中国科学: 数学 2010 年 第 40 卷 第 4 期: 331～348
www.springerlink.com math.scichina.com
《中国科学》杂志社
SCIENCE CHINA PRESS

基于吴方法的确定和分类 (偏) 微分方程古典和非古典对称新算法理论

特木尔朝鲁[①*], 白玉山[②]

① 上海海事大学文理学院, 上海 200135;
② 内蒙古工业大学理学院, 呼和浩特 010051
E-mail: tmchaolu@dbc.shmtu.edu.cn, mbaiyushan@imut.edu.cn

收稿日期: 2008-12-01; 接受日期: 2009-10-27; * 通信作者
教育部博士点专项基金 (批准号: 20070128001)、上海教委支出预算 (批准号: 2008069) 和科技创新 (批准号: 09YZ239) 资助项目

摘要 本文基于微分形式吴方法, 给出了确定和分类微分方程古典和非古典对称的统一的机械化算法理论. 用该理论克服了在传统 Lie 算法中存在的缺陷, 使确定和分类对称更系统和直接, 从而扩大了对称方法的应用范围. 这也是吴方法在微分领域中一个新的应用.

关键词 对称 分类 吴方法 微分特征列集

MSC (2000) 主题分类 03F03, 03F65, 35A30, 58J70, 58J72

1 引言

由挪威数学家 Sophus Lie (1842–1899) 提出的 (偏) 微分方程 (PDEs) 古典对称方法广泛应用于数学、物理、工程等诸多领域 [1–3]. 所谓对称是指作用于自变量和因变量空间上使所考虑 PDEs 不变的单参数连续变换群. 为推广该对称方法, 人们提出了各种广义对称的概念, 如非古典对称、势对称、Lie-Backlund 对称、条件对称等 [1–7], 这些概念成为研究 PDEs 问题的重要理论和计算工具.

应用对称方法的前提是确定 PDEs 拥有的各类对称. 确定对称的主要方法是由 Lie 本人提出和建立的无穷小变换方法, 称为 Lie 算法. Lie 算法把确定对称的问题转化为确定对应无穷小向量 (InfV) 的问题. 而该 InfV 是由满足所谓确定方程组 (DTEs) 的无穷小生成函数确定. 所以 Lie 算法的实现过程是先产生 DTEs, 然后精确求解该 DTEs. 完成这个过程将涉及到大量、复杂的机械化计算. 如果用手工计算, 即使对一些较简单方程也容易出错. 所以常常借助计算机代数系统 (CAS), 如 Mathematica、Maple 等来完成计算. 为此目的, Reid[8], Schwarz[9], Wolf 和 Brand[10], Mansfield[11], Lisle[12], 和许多其他研究者 (见文献 [13,14] 及其参考文献) 部分实现了产生和简化 DTEs 的算法和 CAS 程序包 [14]. 这些算法和程序在产生 DTEs 时受所考虑方程必须具有所谓 “可解和三角化” 结构的限制 (该限制的具体叙述见文献 [13] 中第 372–375 页). 人们为了克服求解 DTEs 的困难, 用到了 Cartan 外微分 [15]、Janet-Riquier 理论 [9], Grobner 基 [11] 等各种理论和算法, 采取了把 DTEs 先转化为较简单形式, 如对合 (involutive) 形式、被动 (passive) 形式 [16], 然后求解约化系统的策略. 尽管已付出许多努力, 但计算 PDEs 对称中仍有诸多问题有待探索, 寻求有效确定对称的方法是人们致力于研究的课题之一 [17].

引用格式: Temuer C, Bai Y S. A new algorithmic theory for determining and classifying classical and non-classical symmetries of partial differential equations (in Chinese). Sci Sin Math, 2010, 40(4): 331–348

对称方法中另一个具有挑战性的问题是 PDEs 对称分类问题. 对一个含参数 θ 的 PDEs: $\Delta(\theta)=0$, 确定所有参数 θ 和其对应的最大对称 G_θ 的问题称为该含参数 PDEs 的对称分类问题 (更详细的描述见文献 [4]). 如果分类是穷尽的, 则称之为完全对称分类问题. 对称分类问题不仅有其理论意义, 而且也有很强的实际意义. 许多描述数学物理问题的 PDEs 都含有实验和经验不易确定的参数, 而实际问题要求在一定条件 (如对称存在) 下确定这些参数和方程的解. 一般这些参数都以表格和图形形式出现. 在描述问题的连续方程中它们扮演着任意参数的角色. 如, 波动方程 $u_{tt}=(F(u)u_x)_x$ 和 Burgers-KdV 方程 $u_t+\alpha uu_x+\beta u_{xx}+\gamma u_{xxx}=0$ 含有参数 $\theta=F(u)$ 和 $\theta=\{\alpha,\beta,\gamma\}$. 这些方程的对称 G_θ 随参数 θ 取不同值而不同 [18]. 这些 PDEs 对什么样的参数 θ 拥有什么样的对称这一问题在理论研究和实际问题的建模中经常遇到. 所以对称分类能使我们合理选择参数 θ 的形式和值, 进而获得物理问题的最佳数学模型. 一般来讲, 一些简单的情形之外, 确定对称分类是非常困难的, 除了对称计算中存在的困难之外, 还有因参数而引起的更多的困难. 由于这些原因, 发现有效方法进一步简化计算是非常有必要的. 在文献 [19,20] 中, Torrisi 和 Ibragimov 等用等价群 (equivalence group) 方法研究了一些含参数热传导和波动方程的对称分类. 在文献 [8] 中, Reid 实现了一个 Maple 程序包, 用以确定 PDEs 古典对称的结构和维数. 最近, 文献 [21,22] 研究了非线性 Schrödinger 方程的对称分类, 并发展了所谓协调方法 (compatibility method). 在文献 [23,24] 中, Popovych, Ivanova 和 Huang 等进一步考虑了所谓附加等价变换, 推广了协调方法, 并用该方法给出了一类非线性发展方程的完全对称分类. 在文献 [25–28] 中, 我们给出了一类非线性电报方程局部和非局部对称及守恒律的完全分类. 另外, 对于新发展起来的许多广义对称, 确定和分类 PDEs 对称是对称方法进一步发展的前沿课题 [13,17].

综上, 虽然对称方法已经取得了很大的发展, 但仍存在许多有待进一步研究的问题. 为提高对称方法的应用效率, 使方法适用于更广泛类 PDEs 的研究, 非常有必要研究有效确定更一般形式 PDEs 的各类对称的算法.

由我国数学家吴文俊上世纪 70 年代建立的吴方法是代数几何领域的基础性算法理论 [29−31]. 吴方法的纯代数形式的算法理论在广泛的学科领域, 如机器证明、优化问题、曲面拼接问题、连杆机设计等领域中得到了广泛的应用 [29,30]. 吴方法的微分情形是上世纪 80 年代建立起来的 [31]. 与 Ritt 方法 [32]、Gröbner 基方法 [11,33] 等其它方法比较, 吴方法对处理微分多项式系统有其自己的优点. 该方法以直接分析微分多项式零点集和微分约化为主要目标. 未涉及到代数理想的概念, 在零点集的分析中主要用到微分特征列集 (dchar-set) 的概念, 并发展了良序原理、零点分解定理和代数簇分解定理等基础性结论, 同时给出了基础算法: 特征列集机械化算法.

本文借助微分形式吴方法从不同的角度去探索 PDEs 对称的确定和分类问题, 是吴方法在微分领域中的一个新的应用. 吴方法中给出的基本结果和算法是本文研究方法的基础. 研究发现, 微分形式吴方法是有效克服 Lie 算法缺陷的方法之一. 该方法, 能够有效突破现有算法中的 “方程必具备 ‘可解和三角化’ 结构” 的限制, 从而为对称计算和分类提供统一的机械化算法理论, 并使对称方法适用于更广泛类 PDEs. 这将导致对称方法在物理和工程问题中得到进一步的广泛应用.

本文以 PDEs 古典和非古典对称为主线展开讨论, 其思想和算法可以应用到 PDEs 其它类对称, 如势对称、Lie-Backlund 对称等.

本文接下来的内容安排如下. 第 2 节简单回顾本文中用到的关于 Lie 算法和吴方法的基本结果, 给出了各种对称的统一准则, 同时罗列了本文主要研究的 Lie 算法中存在的一些问题. 第 3 节给出主要研究结果, 即, 给出了基于微分形式吴方法的确定和完全分类 PDEs 对称的新算法理论和算法. 同时, 给出了几个应用例子, 其中包括单参数线性波动方程的完全势对称分类, 说明了所给出方法的有效性. 第 4 节给出结束语和一些讨论.

2 基本结果和问题

为了整体上的理解, 我们首先简单回顾传统 Lie 算法, 并提出该算法中存在的一些问题, 再给出本文中用到的关于吴方法的基本结果.

