

$\mathbb{R}^n$ 中具有非双曲奇点的异宿分支 *

孙建华

(南京大学数学系, 南京 210008)

摘 要

考虑具有两个非双曲奇点的 n 维异宿系统. 对这类 $\mathbb{R}^n$ 中的高余维分支问题, 求得 Melnikov 型向量分支函数, 以保证在两个非双曲奇点所分裂出的新奇点间存在异宿轨线.

关键词 非双曲奇点、异宿轨线、指数三分法、Melnikov 向量函数、分支

1 引 言

考虑 n 维含参数自治系统

$$\dot{x} = F(x, \alpha), \quad (1.1)_\alpha$$

其中 $x \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \in \mathbb{R}^k$, $F: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ 为足够次可微函数. 假设 $(1.1)_0$ 具有连结两个奇点 P_0 和 P_1 的异宿轨线 Γ_0 (不排除 P_0 与 P_1 重合, Γ_0 为同宿轨的情形). 当 $|\alpha| \neq 0$ 充分小时, $(1.1)_\alpha$ 在 Γ_0 附近的轨线结构一般将发生变化. 对两个奇点均为双曲奇点的情形, 不少作者进行过研究^[1, 2]. 近来, 人们的研究兴趣已转向 P_0 或 P_1 为非双曲奇点的情形. 如 Γ_0 为同宿轨的情形^[3, 4]; $n=2$, Γ_0 为异宿轨, 而 P_0 和 P_1 之一为非双曲奇点的情形^[5]; 文献[6] 对 $\mathbb{R}^3$ 中类似的问题进行了研究, 得到相空间和参数空间中详尽的分支拓扑结构图.

本文研究当 P_0 和 P_1 均为非双曲奇点时, 系统 (1.1) 在 $\Gamma_0 \cup \{P_0, P_1\}$ 邻近的分支结构问题. 我们首先用 Lypunov-Schmidt 方法和 C^p -奇异理论研究非双曲奇点 P_0 和 P_1 的局部分支; 然后用指数三分法研究系统 $(1.1)_0$ 的线性变分系统的解结构; 进而研究大范围的异宿分支, 得到 Melnikov 向量函数型的条件, 以保证在 P_0 和 P_1 分支出的新奇点间沿(强)不变流形存在异宿轨线. 最后, 我们给出一个具体例子.

2 奇 点 分 支

考虑含参数系统

$$\dot{x} = F(x, \alpha), \quad (2.1)_\alpha$$

1994-01-03 收稿, 1994-04-06 收修改稿.

* 国家自然科学基金和江苏省自然科学基金资助项目.

其中 $x \in \mathbb{R}^n$, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k) \in \mathbb{R}^k$. 假设

(1) $F: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ 为 C^r -向量函数, $r \geq 2$.

(2) $\forall \alpha \in \mathbb{R}^k$, $F(P_i, \alpha) = 0$, $i=0, 1$. $\alpha=0$ 时, $D_x F(P_i, 0)$ 有特征值 λ_j^i , $0, \beta_l^i$, 其中 $\operatorname{Re} \lambda_j^i < 0$, $\operatorname{Re} \beta_l^i > 0$, $j=1, \dots, n_i^+$, $l=1, \dots, n_i^-$, $n_i^- + n_i^+ + 1 = n$, $i=0, 1$.

以 $v_i^j(v_{-i}^j)$ 记 P_i 点对应于特征值 0 的右(左)单位特征向量, $i=0, 1$.

(3) $v_{-i}^j D_x^2 F(P_i, 0)(v_i^j, v_i^j) > 0$, $v_{-i}^j D_{x\alpha_l} F(P_i, 0)v_i^j > 0$, $i=0, 1$.

在条件(2)和(3)下, 对 $|\alpha| \neq 0$ 充分小, (2.1)₀ 式在 P_i 点出现 transcritical 分支. 下述局部分支结果可用 Lypunov-Schmidt 方法及 C^p -奇异理论^[7-9] 证明之. 由于篇幅限制, 略去其细节. 请参见文献[6].

