

成果与应用

吴文俊的数学机械化理论及方法

吴 文 达

(系统科学研究所数学机械化研究中心)

数学研究至少应包括定理证明与方程求解两大主题。它高度汇聚了人类的聪明才智。随着现代科学的发展,大量研究课题所需进行的繁复分析、演算和推导必须借助计算机才能完成。利用计算机部分代替人类的脑力劳动,是科学家们长期追求的目标,也是社会发展的必然需要。

数学机械化(或机械化数学)一方面理解为利用计算机从事数学研究;另一方面也理解为这样一种学术上的努力,它把数学理论通过计算机这一媒介变成工程技术和其他学科可以直接应用的结果。

从 1977 年起,吴文俊教授在数学机械化领域进行了一系列开创性的工作,建立了机器证明理论(国际上称为吴方法),引起了国内外学者的广泛重视和高度评价。美国、苏联、加拿大、法国、德国和意大利等国家的学术机构纷纷邀请吴教授讲学。美国 and 英国的国家基金组织还专项资助举办学习吴方法的研讨会。奥地利政府最近建立了国家研究所,也在从事与吴方法有关的学术研究。国外一些著名的出版机构和学术杂志,或破例重印吴教授的文章,或出书及发行专辑介绍吴教授的工作。一些国际性的学术会议还增添专题,进行吴方法的学术交流。一些国家的经济和国防部门也表现出对吴方法的浓厚兴趣。下面就简略介绍吴方法的基本内容、发展前景和意义。

一、初等几何定理的机械化证明

众所周知,数学定理往往是运用不同的方法一个一个地证明的,即使同一类型的定理也不例外。因此,数学家和数理逻辑学家们就对是否有可能用统一的方法来证明所有的定理发生了兴趣。向上可以追溯到二、三个世纪以前的 R. Descartes 和 W. Leibniz,他们都从不同角度上提出了用计算代替定理证明的想法。本世纪的数学家 D. Hilbert 也研究过这个问题。

1950 年前后,波兰数学家 A. Tarski 在这方面的研究取得了一些进展。他证明了 Euclid 几何定理是可以用计算来证明的,并且给出了相应的算法。不过这一算法即使经过众多后继者的改进,用目前高速的计算机来实现,也只能证明少量极平凡的定理,对于复杂一些的定理,由于相应的算法过于繁复,就无法实现了。此后国际上对机器证明几何定理的研究一直没有取得突破性的进展。

吴文俊教授关于初等几何定理证明的机械化方法问世之后,情况发生了根本的改观。在国内计算机装备很不理想的环境下,已经可能用他的方法证明复杂的定理。他的学生在国外把他的方法在计算机上充分实现,已经证明了 600 多条定理,一条定理只要几分钟。其中有些定理即使让数学家来证明,也是相当困难的。

对于初等几何定理的通常叙述,往往有些事情被认为是不言而喻的。比如说到平面三角形时,经常不提三个顶点不在同一条直线上这一假设,也就是说不明确指出把例外的退化情形排除在外。理论和实践都表明,分清退化情形和非退化情形是很重要的。吴方法正是充分注意到了这一点并成功地进行了处理。这一点是吴方法所以取得重大成功的关键之一。

吴方法不仅可以用来证明已知的定理,而且还可用来发现新的规律或定理。比如说一个象金字塔那样的物体,用一个平面去截它,截面是否可能是一个正五边形?目前我们还不知道这个问题别的解法,但是用吴方法来处理,可以轻而易举地得出肯定的结论。倘若认为这一现象从直观上还可以想象的话,那么用吴方法处理得到的另一个伴随的现象大多数人都会以为是太意外了:上述平面和金字塔的棱的延长线相交,有五个交点恰好是另一个正五边形的顶点,就是说还有一个正五边形存在!并且前一个正五边形在某种意义上处于黄金分割的位置,而后一个五边形处在与前一个在某种意义上相对偶的地方。诚然,这一发现在目前还看不出它的实用的意义,但它为纯粹数学提供了又一个和谐美妙的事实。

二、代数方程组“三角化”

吴文俊教授采用代数手法,引进坐标,将几何定理的假设转换为用以坐标为未知数的多元多项式方程来描述。同样,定理的结论也转换成多元多项式方程的描述。定理的证明就变成了判定由假设得到的多元多项式方程所组成的代数方程组的解,是否满足由结论得到的方程,从而判定定理是否成立。简单地说,这一方法就是几何问题的代数化。