2.1 记号

设 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \dots, x_p)$ 是自变量, $U = (u_1, u_2, \dots, u_q)$ 是 $\boldsymbol{x}$ 的向量函数. 记 U 关于 $\boldsymbol{x}$ 的导数集合为 $U^\alpha = \{u_i^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|} u_i}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_p^{\alpha_p}}, i = 1, 2, \dots, q\}$, 其中 $\alpha = \{\alpha_1, \dots, \alpha_p\} \in \mathbb{Z}_+^p$ ($\mathbb{Z}_+$ 是非负整数集) 且 $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_p \geqslant 1$. 记 $\partial U = \{U^\alpha, \alpha \in \mathbb{Z}_+^p\}$ 和 $X = \boldsymbol{x} \cup U$. 记号 $\mathcal{A}_X$ 代表以 X 的函数为元素, 具有微分算子 $\partial_{x_i}, i = 1, 2, \dots, p$ 的微分域. $\mathcal{A}_X[\partial U]$ 是关于 ∂U 的 $\mathcal{A}_X$ 上的微分多项式环. 与通常一样, 我们用 $\mathrm{Zero}(DPS)$ 记一个微分多项式系统 $DPS \subset \mathcal{A}_X[\partial U]$ 在 $\mathcal{A}_X$ 的一个扩域上的零点集. 对一个微分多项式 $I \in \mathcal{A}_X[\partial U]$, 用 $\mathrm{Zero}(DPS/I)$ 记 DPS 的使 $I \neq 0$ 的零点集.

考虑如下一般形式的 PDEs

$$\Delta(X, \partial U) = 0, \tag{1}$$

其中 PDEs (1) 的左边是一个微分多项式系统, 即 $\Delta = \{H_i(X, \partial U), i = 1, 2, \dots, m\} \subset \mathcal{A}_X[\partial U]$, 称为 PDEs (1) 的对应微分多项式系统. 该 PDEs 的解集为 $\mathrm{Zero}(\Delta)$.

2.2 对称准则的统一

虽然 PDEs 各类对称的内涵有所不同, 但它们的判别准则可以形式上统一化. 下面通过回顾计算 PDEs 古典和非古典对称的 Lie 算法的过程, 给出这个统一表示方法.

2.2.1 古典对称

Lie 群理论 [1,2] 给出, 确定 PDEs 古典对称等价于确定其如下形式的对应 InfV,

$$\mathcal{X} \quad = \quad \sum_{i=1}^{p} \xi_i(X) \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^{q} \eta_j(X) \frac{\partial}{\partial u_j}, \tag{2}$$

其中 ξ_i 和 η_j 称为该对称的无穷小生成函数, 它们依赖于 X. 我们用 $\mathrm{Pr}\mathcal{X}$ 表示该 InfV 在变量空间 $X \cup \partial U$ 上的延拓. 则 PDEs (1) 在该对称下的不变性由下面的对称准则来判断 [1,2].

定理 1 (Lie 准则) 微分算子 (2) 是满秩 PDEs (1) 的对称的 InfV 的充分必要条件是

$$\mathrm{Pr}\mathcal{X}(\mathcal{R})|_{\mathrm{Zero}(\mathcal{R})} \equiv 0 \tag{3}$$

成立. 即在解集 $\mathrm{Zero}(\mathcal{R})$ 上恒有 $\mathrm{Pr}\mathcal{X}(\mathcal{R}) \equiv 0$, 其中 $\mathcal{R} = \Delta$.

恒等式 (3) 称为 PDEs (1) 的对称的无穷小方程, 是从 $\mathrm{Pr}\mathcal{X}(\mathcal{R})$ 中消除解集 $\mathrm{Zero}(\mathcal{R})$ 获得的. 令恒等式 (3) 中独立单项式系数为零, 则得到 $\mathcal{X}$ 的 DTEs, 它是一个超定线性齐次的关于 ξ_i 和 η_j 的 PDEs. 精确求解该 DTEs, 可以确定 (2). 以上即为 Lie 算法基本过程的概括.

注 若把 (2) 和 (3) 中的 ξ_i, η_j 对 X 的依赖性改为对 $X \cup \partial U$ 或 U 的积分的依赖, 则得到接触对称、Lie-Backlund 对称、非局部对称等 [1,2] 的判别准则. 所以这些广义对称的判别统一为式 (3). 但为了叙述方便, 同时不失一般性, 本文中我们考虑 ξ_i 和 η_j 仅依赖于 X 的情形, 更广泛类情形的叙述完全类似.

2.2.2 非古典对称

Bluman 和 Cole[6] 为对称约化 PDEs 而提出的非古典对称实际上是扩充方程 $\Delta=0,\mathcal{S}=0$ 的古典对称, 其中附加于原 PDEs 的是不变曲面条件

$$\mathcal{S}=\left\{s_j=\sum_{i=1}^{p}\xi_i u_j^{e_i}-\eta_j, j=1,2,\ldots,q\right\}. \tag{4}$$

所以这个非古典对称下 PDEs (1) 的不变性, 同样可以用公式 (3) 表示, 只是其中的 $\mathcal{R}$ 用 $\mathcal{R}=\Delta\cup\mathcal{S}$ 替换即可. 与古典对称相比, 非古典情形所得到的 DTEs 是强非线性的. 此非线性将使确定 PDEs 非古典对称变得更难.

2.2.3 对称分类

对一个含参数 PDEs, 对每一种对称我们可以提出该方程拥有此对称的对称分类问题. 显然在对称分类问题中, 根据方程拥有何种对称的要求去产生 DTEs, 并仍用公式 (3), 只是其中的 $\mathcal{R}$ 相应的变化. 因为所考虑方程依赖参数, 所以得到的 DTEs 也含有参数. 而含参数 PDEs 的求解与无参数 PDEs 的求解有很大的不同. 成功获得对称分类的关键是确定对应含参数 DTEs 的协调 (可积) 条件, 即分类方程.

综上, 无论对称计算还是分类、古典对称还是广义对称, 其 DTEs 的产生都统一于公式 (3).

2.3 问题的描述

确定 PDEs (1) 的对称的 Lie 算法细节主要由以下四个步骤组成: 第一步, 计算延拓 $\mathrm{Pr}\mathcal{X}(\mathcal{R})$; 第二步, 计算无穷小方程 (3), 它对应的是关于 ∂U 的微分多项式组; 第三步, 取上步得到的微分多项式组 (3) 的系数, 并令其为零, 得到 DTEs; 第四步, 精确求解上步中得到的 DTEs, 从而确定 PDEs (1) 的对称的InfV $\mathcal{X}$.

在这四个步骤中第一步的计算由 $\mathrm{Pr}\mathcal{X}$ 的延拓公式构造性的完成 [1]. 当第二步完成之后, 第三步的任务是常规的, 可以机械地完成. 然而在第二步和第四步的完成过程中存在一些理论和算法问题, 至今未得到理论上很好的回答.

问题 1 在第二步中, 如何从 $\mathrm{Pr}\mathcal{X}(\mathcal{R})$ 排除 '解集' $\mathrm{Zero}(\mathcal{R})$.

文献 [33] 在研究 Burgers 方程非古典对称时提出, 如果对一些方程的对称计算中直接使用 Lie 算法, 产生 DTEs 的计算中可能出现无穷循环的情形. 对此特殊方程作者 [33] 提出了用 Gröbner 基方法消除这种可能性的思路. 然而, 到目前为止对各类对称和更一般形式的 PDEs, 这样的关键问题还没有给出普遍理论和算法意义上的回答, 甚至古典对称也还没有明确的答案 [17].

例 1 考虑弹性力学中的应力方程组 $\mathcal{R}=\{H_1,H_2,H_3\}=0$, 其中

$$H_1=u_x+w_y=0,\quad H_2=v_y+w_x=0,\quad H_3=u_{xx}+u_{yy}+v_{xx}+v_{yy}=0. \tag{5}$$

在应用 Lie 算法求该方程组的对称时, 必须从 (5) 中先选择一组 $U=(u,v,w)$ 关于 $\boldsymbol{x}=(x,y)$ 的导数项 (称为替换变量), 从 $\mathrm{Pr}\mathcal{X}(\mathcal{R})$ 中消去这些选定的导数项和其高阶导数的方法排除 (5) 的解集 $\mathrm{Zero}(\mathcal{R})$, 从而得到无穷小方程 (3). 那么, 如果我们选择 $\{u_x,v_y,u_{xx}\}$ 或 $\{v_y,w_y,u_{yy}\}$ 或其它呢? 所有的选择都适合我们计算对称的目的吗? 对力学和物理中出现的大型方程组这种问题更明显. 对此, 我们还没有一般理论去引导.

例 2 对方程 $u_{xx}^{\alpha}+uu_{xx}^{\beta}+u_x=0,\ \alpha\beta\neq 0,\ \alpha,\beta\in\mathbb{R}$ (在物理学中这样的 ‘分数次’PDEs 经常出现), 我们无法得到显式的替换变量, 即该方程不满足实现 Lie 算法的条件. 从而不能直接应用 Lie 算法得到无穷小方程 (3) 和对应的 DTEs, 导致对称计算失败.