定理 1 假设条件(1)–(3)成立, 则在参数空间 $\mathbb{R}^k$ 的原点的某邻域内, 存在两个 $k-1$ 维的超曲面 $\Sigma_i: \alpha_1 = E_i(\alpha_2, \dots, \alpha_k)$, $0 \in \Sigma_i$, 使得当 $\alpha \in \Sigma_i$ 时, 除双曲奇点 P_i 外, 还存在双曲奇点 $P_i(\alpha) \in C^{r-1}(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^n)$ 满足 $F(P_i(\alpha), \alpha) = 0$; 当 $\alpha \in \Sigma_i$ 时, $P_i(\alpha) = P_i$. 进一步, 当 $\alpha \in \{\alpha \in \mathbb{R}^k | \alpha_1 > E_i(\alpha_2, \dots, \alpha_k)\}$ 时, $\dim W^u(P_i) = n_i^- + 1$, $\dim W^s(P_i(\alpha)) = n_i^+ + 1$; 当 $\alpha \in \{\alpha \in \mathbb{R}^k | \alpha_1 < E_i(\alpha_2, \dots, \alpha_k)\}$ 时, $\dim W^s(P_i) = n_i^+ + 1$, $\dim W^u(P_i(\alpha)) = n_i^- + 1$, $i=0, 1$.

定理中新奇点 $P_i(\alpha) \in C^{r-1}(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^n)$ 的结论对大范围异宿分支的研究是重要的. 如非双曲奇点 P_i , $i=0, 1$, 具有鞍结点(Saddle-node)分支, 按上述方法所得到的新奇点未必可微. 但我们可施行变量代换, 使新奇点满足可微性. 对 P_i 具有 Pitchfork 分支及 P_0 和 P_1 具有不同类型分支时, 可类似处理.

3 指数三分法和解结构

考虑线性系统

$$\dot{x} = A(t)x, \quad t \in J \subset \mathbb{R}, \quad (3.1)$$

其中 $x \in \mathbb{R}^n$, $A(t)$ 为 $n \times n$ 阶有界矩阵函数. 令 $X(t)$ 为 (3.1) 式的基本解矩阵, $X(0) = I$.

定义 1 如存在投影 P, Q, R , $P+Q+R=I$, 以及常数 K, ε, δ , $0 < \varepsilon < \delta$, $K \geq 1$, 使得

$$\|X(t)PX^{-1}(s)\| \leq Ke^{-\delta(t-s)}, \quad s, t \in J, \quad s \leq t,$$

$$\|X(t)QX^{-1}(s)\| \leq Ke^{\delta(t-s)}, \quad s, t \in J, \quad t \leq s,$$

$$\|X(t)RX^{-1}(s)\| \leq Ke^{\varepsilon|t-s|}, \quad s, t \in J,$$

则称系统 (3.1) 或解矩阵 $X(t)$ 在 J 上具有指数三分法, 其中 ε, δ 称为三分法的指数.

引理 1^[10] 设 (3.1) 在 $J = \mathbb{R}^+ = [0, \infty)$ (或 $\mathbb{R}^- = (-\infty, 0]$) 上具有指数三分法, 其投影为 P, Q, R . 如矩阵函数 $B(t)$ 在 J 上有界, 即 $\sup_{t \in J} |B(t)| < \sigma$, 则线性系统

$$\dot{x} = [A(t) + B(t)]x$$

在 J 上亦具有指数三分法, 其投影为 $\bar{P}, \bar{Q}, \bar{R}$; 且当 σ 充分小时, 投影 $\bar{P}, \bar{Q}, \bar{R}$ 分别与 P, Q, R 同秩.

现在, 我们进一步假设

(4) (2.1)₀ 存在一条连结 P_1 与 P_0 的异宿轨线

$$\Gamma_0 = \{x_0(t) | t \in \mathbb{R}\}, \text{ 并且当 } t \rightarrow (-1)^i \infty \text{ 时, } x_0(t) \rightarrow P_i, \quad i=0, 1,$$

其渐近速度为指数式的.

