. 对任意的 $D_\lambda\in\mathrm{Der}_{\alpha^k\beta^l}(R)$ 和 $D'_{\mu-\lambda}\in\mathrm{Der}_{\alpha^s\beta^t}(R)$, 定义 $[D_\lambda D']_\mu$ 为

$$[D_\lambda D']_\mu(a)=D_\lambda(D'_{\mu-\lambda}a)-D'_{\mu-\lambda}(D_\lambda a),\quad \forall\, a\in R. \tag{5.2}$$

引理 5.1　对任意的 $D_\lambda\in\mathrm{Der}_{\alpha^k\beta^l}(R)$ 和 $D'_{\mu-\lambda}\in\mathrm{Der}_{\alpha^s\beta^t}(R)$, 有

$$[D_\lambda D']\in\mathrm{Der}_{\alpha^{k+s}\beta^{l+t}}(R)[\lambda].$$

证明　对任意的 $a,b\in R$, 一方面,

$$\begin{aligned}
[D_\lambda D']_\mu(\partial a)&=D_\lambda(D'_{\mu-\lambda}\partial a)-D'_{\mu-\lambda}(D_\lambda\partial a)\\
&=D_\lambda((\partial+\mu-\lambda)D'_{\mu-\lambda}a)+D'_{\mu-\lambda}((\mu+\lambda)D_\lambda a)\\
&=(\partial+\mu)D_\lambda(D'_{\mu-\lambda}a)-(\partial+\mu)D'_{\mu-\lambda}(D_\lambda a)\\
&=(\partial+\mu)[D_\lambda D']_\mu(a);
\end{aligned}$$

另一方面,

$$\begin{aligned}
[D_\lambda D']_\mu([a_\gamma b])&=D_\lambda(D'_{\mu-\lambda}[a_\gamma b])-D'_{\mu-\lambda}(D_\lambda[a_\gamma b])\\
&=D_\lambda([D'_{\mu-\lambda}(a)_{\mu-\lambda+\gamma}\alpha^s\beta^t(b)]+[\alpha^s\beta^t(a)_\gamma D'_{\mu-\lambda}(b)])\\
&\quad-D'_{\mu-\lambda}([D_\lambda(a)_{\lambda+\gamma}\alpha^k\beta^l(b)]+[\alpha^k\beta^l(a)_\gamma D_\lambda(b)])\\
&=[D_\lambda(D'_{\mu-\lambda}(a))_{\mu+\gamma}\alpha^{k+s}\beta^{l+t}(b)]+[\alpha^k\beta^l(D'_{\mu-\lambda}(a))_{\mu-\lambda+\gamma}D_\lambda(\alpha^s\beta^t(b))]\\
&\quad+[D_\lambda(\alpha^s\beta^t(a))_{\lambda+\gamma}\alpha^k\beta^l(D'_{\mu-\lambda}(b))]+[\alpha^{k+s}\beta^{l+t}(a)_\gamma(D_\lambda(D'_{\mu-\lambda}(b)))]\\
&\quad-[(D'_{\mu-\lambda}D_\lambda(a))_{\mu+\gamma}\alpha^{k+s}\beta^{l+t}(b)]-[\alpha^s\beta^t(D_\lambda(s))_{\lambda+\gamma}(D'_{\mu-\lambda}(\alpha^k\beta^l(b)))]\\
&\quad-[(D'_{\mu-\lambda}(\alpha^k\beta^l(a)))_{\mu-\lambda+\gamma}\alpha^s\beta^t(D_\lambda(b))]-[\alpha^{k+s}\beta^{l+t}(a)_\lambda(D'_{\mu-\lambda}(D_\lambda(b)))]\\
&=[([D_\lambda D']_\mu a)_{\mu+\gamma}\alpha^{k+s}\beta^{l+t}(b)]+[\alpha^{k+s}\beta^{l+t}(a)_\gamma([D_\lambda D']_\mu b)].
\end{aligned}$$

因此, $[D_\lambda D']\in\mathrm{Der}_{\alpha^{k+s}\beta^{l+t}}(R)[\lambda]$. □

定义

$$\operatorname{Der}(R)=\bigoplus_{k\geqslant 0,l\geqslant 0}\operatorname{Der}_{\alpha^k\beta^l}(R). \tag{5.3}$$

命题 5.1 设 R 是有限秩的, 则 $(\operatorname{Der}(R),\alpha',\beta')$ 关于 (5.3) 是一个 BiHom-Lie 共形代数, 其中 $\alpha'(D)=D\circ\alpha$, $\beta'(D)=D\circ\beta$.