转换本身并没有完成几何定理的机械化证明,只是为机械化证明创造了前提。正是因为吴教授对于多元多项式组的零点结构进行了深刻的研究,提出了零点结构的定理,并据此设计了有效的算法,才使得初等几何定理的机械化证明成为现实。可以说他提出的这一新算法才是他所倡导的数学机械化方法的灵魂和核心。初等几何定理证明不过是这一算法的(目前说来是实践最多和最富成果的)一个应用领域。如果没有这一算法,即使把初等几何定理的证明问题代数化了,现实可行性问题不解决,仍然不能实现证明的机械化。

吴教授所设计的算法,简单地说是一种消元过程。当然这样说似乎容易被认为是极平常的事情。但朴素的思想往往蕴含着丰富的内容。在线性情形下,我国的消元思想可以追溯到两千年前的《九章算术》;西方最早形成的算法是两百年前的 Gauss 消元法。非线性情形下,这种消元的思想在我国宋元时期杰出的数学家朱世杰的著作《四元玉鉴》中可以发现;在西方,虽然也有这种思想,但是似乎均停留在一种启发式的状态,没有形成明确的算法。就消元来说,由线性到非线性经历了漫长的过程。吴教授创立的算法,实现了由线性到非线性的跨越,是数学机械化发展过程中一块重要的里程碑。

由于把代数方程组三角化,使得解集合中可以准确计算的部分,有条件准确计算出来;不可能准确计算的部分,也为计算数值解提供了方便。另外,除了计算孤立解外,还可确定解流形,这是数值方法所不能处理的。吴教授提出的算法,就计算的角度而言,隶属于符号计算的范畴。因而吴教授(包括国内外一些计算学家)主张注意把符号计算和数值计算适当地结合起来,以形成更有效的混合方法。对于他的算法的并行化研究和计算复杂性分析,国外已有研究报道。

三、进一步发展和应用的前景

试图把某一数学领域所取得的成果延伸到邻近的领域,在数学研究中是自然的。吴文俊教授已开始把他关于代数方程组的三角化算法推广到微分代数方程组,为这一类型的方程组计算提出了一条新途径。同时,他已开始研究微分几何定理的机械化证明。如果说初等几何定理的机械化证明还有别人进行过的话,那么微分几何定理的机械化证明则是他率先开展研究的。

值得注意的是,吴教授还运用他的方法,证明了牛顿定律可以用计算机程序从 Kepler 定律推导出来。这就超越了数学定理的机械化证明这一范畴,而是属于更广的自动推理范畴。这一成果在人工智能领域是少见的,甚至可以说是绝无仅有的。他的这一贡献,扩大了自动定理证明的视野。可以说,吴教授所建立的数学机械化方法,已经超出了几何定理证明的范畴,并且也超出了几何学的界限。各个学科领域研究的问题,只要归结到或者涉及到相应的方程组求解,都有可能应用。正因为如此,他的工作受到了普遍关注。现在,在机器人学、自动控制、计算机视觉、化学平衡、几何模型等领域的应用已经开始在探索,有些已取得一些初步成果。预计今后这些领域的应用成果会极其丰富。

四、吴方法的意义

中国古典数学有其自身的发展途径与独到的思想体系,方程求解是其发展的一条主线,从古代数学家们的著作中可以看出这一特征。这与西方遵循古希腊传统的公理化演绎体系迥然有别。吴文俊教授倡导的数学机械化的思想直接继承了中国古典数学思想体系,同时又注重运用西方先进的计算机技术,“寓理于算”。这不仅对计算机科学,而且对纯粹数学也都提出了崭新的课题。纯粹数学的理论研究与计算机的使用应该是统一的。在现代数学的各个领域,寻求相应的机械化途径,使这些领域中的定理证明转化为只具有量的复杂性的计算问题,例如转换为适当的方程求解之类,是非常有意义的。两种方式互为补充,会更有利于数学的蓬勃发展。

恩格斯说过,机器对于体力劳动而言,是“人手的延伸”。我们可以这样说,数学机械化对于数学的脑力劳动而言,可以看成是“人脑的延伸”与人类脑力劳动的机械化。数学是一门高度抽象的学科,它的研究汇集了人类的聪明才智,成为众多学科的基础。数学机械化的应用将导致众多学科的机械化,用机器在更大程度上代替人类脑力劳动中可以代替的部分,从而使人类的聪明才智充分发挥在更需要的地方,为人类文明做出更大的贡献。