以 $W^u(P_1)$ 记奇点 P_1 的不稳定流形, 即其于 P_1 点的切空间为由特征值 $\beta_l^1, l=1, \dots, n_1^-$ 对应的特征向量所张成的不稳定子空间, 类似定义 $W^s(P_0)$. 由假设 (4) 知, $\Gamma_0 \subset W^s(P_0) \cap W^u(P_1)$.

$$(5) \dim[T_p W^s(P_0) \cap T_p W^u(P_1)] = m, \quad P \in \Gamma_0.$$

考虑系统 (2.1)₀ 的线性变分方程

$$\dot{x} = D_x F(x_0(t), 0)x. \quad (3.2)$$

记 $A(t) = D_x F(x_0(t), 0)$. 显然, $A(t) \rightarrow D_x F(P_1, 0)$, 当 $t \rightarrow (-1)^+\infty$. 而系统 $\dot{x} = D_x F(P_1, 0)x$ 在 $\mathbb{R}^+$ 上有指数三分法. 令 $A(t) = D_x F(P_1, 0) + [A(t) - D_x F(P_1, 0)]$. 据引理 1, 系统 (3.2) 在 $\mathbb{R}^+$ 上有指数三分法, 其投影分别为 P_+, Q_+, R_+ ; 且不失一般性, 取三分法的指数同为 ε, δ , 常数为 K .

(3.2) 式的伴随方程为

$$\dot{y} = -A(t)^*y, \quad (3.3)$$

其中 $A(t) = D_x F(x_0(t), 0)$. 因 (3.2) 式在 $\mathbb{R}^+$ 上有指数三分法, (3.3) 式亦然, 且在 $\mathbb{R}^+$ 上的投影为 Q_+^*, P_+^*, R_+^* . 记 $l = \dim[T_p W^s(P_0) + T_p W^u(P_1)]^c$. 易见, $l - n = n_0^+ - n_1^- + m$.

引理 2 设条件 (4) 和 (5) 成立, 则变分方程 (3.2) 在 $\mathbb{R}$ 上恰有 m 个线性独立的指数式有界解; 其伴随方程 (3.3) 在 $\mathbb{R}$ 上有 l 个线性独立的有界解 $\psi_i(t)$ 满足 $|\psi_i(t)| \leq K e^{\varepsilon|t|}, i=1, \dots, l$.

证 记 (3.2) 式的基解矩阵为 $X(t)$, 则解 $\varphi_i(t) = X(t)\varphi_i$ 在 $\mathbb{R}$ 上指数式有界当且仅当 $\varphi_i \in \mathcal{P}_+ \cap \mathcal{R}Q_-$; 而 $\mathcal{P}_+ \cap \mathcal{R}Q_-$ 同构于 $T_p W^s(P_0) \cap T_p W^u(P_1)$. 由条件 (5) 知, (3.2) 式在 $\mathbb{R}$ 上恰有 m 个线性独立的指数式有界解 $\varphi_i(t), i=1, \dots, m$. 显然, $\dot{x}_0(t)$ 为其中之一.

易见, 伴随方程 (3.3) 的基解矩阵为 $X^{-1}(t)^*$. (3.3) 式的解 $\psi_i(t)$ 在 $\mathbb{R}$ 上有界当且仅当初值向量 $\psi_i \in \mathcal{P}_+^* \cap \mathcal{R}Q_-^*$. 这同构于 $[\mathcal{P}_+ + \mathcal{R}Q_-]^c$, 而后者又同构于 $[T_p W^s(P_0) + T_p W^u(P_1)]^c$. 故 (3.3) 式在 $\mathbb{R}$ 上存在 l 个线性无关的有界解 $\psi_i(t) = X^{-1}(t)^*\psi_i$. 由指数三分法知, $|\psi_i(t)| \leq K e^{\varepsilon|t|}, i=1, \dots, l$.