证明 由 (5.3), 容易验证 (3.1) 和 (3.2) 成立. 为了验证 BiHom-Jacobi 等式, 我们计算如下:

$$\begin{aligned}
[\alpha'\beta'(D)_\lambda[D'_\mu D'']]_\theta(a)&=(D\circ\alpha\beta)_\lambda([D'_\mu D'']_{\theta-\lambda}a)-[D'_\mu D'']_{\theta-\lambda}((D\circ\alpha\beta)_\lambda a)\\
&=D_\lambda([D'_\mu D'']_{\theta-\lambda}\alpha\beta(a))-[D'_\mu D'']_{\theta-\lambda}(D_\lambda\alpha\beta(a))\\
&=D_\lambda(D'_\mu(D''_{\theta-\lambda-\mu}\alpha\beta(a)))-D_\lambda(D''_{\theta-\lambda-\mu}(D'_\mu\alpha\beta(a)))\\
&\quad-D'_\mu(D''_{\theta-\lambda-\mu}(D_\lambda\alpha\beta(a)))+D''_{\theta-\lambda-\mu}(D'_\mu(D_\lambda\alpha\beta(a))),\\
[\beta'(D')_\mu[\alpha'(D)_\lambda D'']]_\theta(a)&=D'_\mu(D_\lambda(D''_{\theta-\lambda-\mu}\alpha\beta(a)))-D'_\mu(D''_{\theta-\lambda-\mu}(D_\lambda(\alpha\beta(a))))\\
&\quad-D_\lambda(D''_{\theta-\lambda-\mu}(D'_\mu\alpha\beta(a)))+D''_{\theta-\lambda-\mu}(D_\lambda(D'_\mu\alpha\beta(a))),\\
[[\beta'(D)_\lambda D']_{\lambda+\mu}\beta'(D'')]_\theta(a)&=D_\lambda(D'_\mu(D''_{\theta-\lambda-\mu}\alpha\beta(a)))-D'_\mu(D_\lambda(D''_{\theta-\lambda-\mu}\alpha\beta(a)))\\
&\quad-D''_{\theta-\lambda-\mu}(D_\lambda(D'_\mu\alpha\beta(a)))+D''_{\theta-\lambda-\mu}(D'_\mu(D_\lambda\alpha\beta(a))).
\end{aligned}$$

因此,

$$[\alpha'\beta'(D)_\lambda[D'_\mu D'']]_\theta(a)=[\beta'(D')_\mu[\alpha'(D)_\lambda D'']]_\theta(a)+[[\beta'(D)_\lambda D']_{\lambda+\mu}\beta'(D'')]_\theta(a),$$

则 $(\operatorname{Der}(R),\alpha',\beta')$ 是 BiHom-Lie 共形代数. □

最后, 给出正则 BiHom-Lie 共形代数 (R,α,β) 的 $\alpha^0\beta^1$- 导子的应用.

对任意的 $D_\lambda\in\operatorname{Cend}(R)$, 在向量空间 $R\oplus\mathbb{C}D$ 上定义双线性算子 $[\cdot_\lambda\cdot]_D$:

$$[(a+mD)_\lambda(b+nD)]_D=[a_\lambda b]+mD_\lambda(b)-nD_{-\lambda-\partial}(\alpha\beta^{-1}(a)),\quad\forall\,a,b\in R,\quad m,n\in\mathbb{C}$$

和线性映射 $\alpha',\beta':R\oplus\mathbb{C}D\to R\oplus\mathbb{C}D$:

$$\alpha'(a+D)=\alpha(a)+D,\quad\beta'(a+D)=\beta(a)+D.$$

命题 5.2 设 R 是有限秩的, 则 $(R\oplus\mathbb{C}D,\alpha',\beta')$ 为正则 BiHom-Lie 共形代数当且仅当 D_λ 为 (R,α,β) 的 $\alpha^0\beta^1$- 导子.

证明 假设 $(R\oplus\mathbb{C}D,\alpha',\beta')$ 为正则 BiHom-Lie 共形代数. 对任意的 $a,b\in R$, $m,n\in\mathbb{C}$, 有

$$\begin{aligned}
\alpha'\circ\beta'(a+mD)&=\alpha'(\beta(a)+mD)=\alpha\circ\beta(a)+mD,\\
\beta'\circ\alpha'(a+mD)&=\beta'(\alpha(a)+mD)=\beta\circ\alpha(a)+mD.
\end{aligned}$$

因此, $\alpha\circ\beta=\beta\circ\alpha\Leftrightarrow\alpha'\circ\beta'=\beta'\circ\alpha'$. 同时,

$$\begin{aligned}
\alpha'[(a+mD)_\lambda(b+nD)]_D&=\alpha'([a_\lambda b]+mD_\lambda(b)-nD_{-\lambda-\partial}(\alpha\beta^{-1}(a)))\\
&=\alpha[a_\lambda b]+m\alpha(D_\lambda(b))-n\alpha(D_{-\lambda-\partial}(\alpha\beta^{-1}(a))),\\
[\alpha'(a+mD)_\lambda\alpha'(b+nD)]&=[\alpha(a)+mD_\lambda\alpha(b)+nD]
\end{aligned}$$

$$= [\alpha(a)_\lambda \alpha(b)] + mD_\lambda \alpha(b) - \alpha\beta^{-1} \circ nD_{-\lambda-\partial}\alpha(a),$$

