中国科学: 数学 2020 年 第 50 卷 第 12 期: 1855～1868
SCIENTIA SINICA Mathematica
论 文

《中国科学》杂志社
SCIENCE CHINA PRESS
CrossMark
click for updates

算子半群 BMO 空间及其在非交换分析中的应用

献给吴从炘教授 85 华诞

梅韬

Department of Mathematics, Baylor University, Waco, TX 76706, USA
E-mail: tao_mei@baylor.edu

收稿日期: 2020-06-25; 接受日期: 2020-09-07; 网络出版日期: 2020-12-08
美国国家科学基金 (批准号: DMS-1700171) 资助项目

摘要 本文介绍一类算子半群有界平均振动 (bounded mean oscillation, BMO) 空间及其在非交换 L^p 分析上的应用. 作者主要介绍 Ferguson 等 (2019)、Junge 和 Mei (2012) 的内插定理和 H^∞- 泛函演算定理, 并通过实例给出不同 BMO 空间的比较及转移定理的运用.

关键词 Markov 算子半群 非交换 L^p 空间 有界平均振动 Fourier 乘子

MSC (2010) 主题分类 46L51, 42B25, 46L10, 47C15, 47D06

1 引言

有界平均振动 (bounded mean oscillation, BMO) 空间是经典分析中的一个重要研究对象. 给定实线上一个局部可积函数 f, 定义 f 的平均振幅 $\|f\|_{\mathrm{BMO}}$ 为

$$\|f\|_{\mathrm{BMO}}=\sup_{I\subset\mathbb{R}}(E_I|f-E_If|^2)^{\frac{1}{2}},$$

这里 I 取遍所有实线上的有界区间, E_I 是平均算子 $E_If=\frac{1}{|I|}\int_I f$ 1). BMO 空间是所有具有有界平均振幅的局部可积函数所组成的线性空间. 它比 L^∞ 空间更大, 同时又拥有很好的 L^p 内插性质. 这使得它在调和分析中, 特别是 Fourier 乘子 L^p 有界性的研究中, 有着非常重要的作用.

Fourier 乘子和 BMO 本质上是基于 Laplace 算子 Δ 的谱乘子和函数空间. 自然地, 我们可以考虑基于其他微分算子 L 的 BMO 以应用于更广义的 Fourier 乘子. Duong 和 Yan [1, 2] 考虑了如下范数并在这个方向做出了开创性工作:

$$\|f\|_{\mathrm{BMO}}=\sup_{I\subset\mathbb{R}}(E_I|f-\mathrm{e}^{|I|^mL}f|^2)^{\frac{1}{2}}, \tag{1.1}$$

1) 由 John-Nirenberg 不等式, 这里的指数 2 可以换成任意正实数 p, 得到的是一类等价量.

英文引用格式: Mei T. Semigroup BMO spaces and applications in noncommutative analysis (in Chinese). Sci Sin Math, 2020, 50: 1855–1868, doi: 10.1360/SSM-2020-0205

这里 m 是一个关于 e^{-L} 的热核下降速度的指数. 关于这方面的工作可参见文献 [3,4].

在很早期的研究中, 大家就注意到可以通过热半群或 Poisson 半群 $P_t = \mathrm{e}^{-t\sqrt{-\Delta}}$ 来刻画经典的 BMO 空间 (参见文献 [5,6]). 事实上, 通过积分表达式

$$P_t f = \frac{t}{\pi(x^2+t^2)} * f$$

和初等计算可以得出

$$\|f\|_{\mathrm{BMO}} \simeq \sup_{t>0} \|P_t|f-P_tf|^2\|_{L_\infty}^{\frac{1}{2}}. \tag{1.2}$$

如果将上面刻画中的 P_t 换成其他算子半群, 例如, Ornstein-Uhlenbeck 半群, 是否得到相同的空间? 经典的定理, 例如, BMO 内插定理是否仍然成立? 能否如 Stein [7] 的抽象 Littlewood-Paley 理论那样重建一套仅基于算子半群语言的 BMO-Hardy 空间理论? Junge 和 Mei [8] 考虑用抽象的 Markov 半群 $S_t = \mathrm{e}^{-tL}$ 替换 (1.2) 中的 Poisson 半群定义 BMO 如下:

$$\|f\|_{\mathrm{BMO}(L)} = \sup_{t>0} \|S_t|f-S_tf|^2\|_{L_\infty}^{\frac{1}{2}}, \tag{1.3}$$

并证明了相应的 L^p 内插定理. 文献 [9] 进一步证明了, 在 $\Gamma_2 \geqslant 0$ 条件下 (见 (2.6)), Markov 算子半群的生成算子 L 在对应的算子半群 BMO 空间上具有有界 H^∞- 泛函演算. 这些研究基于泛函分析的观点, 着眼于对非交换 Fourier 分析的应用 2).

非交换空间逼近性质和非交换几何理论驱动了非交换 Fourier 乘子有界性的研究. “区间” “锥体” 等经典几何概念在非交换空间中往往没有具体的对应, 但是在很多非交换空间上都可以找到与经典 Poisson 半群性质类似的抽象算子半群. 例如, (1.3) 定义的算子半群 BMO 范数往往是关于一族 $*$- 同态的不变量. 这样, 转移方法可以方便地应用于这类 BMO 空间 (见例 4.1). 在近期的一系列非交换分析的工作中, 算子半群 BMO 被很好地应用到对非交换 Fourier 乘子的研究中去. 本文对文献 [8,9] 中的工作做简要介绍, 并通过具体例子比较不同的算子半群 BMO. 对算子半群 BMO 的其他工作及应用的介绍, 可参见文献 [10].

2 算子半群 BMO

2.1 非交换 L^p 空间

从泛函分析的视角, 函数空间 L_∞(如 $L_\infty(\mathbb{R})$) 和 $n\times n$ 矩阵代数 M_n 都属于 von Neumann 代数, 也就是 Hilbert 空间上的有界算子空间 $B(H)$ 的对于弱 $*$ 拓扑的闭对合子代数. M_n 和 $L_\infty(\mathbb{R})$ 都可被赋予一个正的线性泛函 τ, 即矩阵代数的迹函数 tr 和 $L_\infty(\mathbb{R})$ 上的积分函数 $\int_{\mathbb{R}} \cdot\, d\mu(x)$. 这两种情形下 τ 都满足如下的基本性质: 对 $\forall\, f,g,\tau \in M_n$ 或 $L_\infty(\mathbb{R})$, 满足

(i) 迹性: $\tau(fg) = \tau(gf)$;

(ii) 忠实性: 对 $f \geqslant 0$, $\tau(f) = 0$ 当且仅当 $f = 0$;

(iii) 下半连续性: 对任意上升序列 $f_i \geqslant 0$, $\tau(\sup f_i) = \sup \tau(f_i)$;

(iv) 半有限性: 对任意 $f \geqslant 0$, 可以找到 $0 < g \leqslant f$ 使得 $\tau(g) < \infty$.

2) 这也是 (1.3) 比 Duong 和 Yan [1,2] 的定义更加抽象的原因.