现在考虑空间 $T_p \mathbb{R}^n, p \in \Gamma_0$ 的下述直和分解:

$$\begin{aligned} T_p \mathbb{R}^n = & \{T_p W^u(P_1) \setminus [T_p W^s(P_0) \cap T_p W^u(P_1)]\} \\ & \oplus \{T_p W^s(P_0) \cap T_p W^u(P_1)\} \\ & \oplus \{T_p W^s(P_0) \setminus [T_p W^s(P_0) \cap T_p W^u(P_1)]\} \\ & \oplus \{[T_p W^s(P_0) + T_p W^u(P_1)]^c\} \\ = & A \oplus B \oplus C \oplus D. \end{aligned} \quad (3.4)$$

可见, $\dim A = n_1^- - m, \dim B = m, \dim C = n_0^+ - m, \dim D = l$. 定义指标集 $I_1 = \{1, 2, \dots, n_1^- - m\}, I_2 = \{1, \dots, m\}, I_3 = \{1, 2, \dots, n_0^+ - m\}, I_4 = \{1, \dots, l\}$.

现按下述方式取定系统 (3.2) 的一个基本解组:

取 $n_1^- - m$ 个线性无关的初值向量 $x_i \in A$, 得解 $x_i(t), i \in I_1$; 取 m 个线性无关的初值向量 $y_i \in B$, 得解 $y_i(t), i \in I_2$; 取 $n_0^+ - m$ 个线性无关的初值向量 $z_i \in C$, 得解 $z_i(t), i \in I_3$; 取 l 个线性无关的初值向量 $w_i \in D$, 得解 $w_i(t), i \in I_4$. 易见, $x_i(t), i \in I_1; y_i(t), i \in I_2; z_i(t), i \in I_3; w_i(t), i \in I_4$ 构成变分方程 (3.2) 的一个基本解组. 不妨记 $y_1(t) = \dot{x}_0(t)$.

4 异宿分支

假设系统 (2.1) _{α} 满足条件 (1)–(5). 由第 2 节可知, 对 $|\alpha| \neq 0$ 充分小, 奇点 P_i 分支出新奇点 $P_i(\alpha), i=0, 1$. 本节的目的是寻求条件, 以保证在新奇点 $P_i(\alpha), i=0, 1$ 之间, 沿着 (强) 不变流形存在异宿轨道.

为确定起见, 假设 $\alpha \in \{\alpha \in \mathbb{R}^l | \alpha_1 > E_i(\alpha_2, \dots, \alpha_k, i=0, 1)\}$. 记 $W^u(P_1(\alpha))$ 为 $P_1(\alpha)$ 点的不稳定流形, $W^{ss}(P_0(\alpha))$ 为 $P_0(\alpha)$ 点的强稳定流形. 由定理 1 知, $\dim W^u(P_1(\alpha)) = n_1^-$, $\dim W^{ss}(P_0(\alpha)) = n_0^+$.

过 $x_0(0) \in \Gamma_0$, 构造 Poincaré 截面 π , 使其横截于 $y_1(0) = \dot{x}_0(0)$. 取 $x_i(0)$, $i \in I_1$; $y_i(0)$, $i \in I_2 - \{1\}$; $z_i(0)$, $i \in I_3$; $w_i(0)$, $i \in I_4$, 作为 π 的一组基向量. 则 π 上任一点可表示为

$$x_0(0) + \sum_{i \in I_1} a_i x_i(0) + \sum_{i \in I_2 - \{1\}} b_i y_i(0) + \sum_{i \in I_3} c_i z_i(0) + \sum_{i \in I_4} d_i w_i(0).$$

记 $a \in \mathbb{R}^{n_1^- - m}$, $b \in \mathbb{R}^{m-1}$, $c \in \mathbb{R}^{n_0^+ - m}$, $d \in \mathbb{R}^l$.