即 $\alpha \circ D_\lambda = D_\lambda \circ \alpha$. 类似可得 $\beta \circ D_\lambda = D_\lambda \circ \beta$. 其次, 由 BiHom-Jacobi 等式得

$$[\alpha'\beta'(D)_\lambda [a_\mu b]_D]_D = [\beta'(a)_\lambda [\alpha'(D)_\mu b]_D]_D + [[\beta'(D)_\mu a]_{D\lambda+\mu} \beta'(b)]_D,$$

由等式 (5.1) 可得

$$D_\mu([a_\lambda b]) = [(D_\mu a)_{\lambda+\mu} \alpha^0\beta^1(b)] + [\alpha^0\beta^1(a)_\lambda (D_\mu b)].$$

因此 D_λ 是 (R,α,β) 的 $\alpha^0\beta^1$- 导子.

反之, 假设 D_λ 为 (R,α,β) 的 $\alpha^0\beta^1$- 导子. 对任意的 $a,b \in R$, $m,n \in \mathbb{C}$, 计算可得

$$\begin{aligned}
&[\beta'(b+nD)_{-\partial-\lambda} \alpha'(a+mD)]_D \\
&\quad = [(\beta(b)+nD)_{-\partial-\lambda}(\alpha(a)+mD)]_D \\
&\quad = [\beta(b)_{-\partial-\lambda}\alpha(a)] + nD_{-\partial-\lambda}(\alpha(a)) - mD_\lambda(\alpha(b)) \\
&\quad = -[\beta(a)_\lambda \alpha(b)] + nD_{-\partial-\lambda}(\alpha(a)) - mD_\lambda(\alpha(b)) \\
&\quad = -([\beta(a)_\lambda \alpha(b)] - nD_{-\partial-\lambda}(\alpha(a)) + mD_\lambda(\alpha(b))) \\
&\quad = -[(\beta(a)+mD)_\lambda (\alpha(b)+nD)]_D.
\end{aligned}$$

因此 (3.2) 成立. 其次,

$$\begin{aligned}
&[\partial D_\lambda a]_D = -\lambda [D_\lambda a]_D, \\
&[\partial a_\lambda D]_D = -D_{-\partial-\lambda}(\partial a) = -\lambda [a_\lambda D]_D, \\
&[D_\lambda \partial a]_D = D_\lambda(\partial a) = (\partial+\lambda) D_\lambda(a) = (\partial+\lambda)[D_\lambda a]_D, \\
&[a_\lambda \partial D]_D = -(\partial D)_{-\lambda-\partial} a = (\partial+\lambda)[a_\lambda D]_D, \\
&\alpha' \circ \partial = \partial \circ \alpha', \quad \beta' \circ \partial = \partial \circ \beta'.
\end{aligned}$$

因此 (3.1) 成立. 最后, 容易验证 BiHom-Jacobi 等式成立, 即 $(R \oplus \mathbb{C}D, \alpha', \beta')$ 为正则 BiHom-Lie 共形代数. □

6　BiHom-Lie 共形代数的广义导子

设 (R,α,β) 为有限秩的 BiHom-Lie 共形代数. 定义

$$\Omega = \{D_\lambda \in \mathrm{Cend}(R) \mid D_\lambda \circ \alpha = \alpha \circ D_\lambda, D_\lambda \circ \beta = \beta \circ D_\lambda\},$$

则 Ω 关于 (5.2) 是一个 BiHom-Lie 共形代数, $\mathrm{Der}(R)$ 是 Ω 的 BiHom-Lie 共形子代数.

定义 6.1　(1) 如果存在 $D'_\mu, D''_\mu \in \Omega$ 满足

$$[(D_\mu(a))_{\lambda+\mu} \alpha^k\beta^l(b)] + [\alpha^k\beta^l(a)_\lambda (D'_\mu(b))] = D''_\mu([a_\lambda b]), \quad \forall\, a,b \in R, \tag{6.1}$$

则称元素 $D_\mu \in \Omega$ 为 R 的广义 $\alpha^k\beta^l$- 导子.

(2) 如果存在 $D'_\mu \in \Omega$ 满足

$$[(D_\mu(a))_{\lambda+\mu}\alpha^k\beta^l(b)] + [\alpha^k\beta^l(a)_\lambda(D_\mu(b))] = D'_\mu([a_\lambda b]), \quad \forall\, a,b \in R, \tag{6.2}$$

则称元素 $D_\mu \in \Omega$ 为 R 的 $\alpha^k\beta^l$- 拟导子.

