由外部范畴产生的三角商范畴

献给刘绍学教授 90 华诞

周潘岳¹, 朱彬^{2*}

1. 湖南理工学院数学学院, 岳阳 414006;

2. 清华大学数学科学系, 北京 100084

E-mail: panyuezhou@163.com, bzhu@math.tsinghua.edu.cn

收稿日期: 2017-09-29; 接受日期: 2018-04-12; 网络出版日期: 2018-10-19; * 通信作者

国家自然科学基金 (批准号: 11671221) 和湖南省自然科学基金 (批准号: 2018JJ3205) 资助项目

摘要 本文在外部 (extriangulated) 范畴的框架下给出了三角商范畴的一种构造, 具体而言, 给定外部范畴 $\mathcal{C}$ 中有包含关系的两个子范畴 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{X}$, 若它们满足适当的条件, 则商范畴 $\mathcal{A}/[\mathcal{X}]$ 是三角范畴. 此结果统一了 Iyama 和 Wemyss (2013) 在三角范畴框架与 Zhou 和 Zhu (2018) 在外部范畴的突变 (mutation) 框架下的已有工作.

关键词 外部范畴 三角范畴 商范畴

MSC (2010) 主题分类 18E30

1 引言

本文中讨论的范畴均是加法范畴, 当我们说它的一个子范畴时, 都是指它的一个关于同构、直和、直和项封闭的满子范畴. 设 $\mathcal{A}$ 是加法范畴, $\mathcal{X}$ 是 $\mathcal{A}$ 的一个子范畴. 态射 $f: A \rightarrow X_A$ 称为 $A \in \mathcal{A}$ 的一个左 $\mathcal{X}$ -逼近, 如果 $X_A \in \mathcal{X}$ 且如下的序列:

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X_A, \mathcal{X}) \xrightarrow{\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(f, \mathcal{X})} \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A, \mathcal{X}) \rightarrow 0$$

是正合的. 子范畴 $\mathcal{X}$ 称为 $\mathcal{A}$ 中共变有限的子范畴, 如果 $\mathcal{A}$ 中的每一个对象都存在左 $\mathcal{X}$ -逼近. 对偶地, 我们能定义右 $\mathcal{X}$ -逼近和反变有限子范畴. 既是共变有限的子范畴, 又是反变有限的子范畴, 称为函子有限的子范畴. $\mathcal{A}$ 中的态射 $f: A \rightarrow B$ 称为 $\mathcal{X}$ -单态射, 如果下面的态射:

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(f, \mathcal{X}): \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(B, \mathcal{X}) \rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A, \mathcal{X})$$

是满射. 对偶地, 我们能定义 $\mathcal{X}$ -满态射. 显然, 任意的左 $\mathcal{X}$ -逼近是 $\mathcal{X}$ -单态射, 任意的右 $\mathcal{X}$ -逼近是 $\mathcal{X}$ -满态射. 更多的细节, 参见文献 [1].

英文引用格式: Zhou P Y, Zhu B. Triangulated quotient categories arising from extriangulated categories (in Chinese). Sci Sin Math, 2018, 48: 1739–1752, doi: 10.1360/N012017-00212

给定加法范畴 $\mathcal{A}$ 的一个子范畴 $\mathcal{X}$, 我们可以定义商范畴 $\mathcal{A}/[\mathcal{X}]$. 它的对象与 $\mathcal{A}$ 的对象是一样的, 它的态射集是如下商空间:

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}/[\mathcal{X}]}(A, B) := \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A, B)/[\mathcal{X}](A, B),$$

其中 $[\mathcal{X}](A, B)$ 表示 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A, B)$ 中经过 $\mathcal{X}$ 中对象分解的态射集合. 对于态射 $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A, B)$, 我们用 $\bar{f}$ 表示它在 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}/[\mathcal{X}]}(A, B)$ 中的像.

设 $\mathcal{C}$ 是三角范畴, $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{Z}$ 是 $\mathcal{C}$ 的两个子范畴. 假设 $\mathcal{M}$ 和 $\mathcal{Z}$ 满足如下的条件:

- (1) $\mathcal{M}$ 是 $\mathcal{Z}$ 中函子有限的子范畴;
- (2) 任意 $\mathcal{Z}$ 中的 $\mathcal{M}$ -单态射 $f: Z_1 \rightarrow Z_2$, 如果 f 能嵌入如下的三角:

$$Z_1 \xrightarrow{f} Z_2 \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} Z_1[1],$$

则 $C \in \mathcal{Z}$ 和 g 是一个 $\mathcal{M}$ -满态射;

- (3) 任意 $\mathcal{Z}$ 中的 $\mathcal{M}$ -满态射 $g: Z_2 \rightarrow Z_3$, 如果 g 能嵌入如下的三角:

$$B \xrightarrow{f} Z_2 \xrightarrow{g} Z_3 \xrightarrow{h} B[1],$$

则 $B \in \mathcal{Z}$ 和 f 是一个 $\mathcal{M}$ -单态射.

通过上面的假设 (1)–(3), 文献 [2, 定理 2.1] 证明了商范畴 $\mathcal{Z}/[\mathcal{M}]$ 有三角结构. 注意到子范畴 $\mathcal{Z}$, 一般情形下不是扩张封闭的 (这个非常重要, 如果子范畴 $\mathcal{Z}$ 扩张封闭, 则文献 [2, 定理 2.1] 就是文献 [3] 的结果).

最近, Nakaoka 和 Palu^[4] 引进了一个新的范畴, 称为外部范畴, 可以看作是正合范畴和三角范畴的同时推广. Zhou 和 Zhu^[5] 在外部范畴中定义了子范畴的突变对是正合范畴^[6] 和三角范畴^[3, 7] 中的突变对概念的一般化.

定义 1.1^[5] 设 $\mathcal{X}$ 、 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 是外部范畴 $\mathcal{C}$ 中的三个子范畴, 且

$$\mathcal{X} \subseteq \mathcal{A} \quad \text{和} \quad \mathcal{X} \subseteq \mathcal{B}.$$

子范畴对 $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ 是一个 $\mathcal{X}$ -突变对, 如果满足如下的条件:

- (1) 对任意的对象 $A \in \mathcal{A}$, 存在 $\mathcal{C}$ 中的 $\mathbb{E}$ -三角:

$$A \xrightarrow{\alpha} X \xrightarrow{\beta} B \xrightarrow{\delta} \gg,$$

其中 $B \in \mathcal{B}$, α 是关于 A 的左 $\mathcal{X}$ -逼近, β 是关于 B 的一个右 $\mathcal{X}$ -逼近;

- (2) 对任意的对象 $B' \in \mathcal{B}$, 存在 $\mathcal{C}$ 中的 $\mathbb{E}$ -三角:

$$A' \xrightarrow{\alpha'} X' \xrightarrow{\beta'} B' \xrightarrow{\delta'} \gg,$$

其中 $A' \in \mathcal{A}$, α' 是关于 A' 的左 $\mathcal{X}$ -逼近, β' 是关于 B' 的一个右 $\mathcal{X}$ -逼近.