对 $|\alpha| \neq 0$ 充分小, $P_1(\alpha)$ 的不稳定流形 $W^u(P_1(\alpha))$ 交 π 于一子流形, 其方程可表为

$$c = \tilde{c}(a, b, \alpha), \quad (4.1)_1$$

$$d = \tilde{d}(a, b, \alpha), \quad (4.1)_2$$

其中 $\tilde{c}(0) = 0$, $D_c \tilde{c}(0) = 0$. 同理, $P_0(\alpha)$ 的强稳定流形 $W^{ss}(P_0(\alpha))$ 交 π 于一子流形, 其方程可表为

$$a = \bar{a}(b, c, \alpha) \quad (4.2)_1$$

$$d = \bar{d}(b, c, \alpha), \quad (4.2)_2$$

其中 $\bar{a}(0) = 0$, $D_c \bar{a}(0) = 0$.

据隐函数定理, 从 (4.1)₁, (4.2)₁ 式可解得

$$a = a(b, \alpha), \quad c = c(b, \alpha). \quad (4.3)$$

于是, 如果

$$V(b, \alpha) = \tilde{d}(a(b, \alpha), b, \alpha) - \bar{d}(b, c(b, \alpha), \alpha) = 0, \quad (4.4)$$

则在 $P_1(\alpha)$ 与 $P_0(\alpha)$ 之间沿 (强) 不变流形存在异宿轨. 显然, $V: \mathbb{R}^{m-1} \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^l$, $V(b, 0) = 0$ 且 $V \in C^{r-1}(\mathbb{R}^{m-1} \times \mathbb{R}^k, \mathbb{R}^l)$.

我们不妨设 $k \geq l$, 现计算 $\frac{\partial V}{\partial \alpha}(0)$ 的表达式. 记 $x^s(t; b, c, \alpha)$ 为 (2.1) 式当 $t=0$ 时过 π 上点 (a, b, c, d) 且位于 $W^{ss}(P_0(\alpha))$ 上的解, 其中 $a = a(b, c, \alpha)$, $d = \bar{d}(b, c, \alpha)$, 而 $c = c(b, \alpha)$; 又记 $x^u(t; a, b, \alpha)$ 为 (2.1) 式当 $t=0$ 时过 π 上点 (a, b, c, d) 且位于 $W^u(P_1(\alpha))$ 上的解, 其中 $c = \tilde{c}(a, b, \alpha)$, $d = \tilde{d}(a, b, \alpha)$, 而 $a = a(b, \alpha)$. 显然, 由 Γ_0 的存在性知,

$$x^u(t; 0) = x^s(t; 0) = x_0(t).$$

不难看出,

$$V(b, \alpha) = \Psi^*(0)[x^u(0; a(b, \alpha), b, \alpha) - x^s(0; b, c(b, \alpha), \alpha)], \quad (4.5)$$

其中 $\Psi(t) = (\psi_1(t), \dots, \psi_l(t))$.

注意到, $\mathcal{D}_a x^u(0) = \text{span}\{x_i(0), i \in I_1\}$, $\mathcal{D}_b x^u(0) = \text{span}\{y_i(0), i \in I_2 - \{1\}\}$, $\mathcal{D}_c x^u(0) = \text{span}\{y_i(0), i \in I_2 - \{1\}\}$, $\mathcal{D}_d x^u(0) = \text{span}\{z_i(0), i \in I_3\}$. 则

$$\Psi(0)^* \mathcal{D}_a x^u(0) = \Psi(0)^* \mathcal{D}_b x^u(0) = 0,$$

$$\Psi(0)^* \mathcal{D}_c x^u(0) = \Psi(0)^* \mathcal{D}_d x^u(0) = 0.$$

故

$$\frac{\partial V}{\partial \alpha}(0) = \Psi(0)^* \left[\frac{\partial x^u}{\partial \alpha}(0) - \frac{\partial x^s}{\partial \alpha}(0) \right]. \quad (4.6)$$

令

$$\Delta^j(t) = \Psi(t)^* \frac{\partial x^j}{\partial \alpha}(t; 0), \quad j = u, s. \quad (4.7)$$