基于这些观察, 我们把 von Neumann 代数上满足 (i)–(iv) 的保正线性泛函 τ 称作 von Neumann 代数的半有限迹. 给定一个 von Neuman 代数 $\mathcal{M}$ 及其上的一个半有限迹 τ. 对 $f \in \mathcal{M}$, 定义 L_p 范数为

$$\|f\|_p = (\tau\,|f|^p)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leqslant p < \infty,$$

这里 $|f|^p = (f^*f)^{p/2}$ 通过自伴算子的泛函演算定义. 定义基于 $(\mathcal{M}, \tau)$ 的非交换 L_p 空间为

$$\{f \in \mathcal{M}, \|f\|_p < \infty\}$$

的闭包, 记为 $L_p(\mathcal{M})$, $1 \leqslant p < \infty$. Schatten p- 类 S_p 和测度 (Ω, μ) 空间上的 L_p 空间是最基本的非交换 L_p 空间的例子. 另一个例子是群 von Neumann 代数 (参见例 4.3 和 4.4) 及相应的 L^p- 空间. 任一个半有限交换 von Neumann 代数 $\mathcal{M}$ 和其上的 $L_p(\mathcal{M})$ 都同构于某个 $L_p(\Omega, \mu)$. 记 $L_\infty(\mathcal{M}) = \mathcal{M}$. 虽然交换 von Neumann 代数都对应一个函数空间 $L_\infty(\Omega, \mu)$, 但是对一般非交换的 von Nuemann 代数, 人们对可以与之相对应的 "(Ω, μ)" 及其上的几何结构仍然几乎一无所知. 关于非交换 L^p 空间的更多性质, 可参见文献 [11].

2.2 Markov 算子半群

算子半群是泛函分析中的一个基本研究对象, 在近期算子代数的研究中有非常重要的作用 (参见文献 [12–18]). 本文把半有限 von Neumann 代数 $\mathcal{M}$ 上的一个算子半群 $\mathcal{S} = (S_t)_{t \geqslant 0}$ 称作 Markov 算子半群, 当它满足如下条件:

- 保单位元: $S_t(\mathbf{1}) = \mathbf{1}$, 这里 $\mathbf{1} \in \mathcal{M}$ 是单位元;
- 保正: $S_t f \geqslant 0$ 对任意 $n \in \mathbb{N}$ 和 $f \geqslant 0$, $f \in M_n \otimes \mathcal{M}$ 成立;
- 对称性: $\tau((S_t f)g) = \tau(f(S_t g))$, $f, g \in L_1(\mathcal{M}) \cap L_\infty(\mathcal{M})$;
- 弱 $*$ 连续性: 当 $t \to 0$ 时, 对任意 $f \in \mathcal{M}$, $g \in L_1(\mathcal{M})$, 有 $\tau(S_t(f)g) \to \tau(fg)$.

这些性质也使得 S_t 成为 $\mathcal{M}$ 上的保迹完全压缩映射. 所以, 对所有的 $1 \leqslant p \leqslant \infty$, 它们延拓为 $L_p(\mathcal{M})$ 上的完全压缩映射. Markov 算子半群有生成元

$$Lf = -\frac{d}{dt} S_t f_{|t=0} = \lim_{t \to 0+} \frac{f - S_t f}{t}$$

作为定义在 $L_p(\mathcal{M})$ 的稠密子集上的 (无界) 闭算子. 记 $S_t = \mathrm{e}^{-tL}$. 通过泛函演算, 可以定义分数次幂 L^α, $0 < \alpha < 1$. L^α 生成的 Markov 算子半群 e^{-tL^α} 叫作次 Markov 半群.

Markov 算子半群对应于 Markov 随机过程. 最经典的例子是热半群与 Brown 运动的联系:

$$\mathrm{e}^{(t-s)\Delta}(f)(B_s^x) = E_s f(B_t^x)$$

对任意连续函数 f 和 $t > s$ 成立. 对于一般的交换 von Neumann 代数上的 Markov 算子半群 S_t, 根据 Kolmogorov 的鞅存在定理, 我们也可以构造一个对应的鞅使得类似于上式的关系成立, 并称对应的鞅为 S_t 的 Markov 过程扩张.

我们可以把这个定义推广到非交换情形. 称 von Neumann 代数 $\mathcal{M}$ 上的一个 Markov 算子半群 $\mathcal{S} = (S_t)_{t \geqslant 0}$ 具有 Markov 过程扩张, 如果存在一个更大的 von Neumann 代数 $\mathcal{N}$、$*$- 同态 $\pi_t : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ 和条件期望

$$E_s : \mathcal{N} \mapsto \mathcal{N}_s = \bigvee_{0 \leqslant v \leqslant s} \pi_v(\mathcal{M}),$$

使得对任意 $t \geqslant s > 0$, 有

$$E_s \pi_t f = \pi_s S_{t-s} f.$$

这意味着对任意 $T > 0$,

$$f_s = \pi_s S_{T-s} f, \quad 0 \leqslant s \leqslant T$$

是适应于滤链 $\mathcal{N}_s$ 的 (非交换) 鞅. 也就是说, 任意 $f \in \mathcal{M}$ 通过下图中两条路径被映射到 $\mathcal{N}_s$ 中的像是重合的:

$$\begin{array}{ccc} & S_{t-s} & \\ \mathcal{M} & \longrightarrow & \mathcal{M} \\ \pi_t \Big\downarrow & & \Big\downarrow \pi_s \\ \mathcal{N} & \longrightarrow & \mathcal{N}_s. \\ & E_s & \end{array}$$

我们称一个 Markov 过程扩张是几乎一致连续的, 如果对所有 $2 < p < \infty$, 存在 $L_p(\mathcal{M})$ 的弱稠密子集 B_p, 使得对任意 $\varepsilon > 0$, 都有投影 P_ε 满足 $\tau_{\mathcal{N}}(1 - P_\varepsilon) < \varepsilon$, 并且对任意 $T > 0$,

$$t \mapsto \pi_t(S_{T-t} f) P_\varepsilon$$

是从 $[0, T]$ 到 $\mathcal{N}$ 的连续函数. 交换 von Neumann 代数或有限 von Neumann 代数上的 Markov 算子半群总有 Markov 过程扩张 3) (参见文献 [7]). 热半群、Ornstein-Uhlenbeck 半群和扩散 Markov 半群都有一致连续的 Markov 过程扩张. 有限 von Neumann 代数上的次 Markov 半群有一致连续的 Markov 过程扩张 3) 4).

2.3 BMO

本节简述文献 [8, 19] 中定义的算子半群 BMO. 给定一个半有限的 von Neumann 代数 $\mathcal{M}$ 及其上的 Markov 算子半群 $(S_t = \mathrm{e}^{-tL})_{t \geqslant 0}$, 对 $f \in \mathcal{M} \cup L_2(\mathcal{M})$, 定义

$$\|f\|_{\mathrm{bmo}^c(L)} = \sup_t \|S_t |f|^2 - |S_t f|^2\|^{\frac{1}{2}}, \tag{2.1}$$

$$\|f\|_{\mathrm{BMO}^c(L)} = \sup_t \|S_t |f - S_t f|^2\|^{\frac{1}{2}}. \tag{2.2}$$

这里及以下的行文中, f 是 Hilbert 空间上的算子, $|f|^2 = f^* f$, f^* 表示 f 的共轭算子; $\|f\|$ 表示 f 的算子范数; $\|\cdot\|_{\mathrm{BMO}^c(L)}$ 和 $\|\cdot\|_{\mathrm{bmo}^c(L)}$ 只是半范数. 模掉核 $\ker L$ 后得到 $\mathrm{BMO}^c(L)$ 和 $\mathrm{bmo}^c(L)$ 范数. 这里指标是沿用算子空间理论中关于列空间的标记. 通常情形下, $\|f\|_{\mathrm{BMO}^c(L)} \neq \|f^*\|_{\mathrm{BMO}^c(L)}$. 记

$$\|f\|_{\mathrm{BMO}(L)} = \max\{\|f\|_{\mathrm{BMO}^c(L)}, \|f^*\|_{\mathrm{BMO}^c(L)}\}, \tag{2.3}$$

$$\|f\|_{\mathrm{bmo}(L)} = \max\{\|f\|_{\mathrm{bmo}^c(L)}, \|f^*\|_{\mathrm{bmo}^c(L)}\}. \tag{2.4}$$

这里记号 BMO 和 bmo 分别对应于 Markov 过程扩张中关于鞅的大、小 BMO 空间. 当上述定义中的算子半群是 $\sqrt{L}$ 或其他分数次幂 L^α 生成的次半群 e^{-tL^α} $(0 < \alpha < 1)$ 时, 我们使用记号 $\|\cdot\|_{\mathrm{bmo}^c(\sqrt{L})}$、

3) Junge M, Ricard E, Shilyakhtenko D. Noncommutative diffusion semigroups and free probability. Preprint
4) 有意思的是, 对交换空间上的次 Markov 算子半群, 这种一致连续的 Markov 扩张的存在性也是通过非交换鞅得到的.