(3) 如果存在 $D_\mu \in \Omega$ 满足

$$[(D_\mu(a))_{\lambda+\mu}\alpha^k\beta^l(b)] = [\alpha^k\beta^l(a)_\lambda(D_\mu(b))] = D_\mu([a_\lambda b]), \quad \forall\, a,b \in R, \tag{6.3}$$

则称元素 $D_\mu \in \Omega$ 为 R 的 $\alpha^k\beta^l$- 中心.

(4) 如果存在 $D_\mu \in \Omega$ 满足

$$[(D_\mu(a))_{\lambda+\mu}\alpha^k\beta^l(b)] = [\alpha^k\beta^l(a)_\lambda(D_\mu(b))], \quad \forall\, a,b \in R, \tag{6.4}$$

则称元素 $D_\mu \in \Omega$ 为 R 的 $\alpha^k\beta^l$- 拟中心.

(5) 如果存在 $D_\mu \in \Omega$ 满足

$$[(D_\mu(a))_{\lambda+\mu}\alpha^k\beta^l(b)] = D_\mu([a_\lambda b]) = 0, \quad \forall\, a,b \in R, \tag{6.5}$$

则称元素 $D_\mu \in \Omega$ 为 R 的 $\alpha^k\beta^l$- 中心导子.

记 $G\mathrm{Der}_{\alpha^k\beta^l}(R)$、$Q\mathrm{Der}_{\alpha^k\beta^l}(R)$、$C_{\alpha^k\beta^l}(R)$、$QC_{\alpha^k\beta^l}(R)$ 和 $Z\mathrm{Der}_{\alpha^k\beta^l}(R)$ 分别为 R 的所有广义 $\alpha^k\beta^l$- 导子、$\alpha^k\beta^l$- 拟导子、$\alpha^k\beta^l$- 中心、$\alpha^k\beta^l$- 拟中心和 $\alpha^k\beta^l$- 中心导子的集合. 令

$$\begin{aligned}
&G\mathrm{Der}(R) := \bigoplus_{k\geqslant 0, l\geqslant 0} G\mathrm{Der}_{\alpha^k\beta^l}(R), \quad Q\mathrm{Der}(R) := \bigoplus_{k\geqslant 0, l\geqslant 0} Q\mathrm{Der}_{\alpha^k\beta^l}(R),\\
&C(R) := \bigoplus_{k\geqslant 0, l\geqslant 0} C_{\alpha^k\beta^l}(R), \quad QC_{\alpha^k\beta^l}(R) := \bigoplus_{k\geqslant 0, l\geqslant 0} QC_{\alpha^k\beta^l}(R),\\
&Z\mathrm{Der}(R) := \bigoplus_{k\geqslant 0, l\geqslant 0} Z\mathrm{Der}_{\alpha^k\beta^l}(R).
\end{aligned}$$

容易验证

$$Z\mathrm{Der}(R) \subseteq \mathrm{Der}(R) \subseteq Q\mathrm{Der}(R) \subseteq G\mathrm{Der}(R) \subseteq \mathrm{Cend}(R), \quad C(R) \subseteq QC(R) \subseteq G\mathrm{Der}(R). \tag{6.6}$$

命题 6.1 设 (R,α,β) 为有限秩的 BiHom-Lie 共形代数, 则

(1) $G\mathrm{Der}(R)$、$Q\mathrm{Der}(R)$ 和 $C(R)$ 为 Ω 的 BiHom-Lie 共形子代数;

(2) $Z\mathrm{Der}(R)$ 为 $\mathrm{Der}(R)$ 的 BiHom-Lie 共形理想.

证明 (1) 仅验证 $G\mathrm{Der}(R)$ 为 Ω 的 BiHom-Lie 共形子代数. 其他的验证方法类似.

对任意的 $D_\mu \in G\mathrm{Der}_{\alpha^k\beta^l}(R)$, $H_\mu \in G\mathrm{Der}_{\alpha^s\beta^t}(R)$, $a,b \in R$, 存在 $D'_\mu, D''_\mu \in \Omega$ (或 $H'_\mu, H''_\mu \in \Omega$) 对于 D_μ (或 H_μ) 使得 (6.1) 成立. 因为 $\alpha'(D_\mu) = D_\mu \circ \alpha$ 和 $\beta'(D_\mu) = D_\mu \circ \beta$, 所以,

$$\begin{aligned}
[(\alpha'(D_\mu)(a))_{\lambda+\mu}\alpha^{k+1}\beta^l(b)] &= [(D_\mu(\alpha(a)))_{\lambda+\mu}\alpha^{k+1}\beta^l(b)]\\
&= \alpha([(D_\mu(a))_{\lambda+\mu}\alpha^k\beta^l(b)])\\
&= \alpha(D''_\mu([a_\lambda b]) - [\alpha^k\beta^l(a)_\lambda D'_\mu(b)])\\
&= \alpha'(D''_\mu)([a_\lambda b]) - [\alpha^{k+1}\beta^l(a)_\lambda(\alpha'(D'_\mu)(b))],
\end{aligned}$$

