

双排多段排样方式及其生成算法

李 华, 崔耀东, 王严欣

(广西大学计算机与电子信息学院, 广西 南宁 530004)

摘 要: 为解决大规模矩形毛坯无约束的二维剪切排样问题, 提出双排多段排样方式及其生成算法。排样时采用一条剪切线将板材切分为两段, 用一组剪切线将每段切分成一系列的块, 每个块由一组水平方向的同质条带构成。采用枚举法确定两段分界线的最优位置, 通过求解背包模型确定所有可能尺寸的块的最大价值和块在段中的最优布局。利用文献中的2组基准测题对所述算法进行测试, 实验结果表明, 该算法能在合理的计算时间内取得较好的优化结果。

关 键 词: 无约束二维切割; 下料; 双排多段排样方式; 背包问题

中图分类号: TH 164; TP 301.6 **DOI:** 10.11996/JGj.2095-302X.2016030285

文献标识码: A **文 章 编 号:** 2095-302X(2016)03-0285-05

An Algorithm for Generating Patterns of Double-Rows and Multi Segments

Li Hua, Cui Yaodong, Wang Yanxin

(College of Computer and Electronic Information, Guangxi University, Nanning Guangxi 530004, China)

Abstract: To solve large scale unconstrained two-dimensional guillotine-cutting problem of rectangular items, an algorithm for generating the patterns of double-rows and multi segments is proposed, where the plate is divided into two segments by a cut, each of which is then divided into a series of blocks with a set of cuts, and each block contains a group of horizontal strips. The optimal position of the cut that divides the plate into two segments is determined through enumeration. Knapsack problems are solved to obtain the maximum values of all possible blocks and the block layouts on the segments. The algorithm is tested on two groups of benchmark problems in the literature. The computational results indicate that the algorithm can obtain better optimization results in a reasonable computation time.

Keywords: unconstrained two-dimensional cutting; stock packing; double-rows and multi-segments patterns; knapsack problem

矩形件优化排样问题是指将一组矩形件互不重叠的排放在有限的区域内, 并实现资源优化利用的布局问题, 其研究成果主要应用在板材、玻璃加工业、金属制品业等领域。最大限度的提高材料利用率、节约生产成本、简化切割工艺、缩短计算时间、提高企业效率成为增强企业竞争力的关键。因此, 矩形件的优化排样问题一直是国内外众多学者研究的热点。

本文讨论矩形毛坯无约束的二维剪切排样(unconstrained two-dimensional cutting, UTDC)问题: 采用剪切方式, 将板材长 $\times$ 宽($L \times W$)切成 m 种毛坯, 第 i 种毛坯的尺寸为 $l_i \times w_i$, 价值为 c_i , 对每种毛坯在板材出现的次数无约束, 排样目标是使得板材所含毛坯的总价值最大。令可行的排样方式 P 中含第 i 种毛坯 z_i 个, N 为自然数的集合, 则 UTDC 的数学模型为:

收稿日期: 2015-07-07; 定稿日期: 2016-01-18

基金项目: 国家自然科学基金项目(61363026, 71371058); 广西自然科学基金项目(2014GXNSFAA118357)

作者简介: 李 华(1986-), 女, 山东潍坊人, 硕士研究生。主要研究方向为智能系统与智能CAD。E-mail: lh401281894@126.com

通讯作者: 崔耀东(1957-), 男, 河南林州人, 教授, 博士。主要研究方向为智能系统与智能CAD。E-mail: ydcui@263.net

$$V = \max \left(\sum_{i=1}^m c_i z_i \right) \quad (1)$$

其中: $z_i \in N$; $i=1, \dots, m$; P 满足一定的切割工艺的要求。

在生产实践中,经常将 UTDC 算法和线性规划算法相结合以求解二维下料问题(two-dimensional cutting stock problem, TDCSP)。使用库存板材 $L \times W$ 剪切出 m 种矩形小毛坯,第 i 种毛坯的尺寸为 $l_i \times w_i$,需求量为 d_i , $i=1, \dots, m$,要求确定下料方案,在满足全部毛坯需求的前提下,使得消耗的板材总面积最小。在求解下料方案的过程中,需要反复调用 UTDC 算法。因此,要求 UTDC 算法能在合理的计算时间内给出高质量的解。

目前研究的 UTDC 算法大致可分为 3 类:①生成普通排样方式的精确算法^[1-2];②生成普通排样方式的近似算法^[3-4],该算法由于其收敛性未知,无法保证解的质量;③生成具有明确几何性质的排样方式算法,如两段^[5-6]、T 形^[7]、两阶段^[8-9]、3 阶段^[9-10]、层排样^[11]、同质三块^[12]等排样算法,这类排样算法的利用率可能略低,但其切割工艺简单,在生产实践中仍得到广泛的应用。