$\|\cdot\|_{\mathrm{BMO}^c(\sqrt{L})}$、$\|\cdot\|_{\mathrm{bmo}(\sqrt{L})}$、$\|\cdot\|_{\mathrm{BMO}(\sqrt{L})}$、$\|\cdot\|_{\mathrm{bmo}^c(L^\alpha)}$ 和 $\|\cdot\|_{\mathrm{BMO}^c(L^\alpha)}$. 如前言所述, 这样的算子半群 BMO 范数是模仿 Garsia 的 Poisson 积分 BMO (参见文献 [1,5,6,20,21]).

我们希望定义 $\mathrm{BMO}(L)$ 使其成为一个对偶空间, 并且 $L_\infty^0=L_\infty(\mathcal{M})/\mathrm{ker}L$ 在其中弱 $*$ 稠密以与经典情形保持一致[5]. 对 $g\in L_1(\mathcal{M})$, 定义

$$\|g\|_{H_1(L)}=\sup\{|\langle f,g\rangle|:f\in L_\infty,\|f\|_{\mathrm{BMO}(L)}\leqslant 1\}. \tag{2.5}$$

定义 $H_1(L)=\{g\in L_1(\mathcal{M});\|g\|_{H_1}<\infty\}$. 对 $f_\lambda\in L_0^\infty(M)$, 称 f_λ 弱 $*$ 收敛, 如果对任意 $g\in H_1(L)$, $\langle f_\lambda,g\rangle$ 收敛. 定义 $\mathrm{BMO}(L)$ 为 $L_\infty^0(M)$ 关于此弱 $*$ 拓扑的完备, 也就是所有弱 $*$ 收敛的 $f_\lambda\in L_\infty^0(M)$ 所生成的线性空间. 对这样的 f_λ, 定义

$$\Big\|\lim_\lambda f_\lambda\Big\|_{\mathrm{BMO}(L)}=\sup_{\|g\|_{H_1(L)}\leqslant 1}\lim_\lambda\langle f_\lambda,g\rangle.$$

容易验证对 $\lim_\lambda f_\lambda\in L_\infty$, 上式与 (2.3) 兼容. 我们类似定义 $h_1(L)$ 和 $\mathrm{bmo}(L)$ 空间.

定理 2.1 [8] 设 $\mathcal{S}=(S_t)_{t\geqslant 0}$ 是半有限 von Neumann 代数 $\mathcal{M}$ 上的 Markov 算子半群, 并假设 S_t 具有 Markov 过程扩张 (参见第 2.2 小节). 如下的内插定理成立:

(i) 对 $1<p<\infty$, 有

$$[\mathrm{BMO}(L),L_1(\mathcal{M})]_{\frac{1}{p}}=L_p(\mathcal{M});$$

(ii) 进一步假设 S_t 所产生的 Markov 过程扩张几乎一致连续, 对 $1<p<\infty$, 有

$$[\mathrm{bmo}(L),L_1(\mathcal{M})]_{\frac{1}{p}}=L_p(\mathcal{M}).$$

注 2.1 Caspers 将定理 2.1 推广到了更一般的 von Neumann 代数上 (参见文献 [22, 定理 3.15]).

给定算子半群 $(S_t=\mathrm{e}^{-tL})_{t\geqslant 0}$ 及其生成元 L, 定义如下梯度形式:

$$\begin{aligned}\Gamma(f,g)&=\frac{L(f^*)g+f^*L(g)-L(f^*g)}{2},\\ \Gamma_2(f,g)&=\frac{\Gamma(L(f),g)+\Gamma(f,L(g))-L(\Gamma(f,g))}{2}.\end{aligned}$$

Γ 和 Γ_2 是 $\nabla f^*\cdot\nabla g$ 和 $\nabla^2 f^*\cdot\nabla^2 g$ 的推广. 当 L 是 Riemann 流形上的 Laplace-Beltrami 算子时, 有 $\Gamma(f,g)=\nabla f^*\cdot\nabla g$. Γ 并非对所有 $f,g\in\mathcal{M}$ 的都有定义, 但一般总存在弱 $*$ 稠密的 $*$- 代数 $\mathcal{A}\subset\mathcal{M}$ 使得 L 和 Γ 都在 $\mathcal{A}$ 上有定义. 由 Kadison-Schwarz 不等式可得

$$|S_tf|^2\leqslant S_t|f|^2.$$

所以, 对任意 $0<t<T$, $F(t)=S_t|S_{T-t}f|^2$ 是关于 t 的增函数. 进而有 $S_t\Gamma(S_{T-t}f,S_{T-t}f)=\partial_tF(t)\geqslant 0$ 自动成立.

称 L 满足 $\Gamma_2\geqslant 0$ 条件, 如果 $\partial_t^2F(t)\geqslant 0,\forall t,T,f\in L^2$. 这等价于, 对任意 $f\in\mathcal{A}$, 有

$$\Gamma_2(f,f)\geqslant 0.$$

Bakry [23] 证明了

$$\Gamma_2\geqslant 0\quad\Leftrightarrow\quad\Gamma(S_tf,S_tf)\leqslant S_t\Gamma(f,f)\quad\Leftrightarrow\quad 2S_t|S_tf|^2\leqslant S_{2t}|f|^2+|S_{2t}f|^2,\quad\forall t>0. \tag{2.6}$$

5) 文献 [8,19] 通过应用对应 Hilbert C^* 模的强算子拓扑达到这个目的. 本文的处理是希望避免 Hilbert C^* 模.

热半群、Ornstein-Uhlenbeck 和 Jacobi 半群都满足 $\Gamma_2 \geqslant 0$ 条件[24]. 群 von Neumann 代数上的 Fourier 乘子型 Markov 半群也满足 $\Gamma_2 \geqslant 0$ 条件 (参见第 4 节例 4.3).

对满足 $\Gamma_2 \geqslant 0$ 条件的 Markov 算子半群 $\mathcal{S}=(S_t)_{t\geqslant 0}$, 文献 [8,9] 证明了如下的等价性:

$$\|f\|_{\mathrm{BMO}(L)} \simeq \|f\|_{\mathrm{bmo}(L)} + \sup_{0<t<\infty} \|S_t f - S_{2t} f\|_{\infty}, \tag{2.7}$$

$$\|f\|_{\mathrm{BMO}(L^{\alpha})} \simeq \|f\|_{\mathrm{bmo}(L^{\alpha})} \simeq \|f\|_{\mathrm{BMO}(\sqrt{L})}, \quad \forall\, 0<\alpha<1. \tag{2.8}$$

注 2.2 文献 [19,25] 研究了在算子半群理论框架下的 H^1-BMO 对偶定理. 与 Duong 和 Yan[1,2] 工作的不同之处在于, 二文中的基本假设条件只基于所研究的算子半群本身.

3 泛函演算

本节概括文献 [9] 中关于算子半群 BMO 的 H^{∞}- 泛函演算的结果. 关于经典 H^{∞}- 泛函演算的历史及其在非交换空间上的推广可参见文献 [12,26,27].