$\mathcal{C}$ 的一个子范畴 $\mathcal{A}$ 称为扩张封闭的, 如果 $\mathcal{C}$ 中的任意 $\mathbb{E}$ -三角

$$A \xrightarrow{x} B \xrightarrow{y} C \xrightarrow{\delta} \gg,$$

满足 $A, C \in \mathcal{A}$ 推出 $B \in \mathcal{A}$. Zhou 和 Zhu^[5] 证明了如下的结论: 给定外部范畴 $\mathcal{C}$ 中的两个子范畴 $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{A}$, 如果 $\mathcal{A}$ 是扩张封闭的且 $(\mathcal{A}, \mathcal{A})$ 是一个 $\mathcal{X}$ -突变对, 则商范畴 $\mathcal{A}/[\mathcal{X}]$ 是一个三角范畴.

本文给出了外部范畴中的商范畴是三角范畴的一个充分条件. 作为应用, 我们统一了文献 [2, 定理 2.1] 关于三角范畴的结果和文献 [5, 定理 3.15] 关于外部范畴的结果.

本文余下部分的内容安排如下: 第 2 节回忆了右 (左) 三角范畴的定义和外部范畴的定义及相关性质; 第 3 节叙述和证明了我们的主要结果且给出了相关的应用.

2 预备知识

首先回顾右 (左) 三角范畴定义.

定义 2.1 ^[8,9] 设 $\mathcal{C}$ 是一个加法范畴, $\Sigma: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ 是一个加法自函子, $\mathcal{C}$ 中的一个六元组是由对象 $A, B, C \in \mathcal{C}$ 以及对象间的态射 $f: A \rightarrow B, g: B \rightarrow C, h: C \rightarrow \Sigma A$ 组成, 或表示为下图:

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} \Sigma A.$$

六元组 (A, B, C, f, g, h) 与 (A', B', C', f', g', h') 之间的态射为对象之间态射的三元组 (α, β, γ) , 满足下面的交换图:

$$\begin{array}{ccccccc} A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C & \xrightarrow{h} & \Sigma A \\ \downarrow \alpha & & \downarrow \beta & & \downarrow \gamma & & \downarrow \Sigma \alpha \\ A' & \xrightarrow{f'} & B' & \xrightarrow{g'} & C' & \xrightarrow{h'} & \Sigma A' \end{array}$$

若 α, β 和 γ 为 $\mathcal{C}$ 中的同构态射, 则称 (α, β, γ) 为一个同构. 令 ∇ 为 $\mathcal{C}$ 中的一些六元组集合, 如果它满足如下的条件:

(RTR0) 对任意的对象 $A \in \mathcal{C}$, $0 \xrightarrow{0} A \xrightarrow{1_A} A \xrightarrow{0} 0$ 是 $\mathcal{C}$ 中的一个右三角;

(RTR1) 任意 $\mathcal{C}$ 中的任意态射 $f: A \rightarrow B$, 能嵌入到一个右三角:

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} \Sigma A;$$

(RTR2) 如果 $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} \Sigma A$ 是 $\mathcal{C}$ 中的一个右三角, 则

$$B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} \Sigma A \xrightarrow{-\Sigma f} \Sigma B$$

也是 $\mathcal{C}$ 中的一个右三角;

(RTR3) 如果存在如下 $\mathcal{C}$ 中的右三角之间的交换图:

$$\begin{array}{ccccccc} A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C & \xrightarrow{h} & \Sigma A \\ \downarrow \alpha & & \downarrow \beta & & & & \downarrow \Sigma \alpha \\ A' & \xrightarrow{f'} & B' & \xrightarrow{g'} & C' & \xrightarrow{h'} & \Sigma A' \end{array},$$

则存在态射 $\gamma \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(C, C')$, 使得 (α, β, γ) 为六元组之间的态射;

(RTR4) 如果

$$\begin{array}{ccccccc} A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C & \xrightarrow{h} & \Sigma A, \\ B & \xrightarrow{a} & X & \xrightarrow{b} & Y & \xrightarrow{c} & \Sigma B, \end{array}$$

$$A \xrightarrow{af} X \xrightarrow{d} Z \xrightarrow{e} \Sigma A$$

为 $\mathcal{C}$ 中的右三角, 则存在如下的交换图:

$$\begin{array}{ccccccc}
 A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C & \xrightarrow{h} & \Sigma A \\
 \parallel & & \downarrow a & & \downarrow s & & \parallel \\
 A & \xrightarrow{af} & X & \xrightarrow{d} & Z & \xrightarrow{e} & \Sigma A \\
 & & \downarrow b & & \downarrow t & & \downarrow \Sigma f \\
 & & Y & \xlongequal{\quad} & Y & \xrightarrow{c} & \Sigma B \\
 & & \downarrow c & & \downarrow q & & \\
 & & \Sigma B & \xrightarrow{\Sigma g} & \Sigma C & &
 \end{array}$$

且第三列是 $\mathcal{C}$ 中的右三角, 称三元组 $(\mathcal{C}, \Sigma, \nabla)$ 是右三角范畴, 简称 $\mathcal{C}$ 是右三角范畴. 对偶地, 能够定义左三角范畴. 如果自函子 Σ 是一个等价函子, 此时右三角范畴是三角范畴, 细节参见文献 [9].

现在主要回顾本文用到的有关外部范畴的一些定义和基本性质, 参见文献 [4].

2.1 $\mathbb{E}$ -扩张

假设 $\mathcal{C}$ 是加法范畴且带有一个双加法函子 $\mathbb{E}: \mathcal{C}^{\text{op}} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Ab}$. 对任给的两个对象 $A, C \in \mathcal{C}$, 一个元素 $\delta \in \mathbb{E}(C, A)$ 称为 $\mathbb{E}$ -扩张. 形式上, 一个 $\mathbb{E}$ -扩张就是一个三元组 (A, δ, C) . 零元素 $0 \in \mathbb{E}(C, A)$ 称为可裂的 $\mathbb{E}$ -扩张. 设 (A, δ, C) 是一个 $\mathbb{E}$ -扩张. 因为 $\mathbb{E}$ 是一个双加法函子, 对任意的态射 $a \in \mathcal{C}(A, A')$ 和 $c \in \mathcal{C}(C', C)$, 有 $\mathbb{E}$ -扩张

$$\mathbb{E}(C, a)(\delta) \in \mathbb{E}(C, A') \quad \text{和} \quad \mathbb{E}(c, A)(\delta) \in \mathbb{E}(C', A).$$

我们将其简记为 $a_*\delta$ 和 $c^*\delta$. 使用这种记号, 有如下的等式成立:

$$\mathbb{E}(c, a) = c^*a_*\delta = a_*c^*\delta.$$

假设 (A, δ, C) 和 (A', δ', C') 是任给的两个 $\mathbb{E}$ -扩张. 称

$$(a, c): (A, \delta, C) \rightarrow (A', \delta', C')$$

为两个 $\mathbb{E}$ -扩张之间的态射, 如果对任意的两个态射 $a \in \mathcal{C}(A, A')$ 和 $c \in \mathcal{C}(C, C')$, 都有等式

$$a_*\delta = c^*\delta'$$

成立. 简记为 $(a, c): \delta \rightarrow \delta'$.