以上就是人们为什么应用 Lie 算法时要考虑 PDEs 具有 ‘可解’ (容易确定替换变量) 和 ‘三角化’ (可避免无穷循环) 结构的主要原因. 本文将证明对更一般形式的 PDEs: $\mathcal{R}=0$, 用吴方法通过 $\mathrm{Pr}\mathcal{X}(\mathcal{R})$ 对微分多项式系统 $\mathcal{R}$ 的微分代数约化, 获得该 PDEs 对称的 DTEs 总是可能的 (无需具有 ‘可解和三角化’ 结构. 见例 6 和 7).

问题 2 协调性成立吗?

超定方程组 DTEs 的协调性 (可积条件) (尤其含参数 PDEs) 的确定是该方程组可解的必要条件. 如何发现这些可解条件? 我们知道对一个微分多项式系统, 用微分特征列集算法可推知或者该多项式系统 (在一定非退化条件下) 是协调的 (解存在) 或者原系统不协调 (解不存在). 所以我们应用微分特征列集算法（吴方法）于对称确定和分类中的协调性问题的判断.

问题 3 如何求解 DTEs?

一般来讲, 直接精确求解 DTEs 是非常困难的. 尽管许多研究者付出了很多努力, 但对此仍然没有一般的算法可用 [13,17]. 所以为精确确定对称, 普遍采用的策略是先把 DTEs 转化为较简单形式, 然后求解. 本文中, 我们提出一种方法把 DTEs 转化为一系列微分特征列集的形式, 达到利用微分特征列集的三角化结构求解原方程的目的. 即, 用吴方法把 DTEs 的解集转化为一系列特征列集的零点集的并, 然后求解对应良序化方程组的解. 这将对求解 DTEs 提供很多方便.

问题 4 能否系统而构造化地给出含参数 PDEs 的对称分类?

根据 Lie 群理论, 对称分类问题等价于求解含参数 DTEs. 对此, 我们首先确定该超定组的可解 (可积) 条件. 即, 我们确定只依赖于参数的所谓分类方程 (classifying equations). 我们将证明分类方程来自于 DTEs 对应微分多项式组的微分特征列集的退化条件. 所以我们基于吴方法中零点分解定理能够给出对含参数 PDEs 进行完全对称分类的机械化算法.

以上提到的都是应用 Lie 算法尚未得到很好回答的问题, 是对称方法得到广泛应用的障碍. 这些问题的澄清在 PDEs 对称理论和应用中非常重要.

2.4 微分形式吴方法的基本结果

以下吴方法的基本结论成为本文的理论和算法基础.

定理 2[31] 对给定的微分多项式系统 DPS, 存在算法在有限步内能够确定其一个特征列集 DCS, 并以下良序原理

$$\mathrm{Zero}(DCS/IS)\subset\mathrm{Zero}(DPS)\subset\mathrm{Zero}(DCS),\quad \mathrm{Zero}(DPS)=\mathrm{Zero}(DCS/IS)\cup\mathrm{Zero}(DPS,IS) \tag{6}$$

成立, 其中 IS 是这些特征列集的初式和隔离子的乘积.

定理中的计算微分特征列集的算法称为微分特征列集算法 (也称为微分形式吴消元算法). 该算法由下面的框架给出.

算法 A 计算一个微分多项式系统 DPS 的特征列集吴方法.

$$\begin{array}{ccccccccc}
DPS= & DPS_0 & \subset & DPS_1 & \subset & \cdots & \subset & DPS_s & \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
 & DBS_0 & \succ & DBS_1 & \succ & \cdots & \succ & DBS_s & =DCS \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
 & RIS_0\uparrow & & RIS_1\uparrow & & \cdots\uparrow & & RIS_s=\emptyset, &
\end{array}$$

其中

$$\begin{cases} DBS_i\text{是}DPS_i\text{的一个基列, 且}DBS_{i-1} \succ DBS_i, \\ R_i = \mathrm{Prem}((DPS_i \backslash DBS_i)/DBS_i) \backslash \{0\}, \\ IT_i = \mathrm{Prem}(I/DBS_i) \backslash \{0\}, I\text{是}DBS_i\text{的任意可积条件}, \\ RIS_i = IT_i \cup R_i, \\ DBS_{-1} = RIS_{-1} = \emptyset, \\ DPS_i = DPS_0 \cup DBS_{i-1} \cup RIS_{i-1},\ i = 0, 1, 2, \ldots, s. \end{cases}$$

这里 s 代表计算循环步骤数, 向下的箭头表示本轮循环中继续计算, 向上的箭头表示计算进入下一个循环.

对上面定理中给出的良序原理 (6) 的非特征列集部分重复使用特征列集算法，我们得到

定理 3[31] 对给定的微分多项式系统 DPS 存在算法在有限步内使以下零点分解

$$\mathrm{Zero}(DPS) = \bigcup_k \mathrm{Zero}(DCS_k/IS_k), \quad \mathrm{Zero}(DPS) = \bigcup_j \mathrm{Zero}(IDCS_j/IIS_j) \tag{7}$$

成立, 其中 DCS_k 和 $IDCS_j$ 是 DPS 的特征列集, 且 $IDCS_j$ 是不可约化的, IS_k 和 IIS_j 是这些特征列集的初式和隔离子的乘积.

在上面的算法中微分多项式序扮演着重要的角色. 此类序的一个自然的选择是微分总导数为优先的导数项的微分分级词典序 (diff-graded lex rank)[31, 34–36]. 在本文算例中都采用了该序.

下面我们给出一些算例来说明定理 2 和 3 及算法 A 在求解超定系统中的有效性, 并展示特征列集的三角化良序结构, 以便更好地理解吴方法.

例 3 考虑微分多项式系统

$$DPS = \left\{ \begin{array}{l} \xi_v - \tau_u, \eta_u - \phi_v + \xi_x - \tau_t, \eta_v + u(\eta_t - \phi_x) + \tau_x, u^2\xi_u - \tau_v, u^2\phi_u - u\tau_u - \eta_v, \\ u\xi_v + u^2\xi_t - \tau_x, u(\eta_u - \phi_v - \xi_x + \tau_t) + 2(\tau_v - \eta), u(\phi_v - \tau_t) - (\tau_v + \eta_x - \eta) + u^2\phi_t \end{array} \right\}.$$

设 $\boldsymbol{x} = (x, t, u)$, $U = (\xi, \phi, \eta, \tau)$, 且 $\mathcal{A}_X$ 是整函数微分域, 则 $DPS \subset \mathcal{A}_X[\partial U]$. 在基本序 $x \prec t \prec u \prec \xi \prec \phi \prec \eta \prec \tau$ 下, 应用算法 A, 我们得到 DPS 的如下特征列集:

$$DCS = \left\{ \begin{array}{lll} \xi_{tv},\ \ \xi_{tt},\ \ \xi_{xt}, & \phi_v,\ \ \phi_t,\ \ \phi_u + 2\xi_t, & \\ \xi_t + u\xi_{tu}, & \phi_x + 2u\xi_t, & \tau_x - u\xi_v - u^2\xi_t, \\ \xi_v + u\xi_{uv} + u\xi_t - \xi_{xv}, & & \tau_t + u\xi_u - \xi_x - u^{-1}\eta, \\ \xi_{vv} + \xi_x - \xi_{xx}, & \eta_x + u\xi_x,\ \ \eta_t + u\xi_t, & \tau_u - \xi_v,\ \ \tau_v - u^2\xi_u, \\ \xi_x + u^2\xi_{uu} + 2u\xi_u - \xi_{xx}, & u\eta_u - \phi + u^2\xi_u, & \\ \xi_x + u\xi_{xu} - \xi_{xx}, & \eta_v + u\xi_v + 2u^2\xi_t, & \end{array} \right\}$$

和初式 $IS = u$. 由该特征列集的四个组成部分可以看出微分特征列集 DCS 的良序性 (三角化) 结构. 第一部分由最前面的 8 个仅含有 ξ 的微分多项式组成; 第二部分由接下来的 4 个仅含有 ξ 和 ϕ 的微分多项式组成; 第三部分由再接下来的 4 个含有 ξ, ϕ 和 η 的多项式组成; 第四部分由最后的 4 个方程组成, 它们含有 ξ, ϕ, η 和 τ. 由于 $IS \not\equiv 0$, 根据定理 2 的良序原理, 显然有 $\mathrm{Zero}(DPS) = \mathrm{Zero}(DCS)$.

这说明求解 $DPS=0$ 和 $DCS=0$ 的等价性. 由该等价性和特征列集 DCS 的良序结构, 通过求解 $\mathrm{Zero}(DCS)$ 容易确定 $\mathrm{Zero}(DPS)$. 函数 ξ 由 DCS 的第一部分确定; 函数 ϕ,η 和 τ 由其接下来的部分和由上部分得到的结果依次确定.

吴方法中微分形式机械化定理证明原理由下面的定理给出 [31, 35].

定理 4[31] (机械化定理证明原理) 设 HYP 和 $CONC$ 是微分多项式集, 分别是定理的假设条件和结论. 如果 DCS 是 HYP 的微分特征列集, 并且 $\mathrm{Prem}(CONC/DCS)=0$, 则该定理在非退化条件 $IS\neq 0$ 下成立, 其中 IS 是 DCS 的初式和隔离子的乘积.