文献[5]和[12]均采用递归算法分别生成最优两段布局方式和同质三块布局方式。以上两种布局方式,都是先将板材切分成两段,然后再在段上进行条带的布局排样。另外,在文献[5]的基础上,对文献[12]布局方式添加一条垂直于段分界线的辅助分界线,将板材切分成任意三块。分析以上两种布局方式的几何性质可以得出:两段布局方式 $\subseteq$ 同质三块布局方式。故同质三块布局方式理论上的排样价值优于两段布局方式的价值。

本文研究特定类型的排样方式,对文献[12]进行扩展提出双排多段排样方式(double-rows and multi segment, DMS)及其生成算法,即在文献[12]的基础上,将辅助分界线由一条扩展到多条,将板材切成若干块。故理论上 DMS 排样价值优于三块布局方式的价值是确定的;在切割工艺方面,DMS 排样方式还可应用于求解生产中滚剪下料问题,简化切割过程,减少人工工作量。

本文详细介绍了 DMS 排样方式及其生成算法,并通过两组实验测题验证了算法的有效性,实验结果将在第 3 节详细列出。下文中的叙述表明 DMS 算法优于经典两段、启发式 TABU500 算法和同质三块排样算法,且计算时间合理。

1 双排多段排样方式中的概念

在 DMS 排样方式中,用一条剪切线将板材分为两段,采用若干条辅助分界线将段划分成一系列的块,每个块仅含方向固定的同质条带。下面分别介绍相关概念。

1.1 同质条带

条带由若干个互不重叠、水平(X向)或竖直(Y向)排列的毛坯组成。按照条带所含毛坯类型,可将其分为单毛坯条带和多毛坯条带。单毛坯条带又称同质条带,如图 1(a)所示,其中仅含尺寸和方向均相同的毛坯。多毛坯条带又称普通条带,如图 1(b)所示,其中含多种不同毛坯。本文采用 X 向同质条带,与采用普通条带相比利用率虽略低,但切割工艺较为简单。

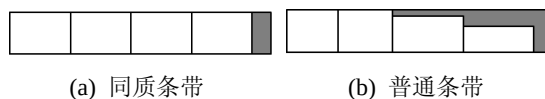


图 1 条带

1.2 块

块是指由长度和方向均相同的 X 向同质条带拼接而成的板材的矩形区域,如图 2 所示,毛坯中的数字指明毛坯的类型。通过一系列的剪切的过程可将块切分成若干条 X 向同质条带,每次切下一根 X 向条带,连续被切下的两根条带相互平行。图 2 块中包含 10 号 X 向条带 3 根,14 号 X 向条带一根。

14			14		
10	10	10	10	10	10
10	10	10	10	10	10
10	10	10	10	10	10

图 2 块

1.3 段

一个段由一系列的块组合而成,段长度与板材长度或宽度相等。若一系列块从左到右按水平方向排列,则称 X 向段,如图 3(a)所示;若一系列块自顶向下按竖直方向排列,则称 Y 向段,如图 3(b)所示。图 3 中,箭头指示相邻块之间分割线的位置。

1.4 DMS 排样方式

DMS 排样方式由两排块组成,可分 2 个阶段将板材切分成一系列块:①将板材切分成两段;②将每段切分成若干个块。图 4 为 DMS 排样的两种类型:若两段之间分割线的方向为 X 向,称为 X-DMS 排样,如图 4(a)所示,水平箭头指示上下两

段分割线的位置, 竖直箭头指示相邻块之间剪切线的位置; 若两段之间分割线的方向为 Y 向, 称为 Y -DMS 排样, 如图 4(b)所示, 竖直箭头指示两段分割线的位置, 水平箭头指示相邻块之间剪切线的位置。图 4(a)与图 4(b)均包含 5 个块。

17	17	17	17	17	17	3	3	3
17	17	17	17	17	17	3	3	3
9	9	9	9	9	9	3	3	3
9	9	9	9	9	9	3	3	3
9	9	9	9	9	9	17	17	
						17	17	
						17	17	
						17	17	

(a) X-段

25	25	2	
25	25	2	
25	25	2	
25	25	2	
25	25	2	
25	25	2	
25	25	2	
25	25	2	
21	21	21	21
21	21	21	21
21	21	21	21
21	21	21	21