假设 (A, δ, C) 和 (A', δ', C') 是任意的两个 $\mathbb{E}$ -扩张,

$$C \xrightarrow{\iota_C} C \oplus C' \xleftarrow{\iota_{C'}} C' \quad \text{和} \quad A \xleftarrow{p_A} A \oplus A' \xrightarrow{p_{A'}} A'$$

是在 $\mathcal{C}$ 中的上积和积. 由于 $\mathbb{E}$ 是双加法函子, 因此有自然同构

$$\mathbb{E}(C \oplus C', A \oplus A') = \mathbb{E}(C, A) \oplus \mathbb{E}(C, A') \oplus \mathbb{E}(C', A) \oplus \mathbb{E}(C', A').$$

通过上面的同构, 可以将 $\mathbb{E}$ -扩张 $\delta \oplus \delta' \in \mathbb{E}(C \oplus C', A \oplus A')$ 对应到唯一的一个元素 $(\delta, 0, 0, \delta')$, 其中

$$\mathbb{E}(\iota_C, p_A)(\delta \oplus \delta') = \delta, \quad \mathbb{E}(\iota_C, p_{A'})(\delta \oplus \delta') = 0, \quad \mathbb{E}(\iota_{C'}, p_A)(\delta \oplus \delta') = 0, \quad \mathbb{E}(\iota_{C'}, p_{A'})(\delta \oplus \delta') = \delta'.$$

如果 $A = A'$ 且 $C = C'$, 则和 $\delta + \delta' \in \mathbb{E}(C, A)$ 是通过如下的方式获得的:

$$\delta + \delta' = \mathbb{E}(\Delta_C, \nabla_A)(\delta \oplus \delta'),$$

其中 $\Delta_C = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}: C \rightarrow C \oplus C$, $\nabla_A = (1, 1): A \oplus A \rightarrow A$.

2.2 加法实现

任给两个对象 $A, C \in \mathcal{C}$, 如下的两个序列:

$$A \xrightarrow{x} B \xrightarrow{y} C \quad \text{和} \quad A \xrightarrow{x'} B' \xrightarrow{y'} C$$

称为是等价的, 如果存在一个同构 $b \in \mathcal{C}(B, B')$, 使得下图可交换:

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{x} & B & \xrightarrow{y} & C \\ \parallel & & \downarrow \simeq b & & \parallel \\ A & \xrightarrow{x'} & B' & \xrightarrow{y'} & C. \end{array}$$

我们把 $A \xrightarrow{x} B \xrightarrow{y} C$ 的等价类记为 $[A \xrightarrow{x} B \xrightarrow{y} C]$. 对任意对象 $A, C \in \mathcal{C}$, 记

$$0 = [A \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}} A \oplus C \xrightarrow{(0, 1)} C].$$

对任意的两个等价类 $[A \xrightarrow{x} B \xrightarrow{y} C]$ 和 $[A' \xrightarrow{x'} B' \xrightarrow{y'} C']$, 记

$$[A \xrightarrow{x} B \xrightarrow{y} C] \oplus [A' \xrightarrow{x'} B' \xrightarrow{y'} C'] = [A \oplus A' \xrightarrow{x \oplus x'} B \oplus B' \xrightarrow{y \oplus y'} C \oplus C'].$$

假设 $\mathfrak{s}$ 是所有 $\mathbb{E}$ -扩张到相应等价类之间的一个对应, 则对任意的 $\mathbb{E}$ -扩张 $\delta \in \mathbb{E}(C, A)$, 有等价类 $\mathfrak{s}(\delta) = [A \xrightarrow{x} B \xrightarrow{y} C]$. $\mathfrak{s}$ 称为 $\mathbb{E}$ 的一个实现, 如果它满足如下的条件:

- 对任意的两个 $\mathbb{E}$ -扩张 $\delta \in \mathbb{E}(C, A)$ 和 $\delta' \in \mathbb{E}(C', A')$, 有等价类

$$\mathfrak{s}(\delta) = [A \xrightarrow{x} B \xrightarrow{y} C] \quad \text{和} \quad \mathfrak{s}(\delta') = [A' \xrightarrow{x'} B' \xrightarrow{y'} C'],$$

则对任意 $\mathbb{E}$ -扩张之间的态射 $(a, c): \delta \rightarrow \delta'$, 存在态射 $b \in \mathcal{C}(B, B')$ 使得下图可交换:

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{x} & B & \xrightarrow{y} & C \\ \downarrow a & & \downarrow b & & \downarrow c \\ A' & \xrightarrow{x'} & B' & \xrightarrow{y'} & C'. \end{array}$$

在这种情形下, 如果它满足 $\mathfrak{s}(\delta) = [A \xrightarrow{x} B \xrightarrow{y} C]$, 称序列 $A \xrightarrow{x} B \xrightarrow{y} C$ 实现 δ . 注意到上述实现的条件, 不依赖于等价类的选择, 因此也称三元组 (a, b, c) 实现 (a, c) .

双加法函子 $\mathbb{E}$ 的一个实现 $\mathfrak{s}$ 称为加法的, 如果它满足如下的条件:

- (1) 对任意的两个对象 $A, C \in \mathcal{C}$, 可裂的 $\mathbb{E}$ -扩张 $0 \in \mathbb{E}(C, A)$, 满足 $\mathfrak{s}(0) = 0$;
- (2) 对任意的两个 $\mathbb{E}$ -扩张 $\delta = (A, \delta, C)$ 和 $\delta' = (A', \delta', C')$, 有如下的等式成立:

$$\mathfrak{s}(\delta \oplus \delta') = \mathfrak{s}(\delta) \oplus \mathfrak{s}(\delta').$$

2.3 外部范畴的定义

称三元组 $(\mathcal{C}, \mathbb{E}, \mathfrak{s})$ 是一个外部范畴, 在不引起混淆的情形下, 有时简记为 $\mathcal{C}$, 如果它满足如下的 4 条公理:

(ET1) $\mathbb{E}: \mathcal{C}^{\text{op}} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Ab}$ 是一个双加法函子.

(ET2) $\mathfrak{s}$ 是 $\mathbb{E}$ 的一个加法实现.