则

$$\Delta'(t) = \dot{\Psi}(t)^* \frac{\partial x'}{\partial \alpha}(t; 0) + \Psi(t)^* \{D_x F(x_0(t), 0) \frac{\partial x'}{\partial \alpha}(t; 0) + \frac{\partial F}{\partial \alpha}(x_0(t), 0)\}.$$

因 $\Psi(t)$ 为伴随方程 (3.3) 的解矩阵, 则

$$\dot{\Psi}(t)^* = -\Psi(t)^* D_x F(x_0(t), 0).$$

所以

$$\Delta'(t) = \Psi(t)^* \frac{\partial F}{\partial \alpha}(x_0(t), 0). \quad (4.8)$$

当 $j=u$ 时, 对 (4.8) 式从 t_1 到 0 积分, 得

$$\Delta^u(0) = \Delta^u(t_1) + \int_{t_1}^0 \Psi(t)^* \frac{\partial F}{\partial \alpha}(x_0(t), 0) dt, \quad (4.9)$$

当 $j=s$ 时, 对 (4.8) 式从 0 到 t_2 积分, 得

$$-\Delta^s(0) = -\Delta^s(t_2) + \int_0^{t_2} \Psi(t)^* \frac{\partial F}{\partial \alpha}(x_0(t), 0) dt. \quad (4.10)$$

则

$$\frac{\partial V}{\partial \alpha}(0) = \Psi(t_1)^* \frac{\partial x^u}{\partial \alpha}(t_1; 0) - \Psi(t_2)^* \frac{\partial x^s}{\partial \alpha}(t_2; 0) + \int_{t_1}^{t_2} \Psi(t)^* \frac{\partial F}{\partial \alpha}(x_0(t), 0) dt. \quad (4.11)$$

由条件 (4), 存在正常数 $\bar{\delta}, \bar{K}$, 使得

$$\begin{aligned} |x_0(t) - P_1| &\leq \bar{K} e^{\bar{\delta}t}, & t < 0, \\ |x_0(t) - P_0| &\leq \bar{K} e^{-\bar{\delta}t}, & t > 0. \end{aligned}$$

则 $\left| \frac{\partial F}{\partial \alpha}(x_0(t), 0) \right| = \left| \frac{\partial F}{\partial \alpha}(x_0(t), 0) - \frac{\partial F}{\partial \alpha}(P_1, 0) \right| \leq M |x_0(t) - P_1| \leq M \bar{K} e^{\bar{\delta}t}, t < 0$. 又 $|\Psi(t)^*| \leq K e^{-\alpha t}, t < 0$. 故

$$|\Psi(t)^* \frac{\partial F}{\partial \alpha}(x_0(t), 0)| \leq M K \bar{K} e^{(\bar{\delta} - \alpha)t}, \quad t < 0.$$

而对 α 充分小, $\bar{\delta} - \alpha > 0$. 所以

$$\int_{-\infty}^0 \Psi(t)^* \frac{\partial F}{\partial \alpha}(x_0(t), 0) dt < \infty.$$

同理可证,

$$\int_0^{\infty} \Psi(t)^* \frac{\partial F}{\partial \alpha}(x_0(t), 0) dt < \infty.$$

故当 $t_1 \rightarrow -\infty, t_2 \rightarrow \infty$ 时, (4.11) 式中的反常积分收敛. 另外, 可以证明,

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{\partial x^u}{\partial \alpha}(t; 0) = \frac{\partial P_1(0)}{\partial \alpha}, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\partial x^s}{\partial \alpha}(t; 0) = \frac{\partial P_0(0)}{\partial \alpha}.$$

这里略去细节.