(b) Y-段

图 3 段

1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2
25	25	25	25	25	25	25	25	2	2	2	2	2
25	25	25	25	25	25	25	25	2	2	2	2	2
25	25	25	25	25	25	25	25	2	2	2	2	2
19	19	19	19	19	19	19	19	31	31	31	54	
								18	18	18	54	
											54	

(a) X-DMS 排样

1	1	1	1	48	18	18	18	18	41
1	1	1	1	48	18	18	18	18	41
1	1	1	1	48	18	18	18	18	41
1	1	1	1	48	18	18	18	18	41
16	16	16	16	34	44	44	44	44	7
52	52	52	52	52	44	44	44	44	7

(b) Y-DMS 排样

图 4 DMS 排样方式

2 算法原理及实现

设板材 $L \times W$ 和毛坯的尺寸均为整数, 毛坯的方向固定。现只介绍生成 X -DMS 最优排样的方法, 主

要包含以下 4 个步骤: ①求解 X 向带最大价值; ②确定不同尺寸的最优块排样; ③确定块在段上的最优排样; ④生成 DMS 的最优排样方式。如果同时交换板材的长度与宽度、毛坯的长度与宽度, 然后调用 X -DMS 排样方式算法, 就可以生成 Y -DMS 排样方式。

2.1 求解条带价值

记条带的宽度向量为 $\mathbf{W} = [w_1, w_2, \dots, w_m]$, $i = 1, \dots, m$, 对矩形毛坯 $l_i \times w_i$, c_i 为第 i 种毛坯的单价, $w_{\min}$ 为全部毛坯的最小宽度, 即 $w_{\min} = \min_{1 \leq i \leq m} \{w_i\}$, 条带长度为 x 时的价值向量为 $\mathbf{V} = [v_1(x, w_1), v_2(x, w_2), \dots, v_m(x, w_m)]$, 可由如下公式决定:

$$v_i(x, w_i) = c_i \times \lfloor x / l_i \rfloor, i = 1, \dots, m, w_{\min} \leq x \leq L \quad (2)$$

2.2 生成最优块

对长为 x 宽为 y 的块, 设含第 j 种 X 向带 z_j 根, 结合 2.1 节给出的求解 X 向带的最大价值方法, 根据文献[9]动态规划的算法思想, 可确定组成 X 向段的块中所含条带的总价值 $F_X(x, y)$, $x \leq L, y \leq W$, 递推公式如下:

$$F_X(x, y) = \begin{cases} 0 (x < w_{\min} \parallel y < w_{\min}) \\ \max \left\{ \sum_{j=1}^m v_j(x, w_j) z_j \mid \sum_{j=1}^m w_j z_j \leq y, \right. \\ \left. z_j \in N, j = 1, 2, \dots, m \right\} \end{cases} \quad (3)$$

式(3)为最大化一定尺寸块价值的背包问题, 可采用文献[13]中的动态规划算法求解。为减少计算时间, 在求解过程中利用如下技术减少块中考虑拼接条带的数目:

(1) 将块 $x \times y$ 排样初始化为块 $x \times (y-1)$ 和块 $(x-1) \times y$ 中较好者。

(2) 若 $x / w_j \leq (x-1) / w_j$, 可令 $z_j = 0$, 因为, 当 $v_j(x, w_j)$ 出现在块中时, 可用较短的条带代替, 而不影响解的质量。

2.3 块在段上的最优排样

根据 1.3 节段的定义可知: X 向段由一系列水平排列高度均相同的块构成, 记 $B(L, Y)$ 为 X 向段 $L \times Y$ 最大价值, $Y = 1, \dots, W$, 则有如下公式:

$$\begin{cases} B(L, Y) = \max \left(\sum_{t=1}^L z_{tY} F_X(t, Y) \right) \\ \text{s.t. } \sum_{t=1}^L t z_{tY} \leq L, z_{tY} \in N, t = 1, \dots, L \end{cases} \quad (4)$$

上述模型是典型的背包问题,可利用文献[13]中的动态规划算法求解。其中,背包长度为 L ,需要考虑 L 种物品,第 t 个物品的长度为 t (对应于尺寸为 $t \times Y$ 的块),该物品个数为 Z_{tY} 。

2.4 最优 DMS 方式

设最优 X -DMS排样方式的价值为 V_{X-DMS} ,对应水平分割线的位置为 $Y_{\max}$,则:

$$V_{X-DMS} = B(L, Y_{\max}) + B(L, W - Y_{\max}) = \max \{B(L, Y) + B(L, W - Y) | Y = 1, \dots, W/2\} \quad (5)$$