(ET3) 假设 $\delta \in \mathbb{E}(C, A)$ 和 $\delta' \in \mathbb{E}(C', A')$ 是任给的两个 $\mathbb{E}$ -扩张, 有实现

$$\mathfrak{s}(\delta) = [A \xrightarrow{x} B \xrightarrow{y} C] \quad \text{和} \quad \mathfrak{s}(\delta') = [A' \xrightarrow{x'} B' \xrightarrow{y'} C'].$$

对 $\mathcal{C}$ 中的任意的交换图

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{x} & B & \xrightarrow{y} & C \\ \downarrow a & & \downarrow b & & \\ A' & \xrightarrow{x'} & B' & \xrightarrow{y'} & C' \end{array}$$

均存在态射 $(a, c): \delta \rightarrow \delta'$ 由 (a, b, c) 实现.

(ET3)^{op} 与 (ET3) 是对偶的.

(ET4) 假设 (A, δ, D) 和 (B, δ', F) 是两个 $\mathbb{E}$ -扩张, 有实现

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{f'} D \quad \text{和} \quad B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{g'} F,$$

则存在一个对象 $E \in \mathcal{C}$ 和如下的交换图:

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{f'} & D \\ \parallel & & \downarrow g & & \downarrow d \\ A & \xrightarrow{h} & C & \xrightarrow{h'} & E \\ & & \downarrow g' & & \downarrow e \\ & & F & \xlongequal{\quad} & F, \end{array}$$

其中 $\mathbb{E}$ -扩张 $\delta'' \in \mathbb{E}(E, A)$ 由 $A \xrightarrow{h} C \xrightarrow{h'} E$ 实现且满足下面的条件:

(1) $D \xrightarrow{d} E \xrightarrow{e} F$ 实现 $f'_* \delta'$;

(2) $d^* \delta'' = \delta$;

(3) $f_* \delta'' = e^* \delta'$.

(ET4)^{op} 与 (ET4) 是对偶的.

2.4 $\mathbb{E}$ -三角与 $\mathbb{E}$ -三角之间的态射

假设 $(\mathcal{C}, \mathbb{E}, \mathfrak{s})$ 是一个外部范畴, 我们有如下的专业术语.

(1) 序列 $A \xrightarrow{x} B \xrightarrow{y} C$ 称为一个合并 (conflation), 如果它实现了某个 $\mathbb{E}$ -扩张 $\delta \in \mathbb{E}(C, A)$. 在这种情形下, 称态射 x 是一个膨胀 (inflation), 态射 y 是一个压缩 (deflation).

(2) 如果一个合并 $A \xrightarrow{x} B \xrightarrow{y} C$ 实现 $\delta \in \mathbb{E}(C, A)$, 称 $(A \xrightarrow{x} B \xrightarrow{y} C, \delta)$ 为 $\mathbb{E}$ -三角, 写成如下的形式:

$$A \xrightarrow{x} B \xrightarrow{y} C \xrightarrow{\delta} \triangleright.$$

(3) 假设 $A \xrightarrow{x} B \xrightarrow{y} C \xrightarrow{\delta} \gg$ 和 $A' \xrightarrow{x'} B' \xrightarrow{y'} C' \xrightarrow{\delta'} \gg$ 是两个 $\mathbb{E}$ -三角. 如果一个三元组 (a, b, c) 实现 $(a, c): \delta \rightarrow \delta'$, 则写成如下的形式:

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{x} & B & \xrightarrow{y} & C \xrightarrow{\delta} \gg \\ \downarrow a & & \downarrow b & & \downarrow c \\ A' & \xrightarrow{x'} & B' & \xrightarrow{y'} & C' \xrightarrow{\delta'} \gg \end{array}$$

且称 (a, b, c) 是 $\mathbb{E}$ -三角之间的态射.

2.5 投射和内射

假设 $(\mathcal{C}, \mathbb{E}, \mathfrak{s})$ 是一个外部范畴.

(1) 对象 $P \in \mathcal{C}$ 称为投射的, 如果对任意的 $\mathbb{E}$ -三角

$$A \xrightarrow{x} B \xrightarrow{y} C \xrightarrow{\delta} \gg$$

和态射 $c \in \mathcal{C}(P, C)$, 均存在 $b \in \mathcal{C}(P, B)$ 使得 $yb = c$. 我们用 $\mathcal{P}$ 表示 $\mathcal{C}$ 中所有投射对象构成的子范畴. 对偶地, 我们能够定义内射对象, 所有的内射对象构成的子范畴用 $\mathcal{I}$ 表示.

(2) 称 $\mathcal{C}$ 有足够多的投射, 如果对任意的对象 $C \in \mathcal{C}$, 均存在一个 $\mathbb{E}$ -三角

$$A \xrightarrow{x} P \xrightarrow{y} C \xrightarrow{\delta} \gg,$$

其中 $P \in \mathcal{P}$. 对偶地, 我们能够定义 $\mathcal{C}$ 有足够多的内射.

(3) 称外部范畴 $\mathcal{C}$ 是 Frobenius, 如果 $\mathcal{C}$ 有足够多的投射和足够多的内射, 且投射对象和内射对象是相同的. 在这种情形下, 由文献 [4, 推论 7.4] 知, 商范畴 $\overline{\mathcal{C}} := \mathcal{C}/[\mathcal{I}]$ 是三角范畴, 称 $\overline{\mathcal{C}}$ 是 $\mathcal{C}$ 的稳定范畴.

现在给出一些外部范畴的例子.

例 2.2 (1) 正合范畴 $\mathcal{B}$ 能看成外部范畴. 事实上, 我们可以取双加法函子

$$\mathbb{E} := \text{Ext}_{\mathcal{B}}^1: \mathcal{B}^{\text{op}} \times \mathcal{B} \rightarrow \text{Ab}.$$

任给两个对象 $A, C \in \mathcal{B}$, 定义 $\text{Ext}_{\mathcal{B}}^1(C, A)$ 是这种形式的短正合列 $A \xrightarrow{x} B \xrightarrow{y} C$ 构成的所有等价类, 等价类记为 $[A \xrightarrow{x} B \xrightarrow{y} C]$. 对任意的

$$\delta = [A \xrightarrow{x} B \xrightarrow{y} C] \in \text{Ext}_{\mathcal{B}}^1(C, A),$$

定义 $[A \xrightarrow{x} B \xrightarrow{y} C]$ 的实现 $\mathfrak{s}(\delta)$ 是 δ 本身. 更多的细节, 可参见文献 [4, 例 2.13].

(2) 假设 $\mathcal{C}$ 是三角范畴有平移函子 [1]. 令 $\mathbb{E} := \mathcal{C}(-, -[1])$, 对任意的 $\delta \in \mathbb{E}(C, A) = \mathcal{C}(C, A[1])$, 取三角

$$A \xrightarrow{x} B \xrightarrow{y} C \xrightarrow{\delta} A[1],$$

定义 $\mathfrak{s}(\delta) = [A \xrightarrow{x} B \xrightarrow{y} C]$, 则 $(\mathcal{C}, \mathbb{E}, \mathfrak{s})$ 是外部范畴. 不难发现, 三角范畴中的扩张封闭的子范畴也是外部范畴. 更多的细节, 可参见文献 [4, 命题 3.22].