总之, 我们有

$$\frac{\partial V}{\partial \alpha}(0) = \Psi(-\infty)^* \frac{\partial P_1}{\partial \alpha}(0) - \Psi(\infty)^* \frac{\partial P_0}{\partial \alpha}(0) + \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(t)^* \frac{\partial F}{\partial \alpha}(x_0(t), 0) dt. \quad (4.12)$$

由以上讨论, 利用隐函数定理不难证明本文的主要结果:

定理 2 设系统 (2.1) 满足条件 (1)–(5). 如果 $l \times k$ 阶矩阵 $\left(\frac{\partial V}{\partial \alpha}(0)\right)$ 的秩为 l , 则在参数空间 $\mathbb{R}^k$ 的原点的某邻域内, 存在一个 $k-l$ 维的超曲面 Σ , $0 \in \Sigma$; 当 $\alpha \in \Sigma$ 时, 系统 (2.1) 沿着 $P_1(\alpha)$ 的不稳定流形和 $P_0(\alpha)$ 的强稳定流形存在异宿轨线.

我们称 (4.12) 式为 Melnikov 向量函数. 注意到, 如 $\dim W^s(P_0) \cap W^u(P_1) = 1$, 即仅存在一条异宿轨线, Melnikov 向量函数作为距离向量 $V(b, \alpha)$ 关于 α 的一次近似量, 并不含有参数 b .

文献 [11] 用横截性理论研究连结两个双曲奇点的异宿轨分支, 得到相应的 Melnikov 向量函数. 注意到, 如 P_0 和 P_1 均为双曲奇点, 则 (4.12) 式即化为其中的 Melnikov 向量. 文献 [6] 研究了具有双曲奇点和一个非双曲奇点的异宿分支, 得到分支向量 (4.11). 实际上, (4.12) 式可等价地化为文献 [6] 中的 (4.11) 式¹⁾.

5 示 例

考虑三维系统

$$\dot{u} = F(u, \alpha) \quad (5.1)$$

即

$$\dot{x} = x^2 - \alpha_1 x + \alpha_2 y(y-1), \quad \dot{y} = y(y-1) + \alpha_2 x y^2(1-y), \quad \dot{z} = z(1-2y) - \alpha_3 y(y-1).$$

对一切 $\alpha \in \mathbb{R}^3$, (5.1) 式有非双曲奇点 $P_0(0, 0, 0)$, $P_1(0, 1, 0)$. 对 $\alpha_1 \neq 0$, 除双曲奇点 P_0, P_1 外, 还有双曲奇点 $P_0(\alpha) = (\alpha_1, 0, 0)$, $P_1(\alpha) = (\alpha_1, 1, 0)$. (5.1)₀ 式有从 P_1 到 P_0 的鞍点连线 $u_0(t) = \left(0, \frac{1}{1+e^t}, 0\right)^T$. 记 $y_0(t) = \frac{1}{1+e^t}$. 不难看出, 在 (5.1) 式中, $n_1^- = n_0^+ = m = 1$, $l = 2$.

(5.1)₀ 式沿 $u_0(t)$ 的一阶变分方程为

$$\dot{x} = 0, \quad \dot{y} = \frac{1-e^t}{1+e^t} y, \quad \dot{z} = \frac{e^t-1}{1+e^t} z. \quad (5.2)$$

显然, (5.2) 式满足指数三分法, 其标准基解矩阵为 $X(t) = \text{diag}(1, 4e^t(1+e^t)^{-2}, \frac{1}{4} e^{-t}(1+e^t)^2)$. 在 $\mathbb{R}$ 上, (5.2) 式仅有一个指数式有界解 $u_2(t) = (0, 4e^t(1+e^t)^{-2}, 0)^T$. (这与 $m=1$ 一致). (5.2) 式的伴随方程的标准基解矩阵为 $\bar{y}(t) = \text{diag}\left(1, \frac{1}{4} e^{-t}(1+e^t)^2, 4e^t(1+e^t)^{-2}\right)$. 不难看出, 伴随方程在 $\mathbb{R}$ 上有两个有界解 $v_1(t) = (1, 0, 0)^T$, $v_2(t) = (0, 0, 4e^t(1+e^t)^{-2})^T$, 满足 $|v_i(t)| \leq K e^{|t|}$, $i=1, 2$, (这与 $l=2$ 一致). 进一步, $v_2(t)$ 为指数式有界解, 而 $v_1(t)$ 为非指数式有界解. 记 $\Psi(t) = (v_1(t), v_2(t))$.