我们将用到下面的一个引理.

引理 1 设 $Q\subset\mathcal{A}_X[\partial U]$ 是一个不可约化的微分升列, $F\in\mathcal{A}_X[\partial U]$ 是一个微分多项式, 且对 Q 已经约化, 则 $F|_{\mathrm{Zero}(Q)}=0\Rightarrow F\equiv 0$.

证明 设 $SAT(Q)=\{P|P\in\mathcal{A}_X[\partial U],\ \mathrm{Prem}(P/Q)=0\}$. 这是一个素理想, 且容易看出有 $\mathrm{Zero}(SAT(Q))\subset\mathrm{Zero}(Q)$, 所以 $F|_{\mathrm{Zero}(SAT(Q))}=0$. 从而由 Hilbert 零点定理 [31,32] 可知 $F\in SAT(Q)$. 又因为 F 关于 Q 已经约化, 我们有 $F=\mathrm{Prem}(F/Q)=0$.

3 确定偏微分方程 (组) 对称的微分特征列集算法理论

3.1 新对称准则

本节把传统的对称 Lie 准则 (3) 改造为微分代数语言形式. 这些新的准则将是本文提出的算法理论的基础.

3.1.1 一个通用准则

下面的定理是本文的主要内容之一.

定理 5 令 (3) 中的 $\mathcal{R}$ 作为微分多项式系统是不可约化的微分升列, $\mathcal{X}$ 以 (2) 的形式给定, 则

$$\text{(a)}\ \ \mathrm{Pr}\mathcal{X}(\mathcal{R})|_{\mathrm{Zero}(\mathcal{R})}=0\Longrightarrow\text{(b)}\ \ \mathrm{Prem}(\mathrm{Pr}\mathcal{X}(\mathcal{R})/\mathcal{R})=0. \tag{8}$$

此外, 如果 $\mathcal{R}$ 的初式和隔离子的乘积 $IS\neq 0$, 则结果 (a) 与 (b) 相互等价.

证明 根据吴方法中约化公式, 有

$$IS\cdot\mathrm{Pr}\mathcal{X}(\mathcal{R})=\sum_{dqs\in\mathcal{R}}Q_\alpha\cdot D^\alpha dqs+\mathrm{Prem}(\mathrm{Pr}\mathcal{X}(\mathcal{R})/\mathcal{R}). \tag{9}$$

从而, 当 (a) 成立时有 $\mathrm{Prem}(\mathrm{Pr}\mathcal{X}(\mathcal{R})/\mathcal{R})\big|_{\mathrm{Zero}(\mathcal{R})}=0$. 因为, $\mathrm{Prem}(\mathrm{Pr}\mathcal{X}(\mathcal{R})/\mathcal{R})$ 关于不可约化微分升列 $\mathcal{R}$ 已约化. 因此由引理 1, 得到 (b). 当 $IS\neq 0$ 时, 从 (9), 易看到 (b)$\Longrightarrow$(a).

我们对定理 5 给出以下注解.

注 a 结果 (a) 是 PDEs: $\mathcal{R}=0$ 的对称的 Lie 准则; 结果 (b) 是这个准则的微分代数形式, 是 $\mathcal{X}$ 为该 PDEs 对称的InfV 的必要条件; 当 $IS\neq 0$ (在多数应用问题中, 这个条件是平凡的) 时, Lie 算法中的无穷小方程 (3) 已被 (8) 的约化恒等式 (b) 所代替, 而后者是完全构造化的. 令该恒等式中独立单项式的系数为零, 我们就得到该 PDEs 对称的 DTEs. 在这个方法中, 引用了吴方法里的伪约化公式, 所以不必象 Lie 算法中要求的那样要求 PDEs 具有可解形式. 同时我们知道, 对具有可解结构的 PDEs: $\mathcal{R}=0$ 用 Lie 方法确定对称时, 应该在给定变量序下取 $\mathcal{R}$ 的首项为替换变量 (问题 1).

例 4 对方程组 (5), 我们考虑替换变量的选择问题.

在基本序 $x \prec y \prec u \prec v \prec w$ 下, 方程 (5) 已经是不可约化微分升列形式. 因此, 为了从 (3) 中的 $\mathrm{Pr}\mathcal{X}(\mathcal{R})$ 排除零点集 $\mathrm{Zero}(\mathcal{R})$, 我们应该选首项 $\{w_y, w_x, v_{yy}\}$ 作为替换变量. 当然这个替换变量的选取不是唯一的, 依赖于代数序的选择. 如果我们改变基本序为 $y \prec x \prec v \prec u \prec w$, 则替换变量为 $\{w_y, w_x, u_{yy}\}$; 当基本序为 $y \prec x \prec w \prec v \prec u$ 时, 方程 (5) 不再是微分升列形式. 因此, 通过算法 A, 我们把它改造为与原方程等价的如下不可约化微分升列形式:

$$H_1' = u_x + w_y = 0, \quad H_2' = v_y + w_x = 0, \quad H_3' = u_{yy} + v_{xx} - 2w_{xy} = 0.$$

由对称定义, 我们知道这两个等价的 PDEs $H_1 = H_2 = H_3 = 0$ 与 $H_1' = H_2' = H_3' = 0$ 拥有相同的对称. 因此, 替换变换量是 $\mathcal{R}' = \{H_1', H_2', H_3'\}$ 的首项 $\{u_x, v_y, u_{yy}\}$.

注 b 实际上, 在上面的定理中我们把 Lie 算法中的 '替换变量' 和 '代入操作' 用吴方法中的 '首项' 和 '约化' 代替, 从而有效克服 Lie 算法中要求的 '可解' 和 '代入' 引起的缺陷.

例 5 我们研究 PDEs

$$H_1 = u_x^2 + u_x u_y + u_y^2 - u = 0 \tag{10}$$

的对称计算问题. 易观察到, 因为替换变量 u_x 或 u_y 不能表示成多项式形式, 所以该方程不满足 Lie 算法中要求的条件. 但是, 对我们的算法而言这不是问题 (见例 6).

注 c 注意到, 在微分代数形式对称准则 (b) 中, 不可约化微分升列概念起着重要的角色. 因此, 对非微分升列形式的 PDEs: $\mathcal{R} = 0$, 利用定理 2 和 3 及其算法 A, 我们首先把该 PDEs 改造为不可约化的微分升列形式, 即作如下分解 $\mathrm{Zero}(\mathcal{R}) = \mathrm{Zero}(\mathcal{R}_i'/IS_i)$, 其中 $\mathcal{R}_i'$ 是 $\mathcal{R}$ 的不可约化的微分升列. 然后在 $\mathcal{R}_i'$ 上用定理 5, 确定其对称, 进而逐次确定 $\mathcal{R} = 0$ 的所有对称.

3.1.2 定理证明原理形式的对称准则

利用机械化定理证明原理 (定理 4), 我们也可以给出产生 PDEs 对称的 DTEs 和判定一个给定的算子 (2) 是不是 PDEs 对称的InfV的算法.

对 PDEs $\mathcal{R} = 0$ 与由 (2) 给定的算子 (向量) $\mathcal{X}$, 令 $HYP = \mathcal{R}$ 和 $CONC = \mathrm{Pr}\mathcal{X}(\mathcal{R})$ 分别作为定理 4 中假设条件和结论多项式集. 我们有

定理 6 设 DCS 为微分多项式系统 HYP 的微分特征列集, 如果 $\mathrm{Prem}(CONC/DCS) = 0$, 则 DCS 的初式和隔离子的乘积 $IS \neq 0$ 时, $\mathcal{X}$ 是 PDEs $\mathcal{R} = 0$ 的古典对称的 InfV.

证明 由 $\mathrm{Prem}(CONC/DCS) = 0$ 及吴方法的约化法, 存在微分多项式 Q_α, 使 $IS \cdot CONC = \sum_{dp_\alpha \in DCS} Q_\alpha D^\alpha dp_\alpha$ 成立. 由此推知, $\mathrm{Zero}(HYP/IS) = \mathrm{Zero}(DCS/IS) \subset \mathrm{Zero}(CONC)$. 这表明当 $IS \neq 0$ 时, $\mathrm{Pr}\mathcal{X}(\mathcal{R})|_{\mathrm{Zero}(\mathcal{R})} = 0$. 证毕.

该定理提供了利用现有机械化定理证明理论与算法确定和判定 PDEs 各种对称的机械化算法.

3.1.3 非古典对称准则

上小节给出的两个对称准则是具有普适性的. 对非古典对称, 我们通过适当的选择约化优先权, 进一步简化确定 PDEs 非古典对称的计算.