泛函演算研究以算子为参变量的函数. 所谓的 H^{∞}- 泛函演算是更经典的 Riesz-Dunford 解析泛函演算的推广. 给定 $0<\theta<\pi$, 记 S_θ 为如下复平面上的一个扇面:

$$S_\theta = \{z \in \mathbb{C}, |\arg z| < \theta\}.$$

对一个 (无界) 算子 L 及在扇面 S_θ 上的有界解析函数 Φ, McIntosh[26,28,29] 用 Cauchy 积分逼近来定义 $\Phi(L)$. Banach 空间 X 上的 (无界) 算子 L 具有有界 H^{∞}- 泛函演算性质, 如果存在一个 S_θ 使得对任意 S_θ 上的有界解析函数 Φ, $\Phi(L)$ 延拓为 X 上的有界算子并且 $\|\Phi(L)\| \leqslant c\|\Phi\|_{\infty}$. 在 McIntosh 及其合作者的开创性工作 [27,28,30,31] 影响下, H^{∞}- 泛函演算理论在过去 30 年里发展迅速, 并广泛应用于调和分析、Banach 空间理论和偏微分方程理论.

H^{∞}- 泛函演算研究的一个主要目的是确定哪些算子具有有界 H^{∞}- 泛函演算性质. Cowling[32]、Duong[33]、Hieber 和 Prüss[34] 证明了对 $1<p<\infty$, $\eta>\frac{\pi}{2}$, 经典 L^p 空间上的保正压缩映射算子半群的生成元都具有有界 $H^{\infty}(S_\eta)$- 泛函演算性质 6). 这样的结果显然不可能对 L_∞ 成立, 但是对 BMO 是可能的.

定理 3.1[9] 假设 $\mathcal{M}$ 是一个半有限 von Neumann 代数, $(S_t)_{t\geqslant 0}$ 是其上的满足 $\Gamma_2 \geqslant 0$ 条件的 Markov 算子半群. L 是 S_t 的生成元. 对任意 $\eta>\frac{\pi}{2}$, L 在 $\mathrm{BMO}(\sqrt{L})$ 空间上具有有界 $H^{\infty}(S_\eta)$- 泛函演算, 并且

$$\|\Phi(L)\|_{\mathrm{BMO}(\sqrt{L})\mapsto \mathrm{BMO}(\sqrt{L})} \leqslant C_\eta \|\Phi\|_{H^{\infty}(S_\eta)}. \tag{3.1}$$

注 3.1 文献 [8,35] 证明了在定理 3.1 假设条件下, (3.1) 对 $\Phi(\sqrt{L})$ 成立.

对最典型的扇面解析函数 $\Phi(z)=z^{\mathrm{i}s}$, $s>0$, 文献 [9] 给出了如下关于参数 s 的渐近估计:

$$\|L^{\mathrm{i}s} f\|_{\mathrm{BMO}(\sqrt{L})} \leqslant c(1+|s|)^{\frac{9}{2}} \exp\left(\frac{\pi|s|}{2}\right) \|f\|_{\mathrm{BMO}(\sqrt{L})}, \tag{3.2}$$

$$\|L^{\mathrm{i}s} f\|_{\mathrm{BMO}(\sqrt{L})} \leqslant c(1+|s|)^{\frac{3}{2}} \exp\left(\frac{\pi|s|}{2}\right) \|f\|_{L_\infty(\mathcal{M})}. \tag{3.3}$$

由于 $\|L^{\mathrm{i}s}\|_{L_2(\mathcal{M})\to L_2(\mathcal{M})}=1$, 定理 2.1 及 L_p- 对偶定理给出如下推论:

6) 当所考虑的算子半群具有对称性时, 内插方法可以帮助把 η 减小到只需大于 $\omega_p=|\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{p}|$.

推论 3.1　假设 $S_t = \mathrm{e}^{-tL}$ 是半有限 von Neumann 代数 $\mathcal{M}$ 上的一个 Markov 算子半群. 假设它满足 $\Gamma_2 \geqslant 0$ 条件, 并具有 Markov 过程扩张, 则对任意 $\eta > \omega_p = |\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{p}|$, $1 < p < \infty$, L 在 $L^p(\mathcal{M})$ 上有有界 $H^\infty(S_\eta)$- 泛函演算性质. 并且, 对任意 $1 < p < \infty$, 有

$$\|L^{\mathrm{i}s}\|_{L^p(\mathcal{M})\to L^p(\mathcal{M})} \leqslant c(1+|s|)^{|\frac{3}{2}-\frac{3}{p}|} \exp\left(\left|\frac{\pi s}{2} - \frac{\pi s}{p}\right|\right). \tag{3.4}$$

注 3.2　Junge 等 [12] 已经得到关于 $L^p(\mathcal{M})$- 泛函演算的结果, 而且不需要假设 $\Gamma_2 \geqslant 0$ 条件. 上面推论的新意在于通过内插给出对 $L^{\mathrm{i}s}$ 范数更好的渐近估计.

注 3.3　文献 [8] 给出了类似推论 3.1 的估计, 但是其证明混淆了 L 和 $\sqrt{L}$, 所以其渐近估计实际上只对 $(\sqrt{L})^{\mathrm{i}s}$ 成立.

4　实例

本节通过具体的例子对算子半群 BMO(L)、bmo(L) 和由球体定义的经典 BMO 进行比较, 并解释转移方法在算子半群 BMO 上的运用.

4.1　交换 von Neumann 代数上的算子半群 BMO

例 4.1　记 $-L$ 为具有非负 Ricci 曲率的完备 Riemann 流形上的 Laplace-Beltrami 算子. 它所生成的热半群 $S_t = \mathrm{e}^{-tL}$ 是一个满足 $\Gamma_2 \geqslant 0$ 条件的 Markov 算子半群. 所以本文中的所有结果都对其成立.

当 $L = -\Delta$ 是 Euclid 空间 $\mathbb{R}^n$ 上的 Laplace 算子时, 本文中的 BMO(L)、bmo(L) 和 BMO$(\sqrt{L})$ 都等同于经典的 BMO 空间, 即由 $f \in L^1(\mathbb{R}^n, \frac{1}{1+|x|^2}dx)$ 并具有如下定义的有界 BMO 范数所组成的 Banach 空间:

$$\|f\|_{\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)} = \sup_{B\subset\mathbb{R}^n} (E_B|f - E_Bf|^2)^{\frac{1}{2}} < \infty,$$

这里上界是对所有 $\mathbb{R}^n$ 中的球体, $E_B = \frac{1}{|B|}\int_B f dx$. 实际上, 通过如下热半群 S_t 的积分表示:

$$\begin{aligned} S_tf(x) &= \frac{1}{\sqrt{4\pi t}^n}\int \exp\left(-\frac{|x-y|^2}{4t}\right) f(y)dy \\ &= \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{\frac{|x-y|^2}{4t}}^\infty \mathrm{e}^{-u}du\right) f(y)dy \\ &= \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}_+}\left(\int_{\mathrm{B}_{\sqrt{4ut}}(x)} f(y)dy\right)\mathrm{e}^{-u}du \\ &= \frac{1}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}\int_{\mathbb{R}_+} \mathrm{e}^{-u}u^{\frac{n}{2}} E_{\mathrm{B}(x,\sqrt{4ut})} f du, \end{aligned}$$

我们得出, 对任意球体 $B_{x,k} = B(x, k\sqrt{t}) \in \mathbb{N}$, 有

$$c^{-1}E_{B_{x,1}}|f| \leqslant T_t|f|(x) \leqslant c\sum_k \mathrm{e}^{-k}E_{B_{x,k}}|f|.$$

再通过 $|\cdot|^2$ 的凸性和 $|E_Bf - E_{kB}f| \lesssim \log k\|f\|_{\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)}$, 即得出 BMO$(\mathbb{R}^n)$ 与 BMO(L)、bmo(L) 的等价性. 通过 Poisson 半群的积分表示, 我们可以同样得出 BMO$(\mathbb{R}^n)$ 与 bmo$(\sqrt{L})$ 的等价性. 由 (2.8) 得到对所有的 $0 < \alpha \leqslant 1$, BMO(Δ^α) 均等同于经典的 BMO$(\mathbb{R}^n)$.