(3) 假设 $\mathcal{C}$ 是外部范畴, $\mathcal{J}$ 是 $\mathcal{C}$ 的子范畴. 如果 $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{P} \cap \mathcal{I}$, 则商范畴 $\mathcal{C}/[\mathcal{J}]$ 是外部范畴. 一般情形下, 这种构造得到的外部范畴既不是三角范畴也不是正合范畴. 更多的细节, 可参见文献 [4, 命题 3.30].

(4) 假设 $\mathcal{C}$ 是三角范畴且有 Auslander-Reiten 平移 τ , $\mathcal{X}$ 是 $\mathcal{C}$ 中的函子有限的子范畴且满足 $\tau\mathcal{X} = \mathcal{X}$ 和 $\{0\} \neq \mathcal{X} \subsetneq \mathcal{C}$. 对任意的对象 $A, C \in \mathcal{C}$, 定义 $\mathbb{E}'(C, A) \subseteq \mathcal{C}(C, A[1])$ 是由如下形式的三角:

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{\delta} A[1]$$

构成的类, 其中 f 是 $\mathcal{X}$ -单态射. 令 $\mathfrak{s}'(\delta) = [A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C]$, 对任意的 $\delta \in \mathbb{E}'(C, A)$, 则 $(\mathcal{C}, \mathbb{E}', \mathfrak{s}')$ 是 Frobenius 外部范畴且投射内射对象恰好是 $\mathcal{X}$. 更多的细节, 可参见文献 [5, 推论 4.12].

Frobenius 外部范畴中作为 Frobenius 范畴的推广有很多好的性质. 文献 [4, 推论 7.6] 给出如下的等价刻画: 如果 $(\mathcal{C}, \mathbb{E}, \mathfrak{s})$ 是 Frobenius 外部范畴且投射对象和内射对象都为零当且仅当 $(\mathcal{C}, \mathbb{E}, \mathfrak{s})$ 是三角范畴. 我们在 Frobenius 外部范畴中研究了丛子代数与余挠偶对之间的关系, 参见文献 [10].

2.6 强函子有限的子范畴

回顾强函子有限的子范畴^[5]的概念.

设 $\mathcal{C}$ 是外部范畴. $\mathcal{C}$ 的子范畴 $\mathcal{X}$ 称为强反变有限的, 如果对任意的对象 $C \in \mathcal{C}$, 存在 $\mathbb{E}$ -三角

$$K \longrightarrow X \xrightarrow{g} C \xrightarrow{\delta} \gg,$$

其中 g 是关于 C 的一个右 $\mathcal{X}$ -逼近.

对偶地, $\mathcal{C}$ 的子范畴 $\mathcal{X}$ 称为强共变有限的, 如果对任意的对象 $C \in \mathcal{C}$, 存在 $\mathbb{E}$ -三角

$$C \xrightarrow{f} X \longrightarrow L \xrightarrow{\delta'} \gg,$$

其中 f 是关于 C 的一个左 $\mathcal{X}$ -逼近.

既是强反变有限的又是强共变有限的子范畴称为强函子有限的.

注 2.3 设 $\mathcal{C}$ 是外部范畴, $\mathcal{X}$ 是 $\mathcal{C}$ 的一个子范畴.

(1) 如果 $\mathcal{C}$ 有足够多的投射 $\mathcal{P}$, 则 $\mathcal{X}$ 在 $\mathcal{C}$ 中是强反变有限的当且仅当 $\mathcal{X}$ 在 $\mathcal{C}$ 中是反变有限的且包含 $\mathcal{P}$; 如果 $\mathcal{C}$ 有足够多的投射 $\mathcal{I}$, $\mathcal{X}$ 在 $\mathcal{C}$ 中是强共变有限的当且仅当 $\mathcal{X}$ 在 $\mathcal{C}$ 中是共变有限的且包含 $\mathcal{I}$; 如果 $\mathcal{C}$ 有足够多的投射 $\mathcal{P}$ 和足够多的内射 $\mathcal{I}$, 则 $\mathcal{X}$ 在 $\mathcal{C}$ 中是强函子有限的当且仅当 $\mathcal{X}$ 在 $\mathcal{C}$ 中是函子有限的且包含 $\mathcal{P}$ 和 $\mathcal{I}$.

(2) 如果 $\mathcal{C}$ 是三角范畴, 则 $\mathcal{X}$ 在 $\mathcal{C}$ 中是强反变有限的当且仅当 $\mathcal{X}$ 在 $\mathcal{C}$ 中是反变有限的; $\mathcal{X}$ 在 $\mathcal{C}$ 中是强共变有限的当且仅当 $\mathcal{X}$ 在 $\mathcal{C}$ 中是共变有限的; $\mathcal{X}$ 在 $\mathcal{C}$ 中是强函子有限的当且仅当 $\mathcal{X}$ 在 $\mathcal{C}$ 中是函子有限的.

3 主要结果

设 $\mathcal{C}$ 是一个外部范畴, $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{A}$ 是 $\mathcal{C}$ 中的两个子范畴. 考虑如下的条件:

(A1) $\mathcal{X}$ 是 $\mathcal{A}$ 中的强共变有限的子范畴.

(A2) $\mathcal{X}$ 是 $\mathcal{A}$ 中的强反变有限的子范畴.

(B1) 对 $\mathcal{A}$ 中任意的 $\mathcal{X}$ -单态射 $f: A \rightarrow B$, 如果它能嵌入如下的 $\mathbb{E}$ -三角:

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{\delta} \gg,$$

则 $C \in \mathcal{A}$.

(B2) 对 $\mathcal{A}$ 中任意的 $\mathcal{X}$ -满态射 $g': B' \rightarrow C'$, 如果它能嵌入如下的 $\mathbb{E}$ -三角:

$$A' \xrightarrow{f'} B' \xrightarrow{g'} C' \xrightarrow{\delta'} \gg,$$

则 $A' \in \mathcal{A}$.

(C1) 对 $\mathcal{A}$ 中任意的 $\mathcal{X}$ -单态射 $f: A \rightarrow B$, 如果它能嵌入如下的 $\mathbb{E}$ -三角:

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{\delta} \gg,$$

则 $C \in \mathcal{A}$ 且 g 是一个 $\mathcal{X}$ -满态射.

(C2) 对 $\mathcal{A}$ 中任意的 $\mathcal{X}$ -满态射 $g': B' \rightarrow C'$, 如果它能嵌入如下的 $\mathbb{E}$ -三角:

$$A' \xrightarrow{f'} B' \xrightarrow{g'} C' \xrightarrow{\delta'} \gg,$$

则 $A' \in \mathcal{A}$ 且 f' $\mathcal{X}$ -单态射.

现在陈述我们的主要定理.

定理 3.1 设 $\mathcal{C}$ 是一个外部范畴, $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{A}$ 是 $\mathcal{C}$ 中的两个子范畴.