对具有 InfV (2) 的 PDEs (1) 的非古典对称, 不失一般性 [1, 2], 设 $\xi_{i_p} = 1$. 在基本序 $x_1 \prec x_2 \prec \cdots \prec x_p \prec u_1 \prec \cdots \prec u_q$ 下 $U^{e_p} = \{u_k^{e_p}, k = 1, 2, \ldots, q\}$ 为不变曲面条件 $\mathcal{S}$ (见 (4)) 的首项. 这里用到记号 $e_i = \{0, 0, \ldots, 0, 1$ (第i个坐标$), 0, \ldots, 0\}$.

因为 $\mathcal{S}$ 关于其首项是线性的, 因此 $\mathcal{S}$ 是不可约化的微分升列. 从而, 我们有下面的定理.

定理 7 令 $\mathcal{R} = \Delta \cup \mathcal{S}$, $\mathcal{R}' = \mathrm{Prem}(\Delta/\mathcal{S})$. 如果 $\mathcal{R}'$ 是不可约化的微分升列, 且对上述选定的微分多项式序 $\prec$ 下有 $\mathcal{S} \prec \mathcal{R}'$, 则

$$\text{(a)}\ \ \mathrm{Pr}\mathcal{X}(\Delta)|_{\mathrm{Zero}(\mathcal{R})} = 0 \Longrightarrow \text{(b)}\ \ \mathrm{Prem}(\mathrm{Pr}\mathcal{X}(\mathcal{R}')/\mathcal{R}') = 0. \tag{11}$$

另外, 如果 $\mathcal{R}'$ 的初式和隔离子的乘积 $IS \neq 0$, 则 (a) 与 (b) 相互等价.

证明 由于 $\mathcal{R}'$ 关于 $\mathcal{S}$ 是已经约化的, 所以在 $\mathcal{R}'$ 中不含 $\mathcal{S}$ 的首项及其导数项, 即在 $\mathcal{R}'$ 中不存在像 u_k^β 这样的项, 其中 β 的第 p 分量不为零. 因此, 由公式 [1, 2] $\mathrm{Pr}\mathcal{X}(\Re') = \sum_i \xi_i \frac{\partial \Re'}{\partial x_i} + \sum_{k,\beta} \phi_k^\beta \frac{\partial \Re'}{\partial u_k^\beta}$, $\phi_k^\beta = D^\beta(\eta_k - u_k^{e_p} - \sum_{i\neq p} \xi_i u_k^{e_i}) + u_k^{\beta+e_p} + \sum_{i\neq p} \xi_i u_k^{\beta+e_i}$ (D^α 表示对自变量 X 的全导数), 获知在 $\mathrm{Pr}\mathcal{X}(\mathcal{R}')$ 中 U 对 x_p 的导数项都不出现. 由此, $\mathcal{S}$ 的首项与其导数也不在 $\mathrm{Pr}\mathcal{X}(\mathcal{R}')$ 中出现, 即延拓式 $\mathrm{Pr}\mathcal{X}(\mathcal{R}')$ 已经对 $\mathcal{S}$ 约化. 注意到 $\mathcal{S}$ 的初式为 1, 所以由吴方法中的约化公式, 存在微分多项式 $Q_{\alpha,j}$, 使得

$$\Delta = \sum_{\alpha,j} Q_{\alpha,j} D^\alpha s_j + \mathcal{R}'. \tag{12}$$

此式蕴涵着

$$\mathrm{Zero}(\mathcal{R}) = \mathrm{Zero}(\mathcal{R}' \cup \mathcal{S}). \tag{13}$$

令 $\mathcal{X}_C$ 是 $\mathcal{X}$ 的特征形式 [1, 2]. 在 (12) 的两边用 $\mathrm{Pr}\mathcal{X} = \mathrm{Pr}\mathcal{X}_C + \sum_{i=1}^p \xi_i D^{e_i}$ 作用, 并利用 $\mathrm{Pr}\mathcal{X}_C \cdot D^\gamma = D^\gamma \cdot \mathrm{Pr}\mathcal{X}_C$ 和 $\mathcal{S}$ 在 $\mathcal{X}$ 下的不变性, 存在微分多项式 $G_{\gamma,j}$ 使约化

$$\mathrm{Pr}\mathcal{X}(\Delta) = \sum_{\gamma,j} G_{\gamma,j} D^\gamma s_j + \mathrm{Pr}\mathcal{X}(\mathcal{R}') \tag{14}$$

成立. 如果 $\mathrm{Pr}\mathcal{X}(\Delta)\big|_{\mathrm{Zero}(\mathcal{R})} = 0$, 则从公式 (14) 得到 $\mathrm{Pr}\mathcal{X}(\mathcal{R}')\big|_{\mathrm{Zero}(\mathcal{R})} = 0$. 由 (13) 知, 该等式等价于

$$\mathrm{Pr}\mathcal{X}(\mathcal{R}')\big|_{\mathrm{Zero}(\mathcal{R}' \cup \mathcal{S})} = 0. \tag{15}$$

显然在定理给定的条件下, $\mathcal{S} \cup \mathcal{R}'$ 是一个不可约化微分升列. 根据吴方法的约化过程 (算法 A) 及 $\mathcal{S} \prec \mathcal{R}'$, $\mathrm{Pr}\mathcal{X}(\mathcal{R}')$ 关于 $\mathcal{S} \cup \mathcal{R}'$ 的约化是通过下面的余式

$$\mathrm{Prem}(\mathrm{Prem}(\mathrm{Pr}\mathcal{X}(\mathcal{R}')/\mathcal{R}')/\mathcal{S}) \tag{16}$$

计算得到. 在式 (16) 的表达式中, 导数运算 ∂_{x_p} 不参与. 因为 $\mathrm{Pr}\mathcal{X}(\mathcal{R}')$ 与 $\mathcal{R}'$ 不依赖于项 $u_j^{e_p}$ ($j = 1, 2, \ldots, q$) 及其导数. 这就说明 $\mathcal{S}$ 的首项在 $\mathrm{Prem}(\mathrm{Pr}\mathcal{X}(\mathcal{R}')/\mathcal{R}')$ 中也不出现. 因此, (16) 中外面的约化没起任何作用. 从而, 表达式 (15) 表明 $\mathrm{Prem}(\mathrm{Pr}\mathcal{X}(\mathcal{R}')/\mathcal{R}')|_{\mathrm{Zero}(\mathcal{R}' \cup \mathcal{S})} = 0$. 因此由引理 1 可推知 (a) $\Longrightarrow$ (b) 成立. 反之, 如果 $\mathrm{Prem}(\mathrm{Pr}\mathcal{X}(\mathcal{R}')/\mathcal{R}') = 0$, 则由吴方法的约化公式得，当 $IS \neq 0$ 时 $\mathrm{Pr}\mathcal{X}(\mathcal{R}')|_{\mathcal{R}'=0} = 0$. 由此, 等式 (13) 与 (14) 表示 $\mathrm{Pr}\mathcal{X}(\Delta)|_{\mathrm{Zero}(\mathcal{R})} = 0$. 这是定理的第二个结论. 证毕.

注 a 定理 7 表示方程 $\Delta = 0$ 的非古典对称是方程 $\mathcal{R}' = 0$ 的古典对称. 而且非古典对称的 DTEs 的计算问题转化为吴方法框架内微分多项式代数约化问题, 从而简化了计算过程.

注 b 在大多数应用中, 条件 $\mathcal{S} \prec \mathcal{R}'$ 是平凡的, 因为二阶或高阶 PDEs 总满足这个条件.

注 c 对非微分升列形式的 PDEs: $\mathcal{R}' = 0$, 首先通过算法 A, 把 $\mathcal{R}'$ 转化为微分升列形式, 然后在这个改造的方程上利用该定理.

3.2 算法

利用定理 2 至 7, 我们将得到基于吴方法的确定 PDEs 对称的机械化算法. 该算法由算法 A 与下面的算法 B 和 C 组成.

3.2.1 产生 DTEs 的算法

算法 B 确定 PDEs $\mathcal{R}=0$ 的古典对称的 DTEs.

输入 微分多项式系统 $\mathcal{R}$ 和微分单项式序.

输出 $\mathcal{R}=0$ 的对称的一些列 DTEs: $DTEs_i$.

开始

步骤 1 计算 $\mathcal{R}$ 的不可约化微分升列 (微分特征列集) $IDCS_j$, 且得到 IS_j 使得 $\mathrm{Zero}(\mathcal{R})=\bigcup_j \mathrm{Zero}(IDCS_j/IS_j)$(算法 A);

步骤 2 对 j 循环: 对 $IDCS_j$ 应用定理 5, 并令

$DTEs_j=\{$微分多项式$\mathrm{Prem}(\mathrm{Pr}\mathcal{X}(IDCS_j)/IDCS_j)$关于$\partial U$的各项系数$\}$;

返回 $DTEs_j$;

结束对 j 的循环.

结束

算法 B′ 确定 PDEs: $\mathcal{R}=0$ 的非古典对称的 DTEs.

输入 微分多项式系统 $\mathcal{R}$ 和微分单项式序.

输出 $\mathcal{R}=0$ 的非古典对称的 DTEs 系列: $DTEs_i$.