即 $\alpha'(D_\mu) \in G\mathrm{Der}_{\alpha^{k+1}\beta^l}(R)$. 类似可得 $\beta'(D_\mu) \in G\mathrm{Der}_{\alpha^k\beta^{l+1}}(R)$. 此外, 只需验证

$$[D''_\mu H'']_\theta([a_\lambda b]) = [([D_\mu H]_\theta(a))_{\lambda+\theta}\alpha^{k+s}\beta^{l+t}(b)] + [\alpha^{k+s}\beta^{l+t}(a)_\lambda([D'_\mu H']_\theta(b))]. \tag{6.7}$$

由 (6.4) 可知

$$[([D_\mu H]_\theta(a))_{\lambda+\theta}(b)] = [(D_\mu(H_{\theta-\mu}(a)))_{\lambda+\theta}\alpha^{k+s}\beta^{l+t}(b)] - [(H_{\theta-\mu}(D_\mu(a)))_{\lambda+\theta}\alpha^{k+s}\beta^{l+t}(b)]. \tag{6.8}$$

由 (6.1) 可得

$$\begin{aligned}
&[(D_\mu(H_{\theta-\mu}(a)))_{\lambda+\theta}\alpha^{k+s}\beta^{l+t}(b)]\\
&\quad= D''_\mu([(H_{\theta-\mu}(a))_{\lambda+\theta-\mu}\alpha^s\beta^t(b)]) - D''_\mu([\alpha^k\beta^l(a)_\lambda(H'_{\theta-\mu}(\alpha^s\beta^t(b)))])\\
&\quad= D''_\mu(H''_{\theta-\mu}([a_\lambda b])) - D''_\mu([\alpha^s\beta^t(a)_\lambda(H'_{\theta-\mu}(b))])\\
&\qquad - H''_{\theta-\mu}([\alpha^k\beta^l(a)_\lambda(D'_\mu(b))]) + [\alpha^{k+s}\beta^{l+t}(a)_\lambda(H'_{\theta-\mu}(D'_\mu(b)))],
\end{aligned} \tag{6.9}$$

$$\begin{aligned}
&[(H_{\theta-\mu}(D_\mu(a)))_{\lambda+\theta}\alpha^{k+s}\beta^{l+t}(b)]\\
&\quad= H''_{\theta-\mu}([(D_\mu(a))_{\lambda+\mu}\alpha^k\beta^l(b)]) - [\alpha^s\beta^t(D_\mu(a))_{\lambda+\mu}(H'_{\theta-\mu}(\alpha^k\beta^l(b)))]\\
&\quad= H''_{\theta-\mu}(D''_\mu([a_\lambda b])) - H''_{\theta-\mu}([\alpha^k\beta^l(a)_\lambda(D'_\mu(b))])\\
&\qquad - D''_\mu([\alpha^s\beta^t(a)_\lambda(H'_{\theta-\mu}(b))]) + [\alpha^{k+s}\beta^{l+t}(a)_\lambda(D'_\mu(H'_{\theta-\mu}(b)))].
\end{aligned} \tag{6.10}$$

由 (6.7)–(6.10) 可知 $[D_\mu H] \in G\mathrm{Der}_{\alpha^{k+s}\beta^{l+t}}(R)[\mu]$. 因此 $G\mathrm{Der}(R)$ 为 Ω 的 BiHom-Lie 共形子代数.

(2) 对任意的 $D_1\mu \in Z\mathrm{Der}_{\alpha^k\beta^l}(R)$, $D_2\mu \in \mathrm{Der}_{\alpha^s\beta^t}(R)$, $a, b \in R$, 有

$$[(\alpha'(D_1)_\mu(a))_{\lambda+\mu}\alpha^{k+1}\beta^l(b)] = \alpha([(D_1\mu(a))_{\lambda+\mu}\alpha^k\beta^l(b)]) = \alpha'(D_1)_\mu([a_\lambda b]) = 0,$$