例 4.2 记 $-L = \frac{\Delta}{2} - x \cdot \partial_x$ 为 $(\mathbb{R}^n, \mathrm{e}^{-|x|^2}dx)$ 上的 Ornstein-Uhlenbeck 算子[7]. 记 $O_t f = \mathrm{e}^{-tL}$. O_t 是关于 Gauss 测度 $d\mu = \mathrm{e}^{-|x|^2}dx$ 对称的 Markov 算子半群且满足 $\Gamma_2 \geqslant 0$ 条件. 所以, 本文所有结果都对其成立.

Mauceri 和 Meda[36] 对 Gauss 测度引入了如下的 Mauceri-Meda (MM) BMO 空间:

$$\|f\|_{\mathrm{BMO(MM)}} = \sup_{r_B \leqslant \min\{1, \frac{1}{|c_B|}\}} (E_B^\mu |f - E_B^\mu f|^2)^{\frac{1}{2}}, \tag{4.1}$$

这里 r_B 和 c_B 是球体 B 的半径和中心, $E_B^\mu = \frac{1}{\mu(B)} \int \cdot d\mu$ 是关于 Gauss 测度 $d\mu$ 的平均算子[8]. 通过积分表示

$$O_t(f) = \frac{1}{(\pi - \pi \mathrm{e}^{-2t})^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} \exp\left(- \frac{|\mathrm{e}^{-t}x - y|^2}{1 - \mathrm{e}^{-2t}} \right) f(y)dy, \tag{4.2}$$

我们容易看出, 对 $t \leqslant 4$ 和 $\sqrt{t}|x| \leqslant 1$, 有

$$\begin{aligned} O_t|f|(x) &\geqslant \frac{1}{(\pi - \pi \mathrm{e}^{-2t})^{\frac{n}{2}}} \int_{B(x,\sqrt{t})} \exp\left(- \frac{2|x - y|^2}{1 - \mathrm{e}^{-2t}} \right) f(y)dy \\ &\geqslant c_n E_{B(x,\sqrt{t})}|f|(x). \end{aligned} \tag{4.3}$$

对 $O_{t,\frac{1}{2}} = \mathrm{e}^{-tL^{\frac{1}{2}}}$, $t \leqslant 1$, $tx \leqslant 1$, 有类似的控制. 这是因为

$$O_{t,\frac{1}{2}}|f|(x) = \int_0^\infty O_s|f|(x) \frac{t}{2\sqrt{\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{4s}} s^{-\frac{3}{2}} ds \geqslant \frac{c}{\sqrt{t}} \int_{t^2}^{4t^2} O_s|f|(x)ds.$$

注意对任意 $t < s < 2t$, 有

$$E_{B(x,\sqrt{t})}|f| \leqslant c_n E_{B(x,\sqrt{s})}|f|. \tag{4.4}$$

从 (4.3) 和 (4.4) 可以得出

$$O_{t,\frac{1}{2}}|f|(x) \geqslant c_n E_{B(x,t)}|f|(x). \tag{4.5}$$

记 $O_{t,\alpha} = \mathrm{e}^{-tL^\alpha}$. 应用 (4.3) 和 (4.5), 从 $|\cdot|^2$ 的凸性进一步得到, 对 $\alpha = \frac{1}{2}, 1$, 有

$$4O_{t,\alpha}|f - O_{t,\alpha}f|^2(x) \geqslant c_n E_{B(x,t^{\frac{1}{2\alpha}})}|f - E_{B(x,t^{\frac{1}{2\alpha}})}f(x)|^2(x), \tag{4.6}$$

所以,

$$\|\cdot\|_{\mathrm{BMO(MM)}} \lesssim \|\cdot\|_{\mathrm{BMO}(L)}, \quad \|\cdot\|_{\mathrm{BMO(MM)}} \lesssim \|\cdot\|_{\mathrm{BMO}(\sqrt{L})}.$$

由 (2.8) 得到, 对所有 $0 < \alpha \leqslant 1$, 有[9]

$$\|\cdot\|_{\mathrm{BMO(MM)}} \lesssim \|\cdot\|_{\mathrm{BMO}(L^\alpha)}.$$

由定理 3.1 推出下面的推论:

7) 若用 $\mathrm{e}^{-\frac{|x|^2}{2}}dx$, 则对应的 Ornstein-Uhlenbeck 算子为 $-L = \Delta - x \cdot \partial_x$.

8) 注意对满足 $r_B \leqslant \min\{1, \frac{1}{|c_B|}\}$ 的球体 B, 有 $E_B^\mu|f| \simeq E_B^{dx}|f|$. 所以即使在定义 (4.1) 中将 E_B^μ 换成关于 Lebesgue 测度 dx 的平均算子 E_B^{dx}, 仍然会得出等价的 BMO 范数.

9) 反向的不等式不成立. 对 $\|\cdot\|_{\mathrm{bmo}(L^\alpha)}$ 也有类似的估计.

推论 4.1 对任意 $\eta>\frac{\pi}{2}$, Ornstein-Uhlenbeck 算子 $L=-\frac{\partial_x^2}{2}+x\cdot\partial_x$ 具有从 $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ 到 Mauceri-Meda BMO 空间 BMO(MM) 的有界 $H^\infty(S_\eta)$- 泛函演算.

命题 4.1 对 Ornstein-Uhlenbeck 算子半群, $\mathrm{bmo}(L)\neq\mathrm{BMO}(L)$.

固定 $s>100$, 令 $f(y)=\frac{1}{\sqrt{4\pi s}}\exp(-\frac{|y|^2}{4s})$, 则有

$$\begin{aligned}(O_t|f|^2-|O_tf|^2)(x)&=\frac{1}{4\pi\sqrt{(s+2v)s}}\exp\bigg(-\frac{|\mathrm{e}^{-t}x|^2}{2s+4v}\bigg)-\frac{1}{4\pi(s+v)}\exp\bigg(-\frac{|\mathrm{e}^{-t}x|^2}{2s+2v}\bigg)\\&=\bigg(\frac{1}{4\pi\sqrt{(s+2v)s}}-\frac{1}{4\pi(s+v)}\bigg)\exp\bigg(-\frac{|\mathrm{e}^{-t}x|^2}{2s+4v}\bigg)\\&\quad+\frac{1}{4\pi(s+v)}\bigg(\exp\bigg(-\frac{|\mathrm{e}^{-t}x|^2}{2s+4v}\bigg)-\exp\bigg(-\frac{|\mathrm{e}^{-t}x|^2}{2s+2v}\bigg)\bigg)\\&\lesssim\frac{1}{s^3}+\frac{1}{s^2}\lesssim\frac{1}{s^2}.\end{aligned}$$

所以, $\|f\|_{\mathrm{bmo}(L)}\lesssim\frac{1}{s}$. 另一方面, 对 $v=\frac{1-\mathrm{e}^{-2t}}{4}$, $v'=\frac{1-\mathrm{e}^{-4t}}{4}$, 有

$$(O_tf-O_{2t}f)(x)=\frac{1}{\sqrt{4\pi(s+v)}}\mathrm{e}^{-\frac{|\mathrm{e}^{-t}x|^2}{4s+4v}}-\frac{1}{\sqrt{4\pi(s+v')}}\mathrm{e}^{-\frac{|\mathrm{e}^{-2t}x|^2}{4s+4v'}}.$$