开始

步骤 1 约化 $\mathcal{R}'=\mathrm{Prem}(\mathcal{R}/\mathcal{S})$(算法 A);

步骤 2 转化 $\mathcal{R}'$ 为不可约形式微分升列 $\mathcal{R}''$ (算法 A);

步骤 3 返回 $\mathcal{R}''$ 的 DTEs: $DTEs_i$ (算法 B).

结束

3.2.2 DTEs 的约化

下面, 我们根据定理 2 和 3 中零点分解结论 (6) 与 (7), 给出把 DTEs 改造为良序组的算法.

令 $U=\{\xi_j,\phi_k|1\leqslant j\leqslant p,1\leqslant k\leqslant q\}$, 则一个 PDEs 对称的 DTEs 对应的微分多项式系统 $DPS\subset\mathcal{A}_X[\partial U]$.

算法 C 约化 DTEs $DPS=0$.

输入 DPS 与给定的微分单项式序.

输出 DPS 的一系列的微分特征列集 DCS_i 或不可约化的微分特征列集 $IDCS_j$.

开始

步骤 1 计算分解式 (算法 A) $\mathrm{Zero}(DPS)=\bigcup_i \mathrm{Zero}(DCS_i/IS_i)=\bigcup_j \mathrm{Zero}(IDCS_j/IIS_j)$;

步骤 2 返回 DCS_i 或 $IDCS_j$.

结束

接下来精确求解方程组 $DCS_i=0$ 或 $IDCS_j=0$ (良序方程), 我们就得到 $\mathrm{Zero}(DPS)$, 进而确定 InfV (问题 3).

例 6 我们来确定例 5 中 PDEs 的古典对称的 InfV $\mathcal{X}=\xi(x,y,u)\partial_x+\tau(x,y,u)\partial_y+\eta(x,y,u)\partial_u$.

在基本序 $x \prec y \prec u$ 下, H_1 的首项为 u_y. 由算法 B, 我们得到 (8) (定理 5) 中的约化式 (b):

$$\mathrm{Prem}(\mathrm{Pr}\mathcal{X}(H_1)/H_1) = 2h_1u_x^3 + 2h_1u_x^2u_y + h_2u_xu_y + h_3u_x^2 + h_4u_y + h_5u_x + h_6, \tag{17}$$

其中

$$\begin{aligned}
&h_1 = \tau_u, \quad h_2 = \tau_y - \tau_x - 2\xi_y - \xi_x, \quad h_3 = 2\tau_y + \tau_x - \xi_y - 2\xi_x,\\
&h_4 = 2\eta_y + \eta_x - 2u\tau_u, \quad h_5 = \eta_u + 2\eta_x - 2u\xi_u - 2u\tau_u, \quad h_6 = 2u\eta_u - \eta - 2u\tau_y - u\tau_x.
\end{aligned}$$

因此, 尽管延拓式 (17) 中包含着首项 u_y (在 Lie 算法中这是不允许的), 但由定理 5 知方程 (10) 的古典对称的 DTEs 是 (17) 中独立单项式的系数, 即 $DPS = \{h_i, i = 1, 2, \dots, 6\} = 0$. 显然, 这里的计算是较简单的. 而且, 由算法 C, 在序 $x \prec y \prec u \prec \xi \prec \tau \prec \eta$ 下, 得到对应的微分多项式系统 DPS 的微分特征列集

$$DCS = \left\{\begin{array}{l}
\xi_{xu},\ \xi_{yu},\ \xi_{xy},\ 2\xi_u + 4u\xi_{uu} - 3\xi_{xx},\ \xi_{xx} + \xi_{yy},\ \xi_{xxx};\\
\tau_u,\ \tau_y - \xi_x - \xi_y,\ \tau_x + \xi_y;\ 3\eta_x - 4u\xi_u,\ 3\eta_y + 2u\xi_u,\ \eta - 2u\eta_u + u\xi_y + 2u\xi_x
\end{array}\right\}$$

和零点分解式 $\mathrm{Zero}(DPS) = \mathrm{Zero}(DCS)$. 易解得

$$\mathrm{Zero}(DCS) = \left\{\begin{array}{l}
\xi = c_1(x^2 - y^2 + 3u) + c_2x + c_3y + 2c_4\sqrt{u} + c_5,\\
\tau = c_1\left(2xy - y^2\right) + c_2y + c_3(y - x) + c_6,\\
\eta = 2c_1(2x - y)u + 2c_2u + c_3u + \frac{2}{3}c_4(2x - y)\sqrt{u} + c_7\sqrt{u}
\end{array}\right\}.$$

这表明方程 (10) 允许 7 参数有限维 Lie 群.

例 7 为了说明算法对非线性问题的适用性, 我们确定 Burgers 方程 $\Delta = u_t + uu_x + u_{xx} = 0$ 的非古典对称. 该问题在文献 [33] 中已考虑过. 这里利用我们的算法从不同的角度再给出它的解. 令

$$\mathcal{X} = \partial_t + \xi(x, t, u)\partial_x + \eta(x, t, u)\partial_u \tag{18}$$

是该方程的非古典对称的 InfV, 不变曲面条件为 $\mathcal{S} = \{u_t - \eta(x, t, u) + \xi(x, t, u)u_x\} = 0$. 在基本序 $x \prec t \prec u$ 下,u_t 是 $\mathcal{S}$ 的首项. 约化式 $\mathcal{R}' = \mathrm{Prem}(\Delta/\mathcal{S}) = \eta(x, t, u) - \xi(x, t, u)u_x + uu_x + u_{xx}$ 是 x 的二阶, 所以 $\mathcal{S} \prec \mathcal{R}'$ 成立. 由定理 5 知道, 为了确定 Burgers 方程的非古典对称我们只要确定 $\mathcal{R}' = 0$ 的古典对称即可.

利用算法 B', 得到 $\mathcal{R}' = 0$ 的对称的 DTEs 为 $DPS = 0$, 其中对应的微分多项式系统为

$$\begin{aligned}
DPS = \{&\xi_{uu}, \eta_t + u\eta_x + \eta_{xx} + 2\eta\xi_x, \eta_{uu} + 2u\xi_u - 2\xi\xi_u - 2\xi_{xu},\\
&2\eta_{xu} + 2\eta\xi_u - \xi_t + u\xi_x - 2\xi\xi_x - \xi_{xx} + \eta\}.
\end{aligned}$$

在基本序 $x \prec t \prec \xi \prec \phi$ 下, 用算法 C 于 DPS 上, 我们得到下面的零点分解式

$$\mathrm{Zero}(DPS) = \mathrm{Zero}(DCS_1) \cup \mathrm{Zero}(DCS_2) \cup \mathrm{Zero}(DCS_3).$$

DPS 的三个微分特征列集 DCS_1, DCS_2 以及 DCS_3 分别为

$$DCS_1 = \{\eta, u - \xi\},$$

$$
\begin{aligned}
DCS_2 = &\{\xi_u, \xi_{xx}, \eta_{xx}, \eta_u + \xi_x, \eta_t + u\eta_x + 2\eta\xi_x, \eta - \xi_t + u\xi_x - 2\xi\xi_x\},\\
DCS_3 = &\{\eta_{uu} - u + \xi, 1 + 2\xi_u, \eta_t + u\eta_x + \eta_{xx} + 2\eta\xi_x, 2\eta_{xu} - \xi_t + u\xi_x - 2\xi\xi_x - \xi_{xx},\\
&2\eta_{tu} + 2\eta_x + u\xi_t + 4\eta_u\xi_x - u^2\xi_x + 2u\xi\xi_x + 2\xi_x^2 + \xi_{xt} + 2\xi\xi_{xx} + \xi_{xxx}\}.
\end{aligned}
$$

分别求解这三个良序方程组 $DCS_1 = 0, DCS_2 = 0, DCS_3 = 0$, 我们确定无穷小生成函数 ξ 与 η 如下:

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{Zero}(DCS_1) = \{\xi = u, \eta = 0\},\\
&\mathrm{Zero}(DCS_2) = \left\{\xi = \frac{c_1tx + c_2x + c_4t + c_5}{c_1t^2 + 2c_2t + c_3}; \eta = \frac{c_1(x - tu) - c_2u + c_4}{c_1t^2 + 2c_2t + c_3}\right\},\\
&\mathrm{Zero}(DCS_3) = \left\{\xi = -\frac{1}{2}u + \alpha(x,t), \eta = \frac{1}{4}u^3 - \frac{1}{2}\alpha(x,t)u^2 - \beta(x,t)u + \gamma(x,t)\right\},
\end{aligned}
$$

其中 $\alpha(x,t), \beta(x,t), \gamma(x,t)$ 满足PDEs

$$
\left\{
\begin{aligned}
&\alpha_t(x,t) + \alpha_{xx}(x,t) + 2\beta_x(x,t) + 2\alpha(x,t)\alpha_x(x,t) = 0,\\
&\beta_t(x,t) + \beta_{xx}(x,t) - \gamma_x(x,t) + 2\beta(x,t)\alpha_x(x,t) = 0,\\
&\gamma_t(x,t) + \gamma_{xx}(x,t) + 2\gamma(x,t)\alpha_x(x,t) = 0.
\end{aligned}
\right. \tag{19}
$$

值得注意的是该 Burgers 方程的所有有限维古典对称对应零点集 $\mathrm{Zero}(DCS_2)$, 所有的非古典对称是由特征列集 DCS_1 和 DCS_3 产生. 这三部分分别对应文献 [33] 中给定的结果. 特别，只要求出 (19) 的一个解, 便得到 Burgers 方程的新的非古典对称. 例如, 如果在 (19) 中取 $\alpha(x,t) = xt^{-1}$, 我们得到 Burgers 方程的新非古典对称 $\beta(x,t) = (-x^2/4 + c_2t + c_3)t^{-2}$, $\gamma(x,t) = (c_1 + c_2x - x/2)t^{-2}$. 它属于 $\mathrm{Zero}(DCS_3)$, 其中 $c_i, i = 1,2,3,4$ 是任意常数.