即 $\alpha'(D_1) \in Z\mathrm{Der}_{\alpha^{k+1}\beta^l}(R)$. 类似地, $\beta'(D_1) \in Z\mathrm{Der}_{\alpha^k\beta^{l+1}}(R)$. 由 (6.5) 可知

$$\begin{aligned}
{}_\theta([a_\lambda b]) &= D_1\mu(D_{2\theta-\mu}([a_\lambda b])) - D_{2\theta-\mu}(D_1\mu([a_\lambda b]))\\
&= D_1\mu(D_{2\theta-\mu}([a_\lambda b]))\\
&= D_1\mu([(D_{2\theta-\mu}(a))_{\lambda+\theta-\mu}\alpha^s\beta^t(b)] + [\alpha^s\beta^t(a)_\lambda D_{2\theta-\mu}(b)])\\
&= 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&[[D_1\mu D_2]_\theta(a)_{\lambda+\theta}\alpha^{k+s}\beta^{l+t}(b)]\\
&\quad= [D_1\mu(D_{2\theta-\mu}(a)) - D_{2\theta-\mu}(D_1\mu(a))_{\lambda+\theta}\alpha^{k+s}\beta^{l+t}(b)]\\
&\quad= [-(D_{2\theta-\mu}(D_1\mu(a)))_{\lambda+\theta}\alpha^{k+s}\beta^{l+t}(b)]\\
&\quad= -D_{2\theta-\mu}([D_1\mu(a)_{\lambda+\mu}\alpha^k\beta^l(b)]) + [\alpha^s\beta^t(D_1\mu(a))_{\lambda+\mu}D_{2\theta-\mu}(\alpha^k\beta^l(b))]\\
&\quad= 0,
\end{aligned}$$

即 $[D_1\mu D_2] \in Z\mathrm{Der}_{\alpha^{k+s}\beta^{l+t}}(R)[\mu]$. 因此 $Z\mathrm{Der}(R)$ 为 $\mathrm{Der}(R)$ 的 BiHom-Lie 共形理想. □

引理 6.1　设 (R, α, β) 为有限秩的 BiHom-Lie 共形代数, 则

(1) $[\mathrm{Der}(R)_\lambda C(R)] \subseteq C(R)[\lambda]$;

(2) $[Q\mathrm{Der}(R)_\lambda QC(R)] \subseteq QC(R)[\lambda]$;

(3) $[QC(R)_\lambda QC(R)] \subseteq Q\mathrm{Der}(R)[\lambda]$.

证明 略. □

定理 6.1 设 (R,α,β) 为有限秩的 BiHom-Lie 共形代数, 则 $G\mathrm{Der}(R) = Q\mathrm{Der}(R) + QC(R)$.

证明 对任意的 $D_\mu \in G\mathrm{Der}_{\alpha^k}(R)$, 存在 $D'_\mu, D''_\mu \in \Omega$ 使得

$$[D_\mu(a)_{\lambda+\mu}\alpha^k\beta^l(b)] + [\alpha^k\beta^l(a)_\lambda D'_\mu(b)] = D''_\mu([a_\lambda b]), \quad \forall\, a, b \in R \tag{6.11}$$

成立. 由等式 (3.2) 和 (6.11) 可得

$$[\alpha^k\beta^l(b)_{-\partial-\lambda-\mu}D_\mu(a)] + [D'_\mu(b)_{-\partial-\lambda}\alpha^k\beta^l(a)] = D''_\mu([b_{-\partial-\lambda}a]). \tag{6.12}$$

在等式 (6.12) 中令 $\lambda' = -\partial-\lambda-\mu$, 由等式 (3.1) 可得

$$[\alpha^k\beta^l(b)_{\lambda'}D_\mu(a)] + [D'_\mu(b)_{\mu+\lambda'}\alpha^k\beta^l(a)] = D''_\mu([b_{\lambda'}a]). \tag{6.13}$$

交换 a 和 b 的位置并在等式 (6.13) 中用 λ 替换 λ', 有

$$[\alpha^k\beta^l(a)_\lambda D_\mu(b)] + [D'_\mu(a)_{\lambda+\mu}\alpha^k\beta^l(b)] = D''_\mu([a_\lambda b]). \tag{6.14}$$

由等式 (6.11) 和 (6.14) 可得

$$\begin{aligned}
&\left[\frac{D_\mu + D'_\mu}{2}(a)_{\lambda+\mu}\alpha^k\beta^l(b)\right] + \left[\alpha^k\beta^l(a)_\lambda\frac{D_\mu + D'_\mu}{2}(b)\right] = D''_\mu([a_\lambda b]),\\
&\left[\frac{D_\mu - D'_\mu}{2}(a)_{\lambda+\mu}\alpha^k\beta^l(b)\right] - \left[\alpha^k\beta^l(a)_\lambda\frac{D_\mu + D'_\mu}{2}(b)\right] = 0.
\end{aligned}$$