(1) 在上面的 (A1) 和 (B1) 假设下, 商范畴 $\mathcal{U} = \mathcal{A}/[\mathcal{X}]$ 是右三角范畴.

(2) 在上面的 (A2) 和 (B2) 假设下, 商范畴 $\mathcal{U} = \mathcal{A}/[\mathcal{X}]$ 是左三角范畴.

(3) 在上面的 (A1)、(A2)、(C1) 和 (C2) 假设下, 商范畴 $\mathcal{U} = \mathcal{A}/[\mathcal{X}]$ 是三角范畴.

在我们证明定理 3.1 之前, 我们需要如下重要的引理以及它的对偶.

引理 3.2 设 $\mathcal{C}$ 是一个外部范畴. 给定 $\mathcal{C}$ 中的 $\mathbb{E}$ -三角之间的交换图:

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C \xrightarrow{\delta} \gg \\ \downarrow a & & \downarrow b & & \parallel \\ D & \xrightarrow{u} & F & \xrightarrow{v} & C \xrightarrow{\eta} \gg \end{array}$$

则存在同构态射 $w: F \rightarrow F$, 使得如下的序列:

$$A \xrightarrow{\begin{pmatrix} -f \\ a \end{pmatrix}} B \oplus D \xrightarrow{(b, u)} F \xrightarrow{\theta} \gg$$

是 $\mathcal{C}$ 中的 $\mathbb{E}$ -三角, 其中 $\theta = (w^{-1})^*v*\delta$.

证明 由文献 [11, 命题 1.20] 知, 存在如下 $\mathbb{E}$ -三角之间的交换图:

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C \xrightarrow{\delta} \gg \\ \downarrow a & & \downarrow b' & & \parallel \\ D & \xrightarrow{x} & F' & \xrightarrow{y} & C \xrightarrow{a_*\delta} \gg \end{array}$$

且

$$A \xrightarrow{\begin{pmatrix} -f \\ a \end{pmatrix}} B \oplus D \xrightarrow{(b', x)} F' \xrightarrow{y^* \delta} \gg$$

是 $\mathcal{C}$ 中的一个 $\mathbb{E}$ -三角.

由实现的定义和文献 [4, 推论 3.6] 知, 存在同构 $c: F' \rightarrow F$, 使得下图可交换:

$$\begin{array}{ccccc} D & \xrightarrow{x} & F' & \xrightarrow{y} & C \xrightarrow{a_* \delta} \gg \\ \parallel & & \downarrow c & & \parallel \\ D & \xrightarrow{u} & F & \xrightarrow{v} & C \xrightarrow{\eta} \gg. \end{array}$$

考虑同构 $c^{-1}: F \rightarrow F'$, 由文献 [4, 命题 3.7] 知,

$$A \xrightarrow{\begin{pmatrix} -f \\ a \end{pmatrix}} B \oplus D \xrightarrow{(cb', u)} F \xrightarrow{v^* \delta} \gg$$

是 $\mathcal{C}$ 中的一个 $\mathbb{E}$ -三角. 注意到 $(b, u) \begin{pmatrix} -f \\ a \end{pmatrix} = 0$, 则存在态射 $w: F \rightarrow F$, 使得 $(b, u) = w(cb', u)$, 即有 $b = wcb'$ 和 $u = wu$. 由 $(1 - w)u = 0$ 知, 存在态射 $d: C \rightarrow F$, 使得 $1 - w = dv$, 从而有

$$(1 + dv)(1 - dv)u = (1 + dv)wu = (1 + dv)u = u.$$

注意到 $v(b - cb') = vb - vcb' = g - yb' = 0$, 则存在态射 $m: B \rightarrow D$, 使得 $b - cb' = um$ 推出 $dvb = dv(um + cb') = dvcb'$. 于是有 $(1 + dv)b = b + dvb = wcb' + dvcb' = (w + dv)cb' = cb'$, 进而有

$$(1 + dv)(1 - dv)cb' = (1 + dv)wcb' = (1 + dv)b = cb'.$$

因此有如下 $\mathbb{E}$ -三角之间的交换图:

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{\begin{pmatrix} -f \\ a \end{pmatrix}} & B \oplus D & \xrightarrow{(cb', u)} & F \xrightarrow{v^* \delta} \gg \\ \parallel & & \parallel & & \downarrow (1+dv)(1-dv) \\ A & \xrightarrow{\begin{pmatrix} -f \\ a \end{pmatrix}} & B \oplus D & \xrightarrow{(cb', u)} & F \xrightarrow{v^* \delta} \gg. \end{array}$$

由文献 [4, 推论 3.6] 知, $(1 + dv)(1 - dv)$ 是同构. 注意到 $(1 + dv)(1 - dv) = (1 - dv)(1 + dv)$, 我们有 $1 - dv = w$ 是同构. 考虑同构 $w^{-1}: F \rightarrow F$, 由文献 [4, 命题 3.7] 知,

$$A \xrightarrow{\begin{pmatrix} -f \\ a \end{pmatrix}} B \oplus D \xrightarrow{(b, u)} F \xrightarrow{\theta} \gg$$

是 $\mathcal{C}$ 中的 $\mathbb{E}$ -三角, 其中 $\theta = (w^{-1})^* v^* \delta$. □

现在证明定理 3.1.

定理 3.1 的证明 (1) 首先, 定义关于 $\mathcal{U}$ 的自函子 Σ .

对任意的对象 $A \in \mathcal{U}$, 因为 $\mathcal{X}$ 是 $\mathcal{A}$ 中的强共变有限的子范畴, 则存在 $\mathbb{E}$ -三角:

$$A \xrightarrow{\alpha_A} X_0 \xrightarrow{\beta_A} \Sigma A \xrightarrow{\eta} \gg,$$

其中 α_A 是关于 A 的一个左 $\mathcal{X}$ -逼近. 通过假设 (B1), 我们有 $\Sigma A \in \mathcal{A}$.

对任意的态射 $\bar{a} \in \text{Hom}_{\mathcal{U}}(A, A')$, 考虑如下的交换图:

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{\alpha_A} & X_0 & \xrightarrow{\beta_A} & \Sigma A \xrightarrow{\eta} \triangleright \\ \downarrow a & & \downarrow b & & \downarrow c := \Sigma a \\ A' & \xrightarrow{\alpha_{A'}} & X_1 & \xrightarrow{\beta_{B'}} & \Sigma A' \xrightarrow{\eta'} \triangleright, \end{array}$$

其中 b 的存在是因为 α_A 是关于 A 的一个左 $\mathcal{X}$ -逼近, c 的存在是由于 (ET3) 成立.

定义 $\Sigma \bar{a} := \bar{c}$. 由文献 [5, 引理 3.7], 我们很容易验证 $\Sigma: \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U}$ 定义良好的加法函子.

其次, 定义 $\mathcal{U}$ 中的右三角.