3.3 对称分类

对一个含参数 θ 的 PDEs $\Delta(\theta) = 0$, 不失一般性, 我们考虑 $\theta \in \mathcal{A}_X$ 的情况 (否则在延拓空间上考虑即可). 令 $DPS(\theta) = 0$ 是该 PDEs 对称 G_θ 的 InfV $\mathcal{X}_\theta = \xi_\theta(X)\partial_{\mathbf{x}} + \eta_\theta(X)\partial_U$ 的 DTEs (下标表明对参数 θ 的依赖). 因此, 对称分类等价于确定零点集 $\mathrm{Zero}(DPS(\theta))$. 作为连续变换集, 对所有参数 θ 对称 G_θ 的交集称为对称 G_θ 的核 (kernel), 记为 G_0, 并且记其相应 InfV 为 $\mathcal{X}_0$. 由该定义, 对称核是被所有参数 θ 对应方程 $\Delta(\theta) = 0$ 所共拥有, 即对所有的参数 θ 有 $G_0 \subseteq G_\theta$.

下面, 我们给出确定完全对称分类特征列集算法过程.

首先, 确定对称核的 InfV $\mathcal{X}_0$. 把 $DPS(\theta) = 0$ 看作 θ 的恒等式 (θ 是任意的), 并且令 θ 与其导数的系数为零. 这样, 我们得到一个扩展的无参数 PDEs, 记作 $DCS_0 = 0$. 显然, 对任意的 θ 有

$$
\mathrm{Zero}(DCS_0) \subseteq \mathrm{Zero}(DPS(\theta)). \tag{20}
$$

因此, $DCS_0 = 0$ 对应于对称核 G_0. 通过算法 C, 求解该 PDEs 确定 $\mathcal{X}_0$.

然后, 确定参数 θ 的特定值对应的对称, 即对称核的扩展. 对此, 用算法 A 确定 $\mathrm{Zero}(DPS(\theta))$ 的按特征列集的零点集的分解. 与计算无参数微分多项式系统的特征列集不同, 这里我们必须考虑仅依赖于参数的所谓的 ‘被删因子 (removed factors)’. 即, 在运行算法 A 的过程中, 因为含有参数的原因我们很可能遇到可因式分解的微分多项式, 如 $dp = Q(\theta) \cdot P$, 其中 $P \in \mathcal{A}_X[\partial U]$, 而 $Q(\theta)$ 仅依赖于参数及其导数. 后者称为被删因子. 为了提高计算速度和确定分类方程, 我们删除这样的因子 $Q(\theta)$, 并且

重置 $dp=P$ 来简化计算中的微分多项式系统. 然后在简化的微分多项式系统上继续运行算法 A, 直至完成整个计算过程. 在这个过程中, 只要遇到这种情况都重复以上删除和简化过程, 并把所有被删的因子的乘积记作 $F(\theta)$. 因此, 根据定理 2 中的 (6), 首次运行算法 A 后, 我们得到有如下分解式

$$\mathrm{Zero}(DPS(\theta))=\mathrm{Zero}(DCS_1(\theta)/IS_1(\theta)*F(\theta))\cup\mathrm{Zero}(DPS(\theta),IS_1(\theta))\cup\mathrm{Zero}(DPS(\theta),F(\theta)).$$

去掉 $IS_1(\theta)*F(\theta)$ 中的非零因子后, 把上面的分解式可重写为

$$\mathrm{Zero}(DPS(\theta))=\mathrm{Zero}(DCS_1(\theta)/\Pi_j I_{1j}*\Pi_k I_k^1)\bigcup_j\mathrm{Zero}(DPS(\theta),I_{1j})\bigcup_k\mathrm{Zero}(DPS(\theta),I_k^1),\tag{21}$$

其中 $I_{1j}\in\mathcal{A}_X[\partial U]$, 而 I_k^1 只依赖参数 θ 及其导数. 如果 $DCS_1(\theta)$ 对应对称核, 则由于 (20) 我们从上面的分解式中删除第一部分. 在计算过程中只要发生这种情况, 我们始终重复上面简化过程.

分解式 (21) 中的非特征列集部分 (第二、三部分), 重新运行算法 A. 对第二部分, 要计算微分多项式系统 $DPS(\theta)\cup I_{1j}$ 的微分特征列集; 对第三部分, 在附加条件 I_k^1 (即满足方程 $I_k^1=0$) 下, 计算 $DPS(\theta)$ 的微分特整列集. 从而我们得到 (21) 的关于 DPS 的微分特征列集的进一步分解式, 同时得到分类方程 $E_k=I_k^1=0$. 在接下来的分解运算中对那些非微分特征列集部分不断的重复以上计算过程. 吴方法与算法 A 保证以上计算过程在有限步内结束. 由此, 我们最终得到如下形式的零点分解式:

$$\mathrm{Zero}(DPS(\theta))=\bigcup_i\mathrm{Zero}(DCS_i(\theta)/\Pi_j I_{ij})\bigcup_k\mathrm{Zero}(\{DCS_k'(\theta),E_k(\theta)\}/\Pi_l I_l^k),\tag{22}$$

其中 $DCS_i(\theta)$ 是 $DPS(\theta)$ 的微分特征列集, 且没有对应的分类方程; $DCS_k'(\theta)$ 也是 $DPS(\theta)$ 的微分特征列集, 其对应分类方程 $E_k(\theta)=0$; I_{ij} 与 I_l^k 是微分多项式, 产生于 $DCS_i(\theta)$ 与 $DCS_k'(\theta)$ 的初式和隔离子的乘积和删除因子 $F(\theta)$. 这样我们得到由 (22) 表示的 $DPS(\theta)=0$ 的解集按特征列集零点集展开的完全分解式和所有分类方程.

因为微分特征列集包含其自身零点集的所有信息, 分解式 (22) 的等号右端的每个分支都产生该 PDEs 的一类对称与对应参数. 至此, 所考虑 PDEs $\Delta(\theta)=0$ 的完全对称分类通过分解式 (22) 确定, 每一个分支对应一类.

为了得到每一类对称和参数的具体表达式, 我们要精确求解方程组 $DCS_i(\theta)=0$, $DCS_k'(\theta)=0$ 与 $E_k(\theta)=0$. 根据微分特征列集的良序结构, 以上 PDEs 是三角化良序的, 故其求解比直接求解 $DPS(\theta)=0$ 容易得多.

以上过程证明了如下定理.

定理 8 (分类定理) 对给定的一个含一个参数 θ 的 *PDEs*, 设 $DPS(\theta)=0$ 是其对称 G_θ 对应无穷小向量 $\mathcal{X}_\theta$ 的确定方程组, 则零点分解式(22) 给出该 *PDEs* 的完全对称分类.

综上推导定理的过程, 我们就得到下面的确定含参数 PDEs 的完全对称分类算法.

算法 D 含参数 θ 的 PDEs 的完全对称分类.

输入 含参数 θ 的 PDEs $\Delta(\theta)=0$.

输出 分类方程和对应对称分支.

开始

步骤 1 产生确定方程组 $DPS(\theta)=0$ (算法 B);

步骤 2 确定对称核对应 InfV $\mathcal{X}_0$(算法 C);

步骤 3 确定对称核的扩展. 为此对 $DPS(\theta)$ 构造零点分解式 (22)(算法 A 或 C); 返回每一个分支 $DCS_i(\theta)$, $DCS_k'(\theta)$ 和相应的分类方程 $E_k(\theta)=0$.

结束

最后求解 $E_k(\theta)=0$, $DCS'_k(\theta)=0$ 和 $DCS_i(\theta)=0$, 确定该含参数 PDEs 的各对称分类的具体表达式.

显然该算法提供了一个直接系统地获得含参数 PDEs 的完全对称分类的机械化算法.