1) 孙建华, 两类 Melnikov 函数的等价性, 预印本.

显然, $\Psi(-\infty) = \Psi(\infty) = (e_1, 0)$, $\frac{\partial P_i(0)}{\partial \alpha} = (e_i, 0, 0)$, $i=0, 1$. 所以, $\Psi(-\infty)^* \frac{\partial P_i(0)}{\partial \alpha} = (e_i, 0)^*$, $\Psi(\infty)^* \frac{\partial P_0(0)}{\partial \alpha} = (e_1, 0)^*$. 由 $\frac{\partial F}{\partial \alpha}(u_0(t), 0) = (0, \dot{y}(t)e_1, -\dot{y}(t)e_3)$, 得

$$\Psi^*(t) \frac{\partial F}{\partial \alpha}(u_0(t), 0) = (0, \dot{y}(t)e_1, -4e^t(1+e^t)^{-2}\dot{y}(t)e_3)$$

经计算,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \dot{y}(t) dt = -1, \quad \int_{-\infty}^{\infty} 4e^t(1+e^t)^{-2}\dot{y}(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} 4e^{2t}/(1+e^t)^4 dt = \frac{2}{3}.$$

故

$$\frac{\partial V}{\partial \alpha}(0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{3} \end{pmatrix},$$

其秩为 $2 (=l)$.

由定理 2 知, 在 α -参数空间的原点的某邻域内, 存在一条曲线 $L_1: \alpha_2 = o(\alpha_1^2)$, $\alpha_3 = o(\alpha_1^2)$, $0 \in L_1$, 使得当 $\alpha \in L_1$ 时, (5.1) 式沿 (强) 不变流形存在 $P_1(\alpha)$ 到 $P_0(\alpha)$ 的异宿轨线.

因

$$\Psi(-\infty)^* \frac{\partial P_1}{\partial \alpha} = (0, 0)^*, \quad \Psi(\infty)^* \frac{\partial P_0(0)}{\partial \alpha} = (e_1, 0)^*,$$

则此时

$$\frac{\partial V}{\partial \alpha}(0) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

可见从 P_1 到 $P_0(\alpha)$ 的异宿轨分支曲线为 $L_2: \alpha_2 = -\alpha_1 + o(\alpha_1)$, $\alpha_3 = o(\alpha_1^2)$. 同理, 从 $P_1(\alpha)$ 到 P_0 的异宿轨分支曲线为 $L_3: \alpha_2 = \alpha_1 + o(\alpha_1)$, $\alpha_3 = o(\alpha_1^2)$.

参 考 文 献

- [1] Chow, S. N., Deng, B., Teaman, D., *SIAM J. Math. Anal.*, 1990, 21(1): 179—204.
- [2] Kokubu, H., *Japan J. Appl. Math.*, 1988, 5(3): 455—501.
- [3] Chow, S. N., Lin, X. B., *Diff. Int. Equations*, 1990, 3(3): 435—466.
- [4] Deng, B., *SIAM J. Math. Anal.*, 1990, 21(3): 693—720.
- [5] Schechter, S., *Nonlinearity*, 1990, 3(1): 79—99.
- [6] Sun, J. H., Luo, D. J., *Science in China, Series A*, 1994, 37(5): 523—534.
- [7] Schechter, S., *J. D. E.*, 1992, 99(2): 306—341.
- [8] Chow, S. N., Hale, J. K., *Methods of Bifurcation Theory*, Springer-Verlag, New York, 1982.
- [9] Golubitsky, M., Schaeffer, D. G., *Singularities and Groups in Bifurcation Theory*, Vol. I, Springer-Verlag, New York, 1985.
- [10] Hale, J. K., Lin, X. B., *J. D. E.*, 1986, 65(2): 175—202.
- [11] 朱德明, 中国科学, A 辑, 1994, 24(4): 346—352.