由此可见, $\frac{D_\mu+D'_\mu}{2} \in Q\mathrm{Der}_{\alpha^k\beta^l}(R)$, $\frac{D_\mu-D'_\mu}{2} \in QC_{\alpha^k\beta^l}(R)$. 因此

$$D_\mu = \frac{D_\mu + D'_\mu}{2} + \frac{D_\mu - D'_\mu}{2} \in Q\mathrm{Der}_{\alpha^k\beta^l}(R) + QC_{\alpha^k\beta^l}(R).$$

所以, $G\mathrm{Der}(R) \subseteq Q\mathrm{Der}(R) + QC(R)$. 反方向的包含关系由等式 (6.6) 和引理 6.1 可验证. □

定理 6.2 设 (R,α,β) 为有限秩的 BiHom-Lie 共形代数, α 和 β 为满同态, $Z(R)$ 是 R 的中心, 则 $[C(R)_\lambda QC(R)] \subseteq \mathrm{Cend}(R, Z(R))[\lambda]$. 若 $Z(R) = 0$, 则 $[C(R)_\lambda QC(R)] = 0$.

证明 由于 α 和 β 是满同态, 对任意的 $b' \in R$, 存在 $b \in R$ 满足 $b' = \alpha^{k+s}\beta^{l+t}(b)$. 对任意的 $D_{1\mu} \in C_{\alpha^k\beta^l}(R)$, $D_{2\mu} \in QC_{\alpha^s\beta^t}(R)$, $a \in R$, 由等式 (6.3) 和 (6.4) 可得

$$\begin{aligned}
[([D_{1\mu}D_2]_\theta(a))_{\lambda+\theta}b'] &= [([D_{1\mu}D_2]_\theta(a))_{\lambda+\theta}\alpha^{k+s}\beta^{l+t}(b)]\\
&= [(D_{1\mu}(D_{2\theta-\mu}(a)))_{\lambda+\theta}\alpha^{k+s}\beta^{l+t}(b)] - [(D_{2\theta-\mu}(D_{1\mu}(a)))_{\lambda+\theta}\alpha^{k+s}\beta^{l+t}(b)]\\
&= D_{1\mu}([D_{2\theta-\mu}(a)_{\lambda+\theta-\mu}\alpha^s\beta^t(b)]) - [\alpha^s\beta^t(b)(D_{1\mu}(a))_{\lambda+\mu}D_{2\theta-\mu}(\alpha^k\beta^l(b))]\\
&= D_{1\mu}([D_{2\theta-\mu}(a)_{\lambda+\theta-\mu}\alpha^s\beta^t(b)]) - D_{1\mu}([\alpha^s\beta^t(a)_\lambda D_{2\theta-\mu}(b)])\\
&= D_{1\mu}([D_{2\theta-\mu}(a)_{\lambda+\theta-\mu}\alpha^s\beta^t(b)] - [\alpha^s\beta^t(a)_\lambda D_{2\theta-\mu}(b)])\\
&= 0.
\end{aligned}$$

因此, $[D_{1\mu}D_2](a) \in Z(R)[\mu]$, $[D_{1\mu}D_2] \in \mathrm{Cend}(R, Z(R))[\mu]$. 若 $Z(R) = 0$, 则 $[D_{1\mu}D_2](a) = 0$. 从而 $[C(R)_\lambda QC(R)] = 0$. □

命题 6.2　设 (R,α,β) 为有限秩的 BiHom-Lie 共形代数, α 和 β 为满同态. 若 $Z(R)=0$, 则 $QC(R)$ 为 BiHom-Lie 共形代数当且仅当 $[QC(R)_\lambda QC(R)]=0$.

证明　只需验证必要条件. 假设 $QC(R)$ 为 BiHom-Lie 共形代数, 由于 α 和 β 为满同态, 对任意的 $b'\in R$, 存在 $b\in R$ 使得 $b'=\alpha^{k+s}\beta^{l+t}(b)$. 对任意的 $D_{1\mu}\in QC_{\alpha^k\beta^l}(R)$, $D_{2\mu}\in QC_{\alpha^s\beta^t}(R)$, $a\in R$, 由 (6.4) 可得

$$[([D_{1\mu}D_2]_\theta(a))_{\lambda+\theta}b']=[([D_{1\mu}D_2]_\theta(a))_{\lambda+\theta}\alpha^{k+s}\beta^{l+t}(b)]+[\alpha^{k+s}\beta^{l+t}(a)_\lambda([D_{1\mu}D_2]_\theta(b))]. \tag{6.15}$$