对 $x^2=\mathrm{e}^{2t}(4s+4v)$, $t=10$, 有

$$\begin{aligned}|(O_tf-O_{2t}f)(x)|&\geqslant\bigg|\frac{1}{\sqrt{4\pi(s+v)}}\mathrm{e}^{-1}-\frac{1}{\sqrt{4\pi(s+v')}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{100}}\bigg|\\&\geqslant\frac{1}{2\sqrt{4\pi(s+v')}}\\&\geqslant\frac{1}{10\sqrt{s}}.\end{aligned}$$

所以,

$$\|f\|_{\mathrm{BMO}(L)}\geqslant\sup_{t>0}\|O_tf-O_{2t}f\|_{L_\infty}\geqslant\frac{\sqrt{s}}{5}\|f\|_{\mathrm{bmo}(L)}.$$

令 $s\to\infty$, 从而得到对 Ornstein-Uhlenbeck 算子半群, BMO(L) 空间严格小于 bmo(L) 空间. 所以, 当 $\alpha=1$ 时, (2.8) 一般不成立.

4.2 非交换 von Neumann 代数上的算子半群 BMO

例 4.3 记 (G,μ) 为单一模的局部紧群及其上的 Haar 测度. 记 λ_g $(g\in G)$ 为 $L^2(G)$ 上的平移算子

$$\lambda_g(f)(h)=f(g^{-1}h).$$

所谓的群 von Neumann 代数 $L^\infty(\hat{G})$ 定义为

$$\bigg\{f=\int_G\hat{f}(g)\lambda_gd\mu(g);\hat{f}\in C_c(G)\bigg\}$$

在 $B(L_2(G))$ 中的弱 $*$ 闭包. 在 $L^\infty(\hat{G})$ 上可以自然地定义迹 τ,

$$\tau f=\hat{f}(e).$$

当 G 是交换群时, $L^\infty(\hat{G})$ 是 G 的 Pontryagin 对偶群 $\hat{G}$ 上的 L^∞ 空间. 特别地, 当 G 是整数群 $\mathbb{Z}$ 时, $\lambda_k = \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}k\cdot}$ $(k\in\mathbb{Z})$ 并且 $L^p(\hat{\mathbb{Z}}) = L^p(\mathbb{T})$, 其中 $L^p(\mathbb{T})$ 是单位圆环上的 L^p 空间.

对 G 上的复值函数 φ, 我们称 φ 是条件负定的 (当 $\varphi(g^{-1}) = \varphi(g)^*$ 时), 如果对任意 $\sum_g a_g = 0$ 的系数 $a_g\in\mathbb{C}$, φ 满足

$$\sum_{g,h} \overline{a_g} a_h \varphi(g^{-1}h) \leqslant 0. \tag{4.7}$$

由 Schöenberg 定理

$$S_t : \lambda_g = \mathrm{e}^{-t\varphi(g)}\lambda_g$$

延拓为 von Neumann 代数 $L^\infty(\hat{G})$ 上的 Markov 算子半群当且仅当 φ 是取实值的条件负定函数且满足 $\varphi(e) = 0$. 该半群的生成元是由

$$L : \lambda_g \mapsto \varphi(g)\lambda_g$$

线性延拓成的稠定 (无界) 算子.

记

$$K_\varphi(g,h) = \frac{1}{2}(\varphi(g) + \varphi(h) - \varphi(g^{-1}h))$$

为关于 φ 的 Gromov 型. 我们可以直接从 (4.7) 验证得出 K_φ 是 $G\times G$ 上的正定核. 所以, K_φ^2 也是正定的. 这等价于算子半群 S_t 满足 $\Gamma_2 \geqslant 0$ 条件. 实际上, 容易计算得出

$$\Gamma\left(\sum_g a_g\lambda_g, \sum_g a_g\lambda_g\right) = \sum_{g,h} \bar{a}_g a_h K_\varphi(g,h)\lambda_{g^{-1}h}, \tag{4.8}$$

$$\Gamma_2\left(\sum_g a_g\lambda_g, \sum_g a_g\lambda_g\right) = \sum_{g,h} \bar{a}_g a_h K_\varphi^2(g,h)\lambda_{g^{-1}h}, \tag{4.9}$$

所以这类群 von Neumann 代数上的 Markov 算子半群自动满足 $\Gamma_2 \geqslant 0$ 条件. 同时, 这类半群都具有 Markov 过程扩张 (参见文献 [37]). 我们把以上内容概括为如下命题:

命题 4.2 记 (G,μ) 为单一模的局部紧群及其上的 Haar 测度. 设 φ 为 G 上的实值负定函数满足 $\varphi(e) = 0$. 令 $S_t(\lambda_g) = \mathrm{e}^{-t\varphi(g)}\lambda_g$, $t>0$, 则 S_t 线性延拓为 $L^\infty(\hat{G})$ 上具有 Markov 过程扩张的 Markov 算子半群且满足 $\Gamma_2\geqslant 0$ 条件.

例 4.4 记 $G = \mathbb{F}_2$ 为两个自由元生成的非交换群. 记 $|g|$ 为 $g\in G$ 的约化字长度, 则 $\varphi : g\mapsto |g|$ 是实值负定函数 (参见文献 [38]). 由命题 4.2 知,

$$L : \lambda_g \mapsto |g|\lambda_g$$

生成自由群 von Neumann 代数上的 Markov 算子半群. 称 $S_t = \mathrm{e}^{-tL}$ 为自由群上的 Poisson 算子半群 (参见文献 [12]). 其 Markov 过程扩张可以通过对经典 Markov 过程作自由乘法得到 (参见文献 [12]). 所以相关的 BMO 空间满足内插定理 2.1,

$$[\mathrm{BMO}(L), L_1(\hat{\mathbb{F}}_2)]_{\frac{1}{p}} = L_p(\hat{\mathbb{F}}_2), \quad 1<p<\infty. \tag{4.10}$$

稀疏 Fourier 乘子 根据命题 4.2 知, L 满足 $\Gamma_2\geqslant 0$ 条件. 所以, L 在 $\mathrm{BMO}(\sqrt{L})$ 上具有有界 H^∞-泛函演算并满足定理 3.1. 根据 Carleson 插值定理, 对任意稀疏序列 $\{a_k\}\subset\mathbb{N}$ (即满足 $\liminf_k \frac{a_{k+1}}{a_k} > 1$ 的序列), $0<\theta<\pi$, 以及符号列 $\varepsilon_k = \pm 1$, 存在在扇区 $S_\theta = \{z\in\mathbb{C}, |\arg z| < \theta\}$ 上解析有界的函数 $\Phi_{\theta,\varepsilon}$ 使得 $\Phi_{\theta,\varepsilon}(a_k) = \varepsilon_k$. 由定理 3.1 推出下面的推论:

推论 4.2 给定任意稀疏序列 $a_k \in \mathbb{N}$, 设 $g_{k,j} \in \mathbb{F}_2$ $(k, j \in \mathbb{N})$ 满足 $|g_{k,j}| = a_k$. 令

$$x_k = \sum_j c_{k,j} g_{k,j} \in L^2(\hat{\mathbb{F}}_2),$$

则 x_k 是 $\mathrm{BMO}(\sqrt{L})$ 上的无条件序列. 这就是说对任意符号列 ε_k, 有

$$\Big\|\sum_k x_k\Big\|_{\mathrm{BMO}(\sqrt{L})} \simeq \Big\|\sum_k \varepsilon_k x_k\Big\|_{\mathrm{BMO}(\sqrt{L})}.$$

注 4.1 以上推论是文献 [12] 中关于 $L^p(\hat{\mathbb{F}}_2)$ 的理论的端点情况.