设 $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{\delta} \triangleright$ 是 $\mathcal{C}$ 中的 $\mathbb{E}$ -三角, 其中 $f \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(A, B)$ 是一个 $\mathcal{X}$ -单态射. 通过假设 (B1), 我们有 $C \in \mathcal{A}$, 那么存在如下 $\mathbb{E}$ -三角之间的交换图:

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C \xrightarrow{\delta} \triangleright \\ \parallel & & \downarrow v & & \downarrow h \\ A & \xrightarrow{\alpha_A} & X_0 & \xrightarrow{\beta_A} & \Sigma A \xrightarrow{\eta} \triangleright, \end{array}$$

其中 v 的存在是因为 f 是一个 $\mathcal{X}$ -单态射, h 的存在是由于 (ET3) 成立. 定义 $\mathcal{U}$ 中的右三角是同构于如下的序列:

$$A \xrightarrow{\bar{f}} B \xrightarrow{\bar{g}} C \xrightarrow{\bar{h}} \Sigma A.$$

现在验证右三角范畴的公理.

(RTR0) 设 $A \in \mathcal{U}$, 则 $1_A: A \rightarrow A$ 是一个 $\mathcal{X}$ -单态射, 如下的交换图:

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{1_A} & A & \longrightarrow & 0 \dashrightarrow \triangleright \\ \parallel & & \downarrow \alpha_A & & \downarrow \\ A & \xrightarrow{\alpha_A} & X_0 & \xrightarrow{\beta_A} & \Sigma A \xrightarrow{\eta} \triangleright \end{array}$$

说明 $A \xrightarrow{\bar{1}_A} A \longrightarrow 0 \longrightarrow \Sigma A$ 是 $\mathcal{U}$ 中右三角.

(RTR1) 对任意的态射 $\bar{f} \in \text{Hom}_{\mathcal{U}}(A, B)$, $\left(\begin{smallmatrix} f \\ \alpha_A \end{smallmatrix}\right): A \rightarrow B \oplus X$ 是一个 $\mathcal{X}$ -单态射. 因为 α_A 是膨胀, 由文献 [4, 推论 3.6] 知, $\left(\begin{smallmatrix} f \\ \alpha_A \end{smallmatrix}\right)$ 也是一个膨胀. 那么 $\left(\begin{smallmatrix} f \\ \alpha_A \end{smallmatrix}\right)$ 能嵌入到一个 $\mathbb{E}$ -三角

$$A \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix} f \\ \alpha_A \end{smallmatrix}\right)} B \oplus X_0 \xrightarrow{(g, \gamma)} C \xrightarrow{\rho} \triangleright.$$

通过假设 (B1), 我们有 $C \in \mathcal{A}$. 由 (ET3), 有如下的交换图:

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix} f \\ \alpha_A \end{smallmatrix}\right)} & B \oplus X_0 & \xrightarrow{(g, \gamma)} & C \xrightarrow{\rho} \triangleright \\ \parallel & & \downarrow (0, 1) & & \downarrow h \\ A & \xrightarrow{\alpha_A} & X_0 & \xrightarrow{\beta_A} & \Sigma A \xrightarrow{\eta} \triangleright. \end{array}$$

这就说明了 $A \xrightarrow{\bar{f}} B \xrightarrow{\bar{g}} C \xrightarrow{\bar{h}} \Sigma A$ 是 $\mathcal{U}$ 中右三角.

(RTR2) 假设

$$A \xrightarrow{\bar{f}} B \xrightarrow{\bar{g}} C \xrightarrow{\bar{h}} \Sigma A$$

是 $\mathcal{U}$ 中右三角. 我们能够假设它是由下面的 $\mathbb{E}$ -三角所诱导的:

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{\delta} \gg,$$

其中 f 是 $\mathcal{X}$ -单态射. 也就是说, 存在如下的 $\mathbb{E}$ -三角之间的交换图:

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C \xrightarrow{\delta} \gg \\ \parallel & & \downarrow v & & \downarrow h \\ A & \xrightarrow{\alpha_A} & X_0 & \xrightarrow{\beta_A} & \Sigma A \xrightarrow{\eta} \gg \end{array}$$

由引理 3.2 的对偶知, 存在如下的 $\mathbb{E}$ -三角:

$$B \xrightarrow{\binom{-g}{v}} C \oplus X_0 \xrightarrow{(h, \beta_A)} \Sigma A \xrightarrow{\theta} \gg.$$

我们断言态射 $\binom{-g}{v}: B \rightarrow C \oplus X_0$ 是 $\mathcal{X}$ -单态射. 事实上, 对任意的态射 $x: B \rightarrow X$, 其中 $X \in \mathcal{X}$, 因为 α_A 是关于 A 的一个左 $\mathcal{X}$ -逼近, 所以存在态射 $y: X_0 \rightarrow X$, 使得 $y\alpha_A = xf$. 注意到 $(x - yv)f = xf - y\alpha_A = 0$, 则存在态射 $z: C \rightarrow X$, 使得 $x - yv = zg$, 那么有 $x = (-z, y)\binom{-g}{v}$.

下面的交换图:

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{\alpha_A} & X_0 & \xrightarrow{\beta_A} & \Sigma A \xrightarrow{\eta} \gg \\ \downarrow f & & \downarrow \binom{0}{1} & & \parallel \\ B & \xrightarrow{\binom{-g}{v}} & C \oplus X_0 & \xrightarrow{(h, \beta_A)} & \Sigma A \xrightarrow{\theta} \gg \\ \parallel & & \downarrow w & & \downarrow u \\ B & \xrightarrow{\alpha_B} & X_1 & \xrightarrow{\beta_B} & \Sigma B \xrightarrow{\zeta} \gg \end{array}$$

推出 $\bar{u} = \Sigma \bar{f}$ 和 $B \xrightarrow{-\bar{g}} C \xrightarrow{\bar{h}} \Sigma A \xrightarrow{\bar{u}} \Sigma B$ 是 $\mathcal{U}$ 中右三角. 如下的交换图:

$$\begin{array}{ccccc} B & \xrightarrow{-\bar{g}} & C & \xrightarrow{\bar{h}} & \Sigma A \xrightarrow{\bar{u}} \Sigma B \\ \parallel & & \downarrow -1 & & \downarrow -1 \\ B & \xrightarrow{\bar{g}} & C & \xrightarrow{\bar{h}} & \Sigma A \xrightarrow{-\Sigma \bar{f}} \Sigma B \end{array}$$

说明 $B \xrightarrow{\bar{g}} C \xrightarrow{\bar{h}} \Sigma A \xrightarrow{-\Sigma \bar{f}} \Sigma B$ 是 $\mathcal{U}$ 中右三角.

(RTR3) 和 (RTR4) 的证明与文献 [5, 定理 3.15] 相似.

(2) 与 (1) 是对偶的.