由等式 (5.2) 和 (6.4) 可得

$$\begin{aligned}
&[([D_{1\mu}D_2]_\theta(a))_{\lambda+\theta}\alpha^{k+s}\beta^{l+t}(b)]\\
&\quad=[(D_{1\mu}(D_{2\theta-\mu}(a)))_{\lambda+\theta}\alpha^{k+s}\beta^{l+t}(b)]-[(D_{2\theta-\mu}(D_{1\mu}(a)))_{\lambda+\theta}\alpha^{k+s}\beta^{l+t}(b)]\\
&\quad=[\alpha^k\beta^l(D_{2\theta-\mu}(a))_{\lambda+\theta-\mu}(D_{1\mu}(\alpha^s\beta^t(b)))]-[\alpha^s\beta^t(D_{1\mu}(a))_{\lambda+\mu}(D_{2\theta-\mu}(\alpha^k\beta^l(b)))]\\
&\quad=[\alpha^{k+s}\beta^{l+t}(a)_\lambda(D_{2\theta-\mu}(D_{1\mu}(b)))]-[\alpha^{k+s}\beta^{l+t}(a)_{\lambda+\mu}(D_{1\mu}(D_{2\theta-\mu}(b)))]\\
&\quad=-[\alpha^{k+s}\beta^{l+t}(a)_\lambda([D_{1\mu}D_2]_\theta(b))].
\end{aligned}$$

由等式 (6.15) 可得

$$[([D_{1\mu}D_2]_\theta(a))_{\lambda+\theta}b']=[([D_{1\mu}D_2]_\theta(a))_{\lambda+\theta}\alpha^{k+s}\beta^{l+t}(b)]=0.$$

由 $Z(R)=0$ 可知 $[D_{1\mu}D_2]_\theta(a)\in Z(R)[\mu]=0$. 因此, $[QC(R)_\lambda QC(R)]=0$. □

致谢　衷心感谢审稿人提出的宝贵意见.

参考文献

1 Kac V G. Vertex Algebras for Beginners, 2nd ed. University Lecture Series, vol. 10. Providence: Amer Math Soc, 1998

2 D'Andrea A, Kac V G. Structure theory of finite conformal algebras. Selecta Math (NS), 1998, 4: 377–418

3 Cheng S J, Kac V G. Conformal modules. Asian J Math, 1997, 1: 181–193

4 Bakalov B, Kac V G, Voronov A A. Cohomology of conformal algebras. Comm Math Phys, 1999, 200: 561–598

5 Liberati J I. On conformal bialgebras. J Algebra, 2008, 319: 2295–2318

6 Hong Y Y, Bai C M. Conformal classical Yang-Baxter equation, S-equation and $\mathcal{O}$-operators. Lett Math Phys, 2020, 110: 885–909

7 Hong Y Y, Wu Z X. Simplicity of quadratic Lie conformal algebras. Comm Algebra, 2017, 45: 141–150

8 Wu H N, Yuan L M. Classification of finite irreducible conformal modules over some Lie conformal algebras related to the Virasoro conformal algebra. J Math Phys, 2017, 58: 041701

9 Fan G Z, Hong Y Y, Su Y C. Generalized conformal derivations of Lie conformal algebras. J Algebra Appl, 2019, 18: 1950175

10 Su Y C, Xia C G, Yuan L M. Extensions of conformal modules over Lie conformal algebras of Block type. J Pure Appl Algebra, 2020, 224: 106232

11 Hu N H. q-Witt algebras, q-Lie algebras, q-holomorph structure and representations. Algebra Colloq, 1999, 6: 51–70

12 Hartwig J T, Larsson D, Silvestrov S D. Deformations of Lie algebras using σ-derivations. J Algebra, 2006, 295: 314–361

13 Yuan L M. Hom Gel'fand-Dorfman bialgebras and Hom-Lie conformal algebras. J Math Phys, 2014, 55: 043507

14 Zhao J, Yuan L M, Chen L Y. Deformations and generalized derivations of Hom-Lie conformal algebras. Sci China Math, 2018, 61: 797–812

15 Guo S J, Zhang X H, Wang S X. The construction of Hom-left-symmetric conformal bialgebras. Linear Multilinear Algebra, 2020, 68: 1257–1276

16 Graziani G, Makhlouf A, Menini C, et al. BiHom-associative algebras, BiHom-Lie algebras and BiHom-bialgebras. SIGMA Symmetry Integrability Geom Methods Appl, 2015, 11: 1–34

Cohomology and deformations of BiHom-Lie conformal algebras

Shuangjian Guo, Xiaohui Zhang & Shengxiang Wang

Abstract In this paper, we introduce the notion of BiHom-Lie conformal algebras and develop the cohomology theory. Furthermore, we discuss the deformations of regular BiHom-Lie conformal algebras and present some applications. Finally, we introduce derivations of BiHom-Lie conformal algebras and study their properties.

Keywords BiHom-Lie conformal algebra, cohomology, deformation, Nijenhuis operator, derivation

MSC(2020) 17A30, 17B45, 17D25, 17B81

doi: 10.1360/SSM-2020-0279