转移方法 在自由群上还可以定义其他条件负定函数, 从而得到其他的 Markov 算子半群. 例如, 固定两个生成元 $a, b \in \mathbb{F}_2$, 对 $g = a^{k_1} b^{k_2} a^{k_3} \cdots \cdot^{k_n}$, 或 $g = b^{k_1} a^{k_2} b^{k_3} \cdots \cdot^{k_n}$, 记

$$|g|_z = |k_1 + k_2 + \cdots + k_n|.$$

容易验证 $\phi(g) = |g|_z$ 是条件负定的. 所以,

$$L_z : \lambda_g \mapsto |g|_z \lambda_g$$

生成自由群 von Neumann 代数上的 Markov 算子半群 e^{-tL_z}. 可以相应地定义空间 $\mathrm{BMO}(L_z)$. 我们希望通过它说明转移定理的想法可以方便地应用于算子半群 BMO. 给定 $z \in \mathbb{T}$, 考虑自由群 von Neumann 代数 $L^\infty(\hat{\mathbb{F}}_2)$ 上满足

$$\pi_z(\lambda_{a^{k_1}} \lambda_{b^{k_2}}) = z^{k_1 + k_2} \lambda_{a^{k_1}} \lambda_{b^{k_2}}$$

的 $*$- 同态 π_z. 容易看出

$$\pi_z(\lambda_{\cdot^{k_1} \cdots a^{k_i} b^{k_{i+1}} \cdots \cdot^{k_n}}) = z^{k_1 + k_2 + \cdots + k_n} \lambda_{\cdot^{k_1} \cdots a^{k_i} b^{k_{i+1}} \cdots \cdot^{k_n}}.$$

由于 π_z 也是保迹的, 对所有 $1 \leqslant p \leqslant \infty$, 它延拓为 $L^p(\hat{\mathbb{F}}_2)$ 上的等距映射. 现在, 我们把 z 看成单位圆环 $\mathbb{T}$ 上的参变量, 则对于任意 $x \in L^p(\hat{\mathbb{F}}_2)$, $f(z) = \pi_z(x)$ 可以被看成从 $\mathbb{T}$ 到 $L^p(\hat{\mathbb{F}}_2)$ 上的算子值函数. 对于 $\mathbb{T}$ 上的概率测度 $d\nu = \frac{1}{2\pi} d\theta$, 有

$$\|f\|_{L^p(\mathbb{T}, L^p(\hat{\mathbb{F}}_2))} = \left(\int_{\mathbb{T}} \|\pi_z(x)\|^p_{L^p(\hat{\mathbb{F}}_2)} d\nu\right)^{\frac{1}{p}} = \|x\|_{L^p(\hat{\mathbb{F}}_2)}, \quad \forall\, 1 \leqslant p \leqslant \infty.$$

给定有界函数 $m : Z_+ \mapsto \mathbb{C}$, 定义 $L^p(\mathbb{T})$ 和 $L^p(\hat{\mathbb{F}}_2)$ 上的 Fourier 乘子 T_m 和 $\tilde{T}_m$ 如下:

$$T_m : z^k \mapsto m(|k|) z^k, \quad \tilde{T}_m : \lambda_g \mapsto m(|g|_z) \lambda_g.$$

我们发现 $\pi_z(\tilde{T}_m x) = (T_m \otimes \mathrm{id}) \pi_z(x)$. 所以,

$$\|\tilde{T}_m\|_{L^p(\hat{\mathbb{F}}_2) \to L^p(\hat{\mathbb{F}}_2)} \leqslant \|T_m \otimes \mathrm{id}\|_{L^p(\mathbb{T}, L^p(\hat{\mathbb{F}}_2)) \to L^p(\mathbb{T}, L^p(\hat{\mathbb{F}}_2))}. \tag{4.11}$$

这是大家熟知的对 L^p 空间的转移定理. 这样的转移定理对算子半群 BMO 也成立. 实际上, 令 $m(k) = \mathrm{e}^{-t|k|}$, 则 T_m 成为圆环上经典的 Poisson 半群 $\mathrm{e}^{-t\sqrt{\Delta}}$, 而 $\tilde{T}_m$ 成为自由群上的 e^{-tL_z}, 并且有 [10)]

$$\pi_z(\mathrm{e}^{-tL_z} x) = \mathrm{e}^{-t\sqrt{\Delta}} \pi_z(x),$$

10) 这里, 为记号方便, 我们视 $\mathrm{e}^{-t\sqrt{\Delta}}$ 为 $\mathrm{e}^{-t\sqrt{\Delta}} \otimes \mathrm{id}$.

以及

$$\mathrm{e}^{-t\sqrt{\Delta}}|\pi_z(x)-\mathrm{e}^{-t\sqrt{\Delta}}\pi_z(x)|^2=\pi_z(\mathrm{e}^{-tL_z}|x-\mathrm{e}^{-tL_z}x|^2).$$

所以自由群 von Neuman 代数上的 BMO(L_z) 空间等价于如 (1.2) 那样的由经典 Poisson 半群定义的算子值 BMO 空间的一个子空间. 由例 4.1 知, 这等价于文献 [39] 中更经典的算子值 BMO 空间的一个子空间. 所以,

$$\|\tilde{T}_m\|_{\mathrm{BMO}(L_z)\to\mathrm{BMO}(L_z)}\leqslant\|T_m\otimes\mathrm{id}\|_{\mathrm{BMO}(\sqrt{\Delta})\to\mathrm{BMO}(\sqrt{\Delta})}\lesssim\|T_m\otimes\mathrm{id}\|_{\mathrm{BMO}(\mathbb{T})\to\mathrm{BMO}(\mathbb{T})}.\tag{4.12}$$

诸多经典 BMO 空间的定理, 如 H_1-BMO 对偶定理, 也可以转移到 BMO(L_z) 上. 由于 $\{g\in\mathbb{F}_2;|g|_z=0\}$ 非常大, 因此 BMO(L_z) 并不是一个非常有用的空间. 但是, 在量子环面上 [40–43]、具有有限维 cocycle 的群 von Neumann 代数上 [44,45] 和对双算子积分算子半群 [46], 通过如上所述的转移方法, 可以得到关于有意思的非交换算子半群 BMO 空间及其上 Fourier 乘子的性质和定理.

注 4.2 Markov 算子半群中的算子一般都不是局部算子, 这限制了本文定义的这类抽象算子半群 BMO 对奇异积分算子的应用. 文献 [47] 通过对非交换算子半群 BMO 空间局部化得到了关于一类非交换奇异积分算子有界性的外插定理.

致谢 作者感谢审稿人的仔细阅读及非常有益的修改意见.