2.5 生成 DMS 方式算法步骤

步骤 1. 按式(2)确定各种尺寸的条带的价值。

步骤 2. 按式(3)确定各种尺寸的块的价值。

步骤 3. 求解式(4),得到各种尺寸的段的价值。

步骤 4. 按式(5)确定 X -DMS排样方式的价值。

步骤 5. 交换板材的长与宽,交换每种毛坯的长与宽,调用步骤 1~4 确定 Y -DMS排样方式的价值。

步骤 6. 选取 X -DMS和 Y -DMS两个排样方式中价值较大者作为最优 DMS 排样方式。

2.6 算法的时间复杂度

(1) 式(2)确定条带价值的复杂度为 $O(mL)$ 。

(2) 式(3)确定块价值 $F_X(x, y)$ 的复杂度为 $O(mWL)$ 。

(3) 式(4)确定高度一定段价值 $B(L, Y)$ 的复杂度为 $O(L^2W)$ 。

(4) 式(5)确定最优 X -DMS排样价值 V_{X-DMS} 的复杂度为 $O(W)$ 。

由于 $m \ll L$,综上所述, X -DMS排样算法的时间复杂度为 $O(L^2W)$,同理可得 Y -DMS排样算法的时间复杂度为 $O(LW^2)$,则 DMS 算法总的时间复杂度为 $O(LW(L+W))$ 。

3 实验计算结果

实验所使用计算机为 Pentium(R) Dual-Core CPU,主频 3.0 GHz,内存 2.0 GB。采用文献中的两组基准测题,将本文 DMS 算法与多种文献算法相比较。

3.1 第一组基准测题

将 DMS 算法与同质条带两段布局算法^[5]和同质条带三块布局算法^[12]相比较。三者均采用同质条带。采用文献[5]中表 4 详细描述 6 个例题数据,其中板材尺寸 3000×1500(单位均为 mm),每题 30 种毛坯,毛坯的单价和面积相等。计算结果

如表 1 所示,其中 ID 表示题号, $V_{T-2SECTION}$ 、 $V_{T-3BLOCK}$ 和 V_{DMS} 分别为文献[5]、文献[12]和 DMS3 种算法所得解值,每题的最好解(解值最大者)以黑体表示。所获得的最好解的数量,对于 DMS 算法为 6 个,文献[5]算法为 1 个,文献[12]算法为 2 个,说明 DMS 算法对于提高解的质量最为有效。 $usage$ 为 DMS 算法所得各题的材料利用率,平均值为 99.70%。DMS 算法平均每题的计算时间为 0.24 s,在实际应用中合理。图 5 为本文算法生成的测题 1 的排样方式图。

表 1 第一组基准测题的实验结果

ID	$V_{T-2SECTION}$	$V_{T-3BLOCK}$	V_{DMS}	$usage$ (%)
P1	4 480 372	4 480 372	4 483 590	99.63
P2	4 484 676	4 484 676	4 484 676	99.66
P3	4 484 956	4 489 341	4 489 836	99.77
P4	4 475 765	4 480 499	4 485 219	99.67
P5	4 480 978	4 482 492	4 482 821	99.62
P6	4 491 008	4 494 340	4 494 340	99.87

1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2
25	25	25	25	25	25	25	25	2	2	2	2	2
25	25	25	25	25	25	25	25	2	2	2	2	2
25	25	25	25	25	25	25	25	2	2	2	2	2
19		19		19		19		25	25	25	25	25
								24	24	24	24	24

图 5 测题 1 的排样方式图

3.2 第二组基准测题

将 DMS 算法分别与文献[3]的 TABU500 和文献[12]的算法相比较。采用文献[3]中表 10 报道的 20 个例题,其中,每题毛坯种数在区间[10, 60]中,板材长度和宽度在[1500, 3000]中,毛坯长度在[0.05 L , 0.4 L]中,毛坯宽度在[0.05 W , 0.4 W]中。前 10 题(APT10-APT19)中,毛坯的价值和面积相等;后 10 题(APT20-APT29)中,毛坯的价值和面积不相等。具体计算结果如表 2 所示,其中 ID 为例题标识, $V_{TABU500}$ 、 $V_{T-3BLOCK}$ 和 V_{DMS} 分别表示、文献[3]算法、文献[12]算法和 DMS 算法的解值,每题的最好解以黑体表示。所得最好解的数量,对于 DMS 算法为 19 个,文献[3]算法为 5 个,文献[12]算法为 7 个, DMS 的求解结果均优于两个对比算法,说明 DMS 算法对于提高解的质量最为有效。DMS 算法平均每题的计算时间为 0.39 s,能满足应用需求。图 6 给出了 DMS 算法生成的测题 APT16 和 APT22 的排样方式图。