(3) 对任意的对象 $B \in \mathcal{U}$, 因为 $\mathcal{X}$ 是 $\mathcal{A}$ 中的强反变有限的子范畴, 则存在 $\mathbb{E}$ -三角

$$\Omega B \xrightarrow{i} X_2 \xrightarrow{j} B \xrightarrow{\lambda} \gg,$$

其中 j 是一个关于 B 的右 $\mathcal{X}$ -逼近. 对偶地, 我们能够定义自函子 $\Omega: \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U}$. 很容易验证 Ω 是 Σ 的拟逆. 由 (1) 可得结论成立. $\square$

注 3.3 在定理 3.1(3) 中, 如果 $\mathcal{C}$ 是三角范畴, 则定理 3.1(3) 恰好是文献 [2, 定理 2.1] 的结果. 现在给出定理 3.1 的一个应用.

例 3.4 (参见文献 [5, 定理 3.15]) 设 $\mathcal{C}$ 是一个外部范畴, $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{A}$ 是 $\mathcal{C}$ 的两个子范畴. 如果 $\mathcal{A}$ 是扩张封闭的且 $(\mathcal{A}, \mathcal{A})$ 是一个 $\mathcal{X}$ - 突变对, 则商范畴 $\mathcal{A}/[\mathcal{X}]$ 是三角范畴.

证明 由突变对的定义知, $\mathcal{X}$ 是 $\mathcal{A}$ 中的强共变有限的子范畴且 $\mathcal{X}$ 是 $\mathcal{A}$ 中的强反变有限的子范畴, 那么条件 (A1) 和 (A2) 成立.

对 $\mathcal{A}$ 中任意的 $\mathcal{X}$ - 单态射 $f: A \rightarrow B$, 如果它能嵌入下面的 $\mathbb{E}$ - 三角:

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{-\delta} \gg,$$

考虑如下的交换图:

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C \xrightarrow{-\delta} \gg \\ \parallel & & \downarrow v & & \downarrow h \\ A & \xrightarrow{\alpha_A} & X_0 & \xrightarrow{\beta_A} & \Sigma A \xrightarrow{-\eta} \gg. \end{array}$$

由引理 3.2 的对偶知,

$$B \xrightarrow{\begin{pmatrix} -g \\ v \end{pmatrix}} C \oplus X_0 \xrightarrow{(h, \beta_A)} \Sigma A \xrightarrow{-\theta} \gg$$

是 $\mathcal{C}$ 中的 $\mathbb{E}$ - 三角. 因为 $\mathcal{A}$ 是扩张封闭的且 $B, \Sigma A \in \mathcal{A}$, 所以, $C \oplus X_0$ 推出 $C \in \mathcal{A}$.

现在证明 g 是一个 $\mathcal{X}$ - 满态射. 对任意的态射 $a: X \rightarrow C$, 其中 $X \in \mathcal{X}$, 因为 β_A 是关于 ΣA 的一个右 $\mathcal{X}$ - 逼近, 则存在态射 $b: X \rightarrow X_0$, 使得 $\beta_A b = ha$, 那么, $(h, \beta_A) \begin{pmatrix} -a \\ b \end{pmatrix} = 0$. 于是存在态射 $c: X \rightarrow B$, 使得 $\begin{pmatrix} -g \\ v \end{pmatrix} c = \begin{pmatrix} -a \\ b \end{pmatrix}$. 特别地, $a = gc$. 这就证明了 g 是一个 $\mathcal{X}$ - 满态射. 故条件 (C1) 成立.

对偶地, 我们能证明条件 (C2) 成立. 由定理 3.1 可得, 商范畴 $\mathcal{A}/[\mathcal{X}]$ 是三角范畴. $\square$

注 3.5 假设 $(\mathcal{C}, \mathbb{E}, \mathfrak{s})$ 是一个外部范畴, $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{A}$ 是 $\mathcal{C}$ 的两个子范畴且满足条件 (A1)、(A2)、(C1) 和 (C2). 注意到 $\mathcal{A}$ 不是 $\mathcal{C}$ 中扩张封闭的子范畴, 因此, 它不是由 $\mathcal{C}$ 的外部结构限制得到的外部范畴. 但是, 我们在 $\mathcal{A}$ 中能定义一个新的外部结构, 使得 $\mathcal{A}$ 是一个 Frobenius 外部范畴且投射、内射对象恰好是 $\mathcal{X}$. 当然, 文献 [2, 定理 2.1] 和 [5, 定理 3.15] 都是我们主要定理 (定理 3.1) 中的特例; 对于满足定理 3.1 中 5 个条件的更多的具体例子, 我们将在后续工作中给出.

致谢 衷心地感谢审稿人的仔细审阅.

参考文献

- 1 Auslander M, Reiten I. Applications of contravariantly finite subcategories. *Adv Math*, 1991, 86: 111–152
- 2 Iyama O, Wemyss M. Reduction of triangulated categories and maximal modification algebras for cA_n singularities. *J Reine Angew Math*, 2018, 738: 149–202
- 3 Liu Y, Zhu B. Triangulated quotient categories. *Comm Algebra*, 2013, 41: 3720–3738
- 4 Nakaoka H, Palu Y. Mutation via Hovey twin cotorsion pairs and model structures in extriangulated categories. *ArXiv:1605.05607*, 2016
- 5 Zhou P, Zhu B. Triangulated quotient categories revisited. *J Algebra*, 2018, 502: 196–232
- 6 Zhou P, Xu J, Ouyang B. Mutation pairs and quotient categories of Abelian categories. *Comm Algebra*, 2017, 45: 392–410
- 7 Iyama O, Yoshino Y. Mutation in triangulated categories and rigid Cohen-Macaulay modules. *Invent Math*, 2008, 172: 117–168

- 8 Assem I, Beligiannis A, Marmaridis N. Right triangulated categories with right semi-equivalences. *Canad Math Soc Conf Proc*, 1998, 24: 17–37
- 9 Beligiannis A, Marmaridis N. Left triangulated categories arising from contravariantly finite subcategories. *Comm Algebra*, 1994, 22: 5021–5036
- 10 Chang W, Zhou P, Zhu B. Cluster subalgebras and cotorsion pairs in Frobenius extriangulated categories. *ArXiv:1610.05006*, 2016
- 11 Liu Y, Nakaoka H. Hearts of twin cotorsion pairs on extriangulated categories. *ArXiv:1702.00244*, 2017

Triangulated quotient categories arising from extriangulated categories

Panyue Zhou & Bin Zhu

Abstract In this paper, we give a common framework for constructing triangulated quotient categories from extriangulated categories. To be precise, assume that X and A , where $X \subseteq A$, are two subcategories of an extriangulated category $\mathcal{C}$ satisfying certain conditions. Then $\mathcal{A}/[\mathcal{X}]$ is a triangulated category. This result unifies a result by Iyama and Wemyss (2013) for triangulated categories and a result by Zhou and Zhu (2018) for extriangulated categories.

Keywords extriangulated categories, triangulated categories, quotient categories

MSC(2010) 18E30

doi: 10.1360/N012017-00212