参考文献

1 Duong X T, Yan L X. New function spaces of BMO type, the John-Nirenberg inequality, interpolation, and applications. Comm Pure Appl Math, 2005, 58: 1375–1420

2 Duong X T, Yan L X. Duality of Hardy and BMO spaces associated with operators with heat kernel bounds. J Amer Math Soc, 2005, 18: 943–973

3 Hofmann S, Lu G, Mitrea D, et al. Hardy Spaces Associated to Non-Negative Self-Adjoint Operators Satisfying Davies-Gaffney Estimates. Memoirs of the American Mathematical Society, vol. 214. Providence: Amer Math Soc, 2011

4 Betancor J. Hardy spaces associated with semigroups of operators. Rev Un Mat Argentina, 2011, 52: 1–22

5 Garnett J B. Bounded Analytic Functions. Graduate Texts in Mathematics, vol. 236. New York: Springer, 2007

6 Garsia A M. Martingale Inequalities: Seminar Notes on Recent Progress. Mathematics Lecture Notes Series. Reading-London-Amsterdam: W. A. Benjamin, 1973

7 Stein E M. Topics in Harmonic Analysis Related to Littlewood-Paley Theory. Princeton: Princeton University Press, 1970

8 Junge M, Mei T. BMO spaces associated with semigroups of operators. Math Ann, 2012, 352: 691–743

9 Ferguson T, Mei T, Simanek B. H^∞-calculus for semigroup generators on BMO. Adv Math, 2019, 347: 408–441

10 Junge M, Mei T, Parcet J. An invitation to harmonic analysis associated with semigroups of operators. In: Harmonic Analysis and Partial Differential Equations. Contemporary Mathematics, vol. 612. Providence: Amer Math Soc, 2014, 107–122

11 Pisier G, Xu Q. Non-commutative L_p-spaces. In: Handbook of the Geometry of Banach Spaces II. Amsterdam: North-Holland, 2003, 1459–1517

12 Junge M, Le Merdy C, Xu Q. H^∞ Functional Calculus and Square Functions on Noncommutative L^p-Spaces. Astérisque vol. 305. Paris: Soc Math France, 2006

13 Ozawa N, Popa S. On a class of II_1 factors with at most one Cartan subalgebra. Ann of Math (2), 2010, 172: 713–749

14 Connes A, Shlyakhtenko D. L_2-homology for von Neumann algebras. J Reine Angew Math, 2005, 586: 125–168

15 Popa S. On a class of type II_1 factors with Betti numbers invariants. Ann of Math (2), 2006, 163: 809–899

16 Junge M, Mei T. Noncommutative Riesz transforms—a probabilistic approach. Amer J Math, 2010, 132: 611–680

17 Junge M, Mei T, Parcet J. Noncommutative Riesz transforms-dimension free bounds and Fourier multipliers. J Eur Math Soc (JEMS), 2018, 20: 529–595

18 Ozawa N, Rieffel M A. Hyperbolic group C^*-algebras and free-product C^*-algebras as compact quantum metric spaces. Canad J Math, 2005, 57: 1056–1079

19 Mei T. Tent spaces associated with semigroups of operators. J Funct Anal, 2008, 255: 3356–3406

20 Koosis P. Introduction to H^p Spaces. With an Appendix on Wolff's Proof of the Corona Theorem. London Mathematical Society Lecture Note Series, vol. 40. Cambridge-New York: Cambridge University Press, 1980

21 Varopoulos N Th, Saloff-Coste L, Coulhon T. Analysis and Geometry on Groups. Cambridge Tracts in Mathematics, vol. 100. Cambridge: Cambridge University Press, 1992

22 Caspers M. Harmonic analysis and BMO-spaces of free Araki-Woods factors. Studia Math, 2019, 246: 71–107

23 Bakry D. Functional inequalities for Markov semigroups (English summary). In: Probability Measures on Groups: Recent Directions and Trends. Mumbai: Tata Institute of Fundamental Research, 2006, 91–147

24 Bakry D. Remarques sur le semigroups de Jacobi. Astérisque, 1996, 236: 23–39

25 Mei T. An H^1-BMO duality for semigroups of operators. arXiv:1204.5082, 2012

26 Cowling M, Doust I, McIntosh A, et al. Banach space operators with a bounded H^∞-functional calculus. J Aust Math Soc, 1996, 60: 51–89

27 Haase M. The Functional Calculus for Sectorial Operators. Operator Theory: Advances and Applications, vol. 169. Basel: Birkhäuser, 2006

28 McIntosh A. Operators which have an H^∞ functional calculus. In: Miniconference on Operator Theory and Partial Differential Equations (North Ryde, 1986). Proceedings of the Centre for Mathematical Analysis, vol. 14. Canberra: Australian National University, 1986, 210–231

29 Albrecht D, Duong X T, McIntosh A. Operator theory and harmonic analysis. In: Instructional Workshop on Analysis and Geometry, Part III (Canberra, 1995). Proceedings of the Center for Mathematical Analysis, vol. 34. Canberra: Australian National University, 1996, 77–136

30 Kunstmann P, Peer C, Weis L. Maximal L^p-regularity for parabolic equations, Fourier multiplier theorems and H^∞-functional calculus. In: Functional Analytic Methods for Evolution Equations. Lecture Notes in Mathematics, vol. 1855. Berlin: Springer, 2004, 65–311

31 Weis L. Operator-valued Fourier multiplier theorems and maximal L_p-regularity. Math Ann, 2001, 319: 735–758

32 Cowling M. Harmonic analysis on semigroups. Ann of Math (2), 1983, 117: 267–283

33 Duong X T. H^∞ functional calculus of second order elliptic partial differential operators on L_p-spaces. In: Proceedings of the Centre for Mathematical Analysis, vol. 24. Canberra: Australian National University, 1989, 91–102

34 Hieber M, Prüss J. Funtional calculi for linear operators in vector valued L^p-spaces via the transference principle. Adv Differential Equations, 1998, 3: 847–872

35 Mei T, de la Salle M. Complete boundedness of heat semigroups on the von Neumann algebra of hyperbolic groups. Trans Amer Math Soc, 2017, 369: 5601–5622

36 Mauceri G, Meda S. BMO and H^1 for the Ornstein-Uhlenbeck operator. J Funct Anal, 2007, 252: 278–313

37 Ricard É. A Markov dilation for self-adjoint Schur multipliers. Proc Amer Math Soc, 2008, 136: 4365–4372

38 Haagerup U. An example of a non nuclear C^*-algebra, which has the metric approximation property. Invent Math, 1978, 50: 279–293

39 Mei T. Operator Valued Hardy Spaces. Memoirs of the American Mathematical Society, vol. 188. Providence: Amer Math Soc, 2007

40 Chen Z, Xu Q, Yin Z. Harmonic analysis on quantum tori. Comm Math Phys, 2013, 322: 755–805

41 Xia R, Xiong X, Xu Q. Characterizations of operator-valued Hardy spaces and applications to harmonic analysis on quantum tori. Adv Math, 2016, 291: 183–227

42 Xiong X, Xu Q H, Yin Z. Sobolev, Besov and Triebel-Lizorkin Spaces on Quantum Tori. Memoirs of the American Mathematical Society, vol. 252. Providence: Amer Math Soc, 2018

43 González-Pérez A, Junge M, Parcet J. Smooth Fourier multipliers in group algebras via Sobolev dimension. Ann Sci Éc Norm Supér (4), 2017, 50: 879–925

44 Junge M, Mei T, Parcet J. Smooth Fourier multipliers on group von Neumann algebras. Geom Funct Anal, 2014, 24: 1913–1980

45 Parcet J, Rogers K M. Twisted Hilbert transforms vs Kakeya sets of directions. J Reine Angew Math, 2016, 2016: 137–172

46 Caspers M, Junge M, Sukochev F, et al. BMO-estimates for non-commutative vector valued Lipschitz functions. J Funct Anal, 2020, 278: 108317

47 Junge M, Mei T, Parcet J, et al. Algebraic Calderón-Zygmund theory. Adv Math, 2020, in press

Semigroup BMO spaces and applications in noncommutative analysis

Tao Mei

Abstract This survey is an introduction to recent works on semigroup bounded mean oscillation (BMO) spaces and their applications to Fourier analysis on noncommutative L^p spaces. The main objects to be introduced are the interpolation theorem of semigroup BMOs and the H^∞-functional calculus results in the recent work of noncommutative analysis.

Keywords **Markov semigroup of operators, noncommutative L^p space, bounded mean oscillation, Fourier multiplier**

MSC(2010) **46L51, 42B25, 46L10, 47C15, 47D06**

doi: 10.1360/SSM-2020-0205