例 8 下面给出含一个参数 $\theta=H(x)\not\equiv 0$ 的热传导方程

$$u_{xx}=H(x)u_{tt} \tag{23}$$

的一个完全势对称分类, 说明我们分类算法的有效性. 该方程的一个势系统为

$$\mathcal{R}=\{v_t-u_x, v_x-H(x)u_t\}=0. \tag{24}$$

假设方程 (24) 允许的古典对称的 InfV 为

$$\mathcal{X}=\xi(x,t,u,v)\frac{\partial}{\partial x}+\tau(x,t,u,v)\frac{\partial}{\partial t}+\eta(x,t,u,v)\frac{\partial}{\partial u}+\phi(x,t,u,v)\frac{\partial}{\partial v}. \tag{25}$$

我们的目标是要去确定 (25) 中的函数 ξ,τ,η,ϕ 和 H, 使方程 (24) 拥有古典对称, 并指出原方程 (23) 是否允许势对称, 即是否在函数 ξ,τ,η 中至少有一个依赖于势变量 v.

步骤 1 产生确定方程组. 如果我们选择基本序 $x\prec t\prec u\prec v$, 那么 $\mathcal{R}$ 已经是首项为 $\{v_x,v_t\}$ 的不可约微分升列形式. 运行算法 B, 我们得到确定方程组 $DPS=0$. 这里

$$DPS=\left\{\begin{array}{l}\xi_u-\tau_v, H(x)\xi_v-\tau_u, \phi_t-\eta_x,\\ \xi_x-\tau_t-\eta_u+\phi_v, H(x)(\xi_t-\eta_v)-\tau_x+\phi_u,\\ H(x)(\xi_t+\eta_v)-\tau_x-\phi_u, \phi_x-H(x)\eta_t,\\ H(x)(\xi_x-\tau_t+\eta_u-\phi_v)+H'(x)\xi\end{array}\right\}. \tag{26}$$

步骤 2 确定对称核对应 InfV $\mathcal{X}_0$. 当参数 $\theta=H(x)$ 任意时, 把确定方程组 $DPS=0$ 进一步分解, 得 $DCS_0=0$. 这里 $DCS_0=\{\xi,\tau_x,\tau_t,\tau_u,\tau_v,\eta_v,\eta_t,\phi_u,\phi_x,\eta_u-\phi_v,\phi_t-\eta_x\}$. 所以, $\mathcal{X}_0$ 由零点集

$$\mathrm{Zero}(DCS_0)=\{\xi=0,\tau=c_1,\eta=c_2x+c_3u+c_4,\phi=c_2t+c_3v+c_5\} \tag{27}$$

给出.

步骤 3 确定对称核的扩展 $\mathcal{X}_\theta$. 为此确定微分多项式系统 DPS 的零点分解 (22).

我们在基本序 $x\prec t\prec\xi\prec\tau\prec\phi\prec\eta$ 下, 用算法 D, 获得如下零点分解

$$\mathrm{Zero}(DPS)=\mathrm{Zero}(DCS_1/I_1)\cup\mathrm{Zero}(\{DCS_2,I_1\}/I_2)\cup\mathrm{Zero}(DCS_3,I_2), \tag{28}$$

其中

$$DCS_1=\left\{\begin{array}{l}\xi,\tau_x,\tau_t,\tau_u,\tau_v,\eta_v,\phi_u,\phi_{vv},\phi_{tv},\phi_{xv},\\ \eta_u-\phi_v,\eta_x-\phi_t,H(x)\eta_t-\phi_x,\\ H(x)(H(x)\phi_{tt}-\phi_{xx})+H'(x)\phi_x\end{array}\right\},$$

$$DCS_2=\left\{\begin{array}{l}\tau_u,\tau_v,\tau_x+2\phi_u,2H(x)H'(x)\tau_t-(3H'(x)^2-2H(x)H''(x))\xi,\\ \eta_x-\phi_t,H(x)\eta_t-\phi_x,2H(x)(\eta_u-\phi_v)+H'(x)\xi,H(x)\eta_v-\phi_u,\\ \xi_u,\xi_v,H(x)\xi_t+2\phi_u,H(x)H'(x)\xi_x-(H'(x)^2-H(x)H''(x))\xi,\\ \phi_{vv},\phi_{uu},\phi_{uv},H(x)(H(x)\phi_{tt}-\phi_{xx})+H'(x)\phi_x,\\ H(x)H'(x)\phi_{xu}-(2H'(x)^2-H(x)H''(x))\phi_u,\\ H(x)^2H'(x)\phi_{tv}-(H'(x)^2-H(x)H''(x))\phi_u,\\ 2H(x)H'(x)^2\phi_{tu}-(H'(x)^2H''(x)-2H(x)H''(x)^2+H(x)H'(x)H^{(3)}(x))\xi,\\ 2H(x)H'(x)^2\phi_{xv}-(H'(x)^2H''(x)-2H(x)H''(x)^2+H(x)H'(x)H^{(3)}(x))\xi\end{array}\right\},$$

$$DCS_3=\left\{\begin{array}{l}\xi_{tu}-\xi_{xv},H(x)\xi_{vv}-\xi_{uu},H(x)\xi_{tv}-\xi_{xu},H(x)\xi_{tt}-\xi_{xx},\\ H(x)\xi_t-\tau_x,\xi_x-\tau_t,H(x)\xi_v-\tau_u,\xi_u-\tau_v,\\ \eta_x-\phi_t,H(x)\eta_t-\phi_x,\eta_u-\phi_v,H(x)\eta_v-\phi_u,\\ \phi_{tu}-\phi_{xv},H(x)\phi_{vv}-\phi_{uu},H(x)\phi_{tv}-\phi_{xu},H(x)\phi_{tt}-\phi_{xx}\end{array}\right\},$$

以及

$$\begin{aligned}I_1=&2H'(x)^4H''(x)-2H(x)H'(x)^2H''(x)^2-4H(x)^2H''(x)^3\\&+5H(x)^2H'(x)H''(x)H^{(3)}(x)-H(x)^2H'(x)^2H^{(4)}(x),\\ I_2=&H'(x).\end{aligned}$$

我们看出, 分解式 (28) 中的第一个分支 Zero(DCS_1/I_1) 没有对应分类方程; 第二个分支 Zero $(DCS_2,\,I_1/I_2)$ 有一个分类方程 $E_1(\theta)=I_1=0$; 第三个分支 Zero(DCS_3,I_2) 有一个分类方程 $E_2(\theta)=I_2=0$.

至此, 我们得到了方程 (24) 的由分解式 (28) 给出的完全势对称分类. 该方程的势对称共有四类, 分别对应特征列集 DCS_0, DCS_1, DCS_2, DCS_3 和相应的分类方程 $I_1=0$ 和 $I_2=0$.

最后, 为了得到分类中各分支对称和相应参数具体表达式, 我们要精确求解 PDEs: $DCS_1=0$, $DCS_2=0$, $DCS_3=0$ 和分类方程 $I_1=0$,$I_2=0$. 由于这些方程组是良序系统, 很容易求解. 故我们有

$$\mathrm{Zero}(DCS_1/I_1)=\{\xi=0,\tau=c_1,\eta=c_2u+a(x,t),\phi=c_2v+b(x,t)\}\,,\tag{29}$$

其中 c_1,c_2 是任意常数且函数 $(a(x,t),b(x,t))$ 满足 (24).

$$\begin{aligned}\mathrm{Zero}(\{DCS_2,I_1\}/I_2)=\Big\{&\xi=g(t)\frac{H(x)}{H'(x)},\tau=\frac{3H'(x)^2-2H(x)H''}{2H'(x)^2}\int^t g(s)ds+c_1,\\ &\eta=\left(\frac{H(x)H''-3H'(x)^2}{2H'(x)^2}g(t)+c_2\right)u-\frac{H(x)}{2H'(x)}g'(t)v+a(x,t),\\ &\phi=-\frac{H(x)^2}{2H'(x)}g'(t)u+\left(\frac{H(x)H''-H'(x)^2}{2H'(x)^2}g(t)+c_2\right)v+b(x,t)\Big\},\end{aligned}\tag{30}$$

其中 c_1,c_2,σ 是任意常数且 $g(t)$ 满足

$$\frac{H'(x)}{H(x)^2}\left(\frac{3H'(x)^2-2H(x)H''(x)}{2H'(x)^2}\right)'=\sigma=\frac{g''(t)}{g(t)}.\tag{31}$$

表 1 PDE (23) 的势对称分类

$H(x)$	微分特征列集	ξ,τ,η,ϕ	条件	势对称
任意	DCS_0	(27)	无	没有
$I_1 \neq 0$	DCS_1	(29)	$a, b \in \text{Zero}(24)$	没有
$\begin{cases} I_1 = 0, I_2 \neq 0 \\ \Leftrightarrow (31) \end{cases}$	DCS_2	(30)	$\sigma, g \in \text{Zero}(31)$, $a, b \in \text{Zero}(24)$.	$\begin{cases} \text{有} \\ g' \neq 0 \end{cases}$
$I_2 = 0.$	DCS_3	(32)	$\begin{cases} (f,g),(\bar{f},\bar{g}) \in \text{Zero}(33), \\ (F,\bar{F}) \in Zero(34). \end{cases}$	有 无穷多个

这里 $(a(x,t), b(x,t))$ 是方程 (24) 的任意解, 参数 $H(x)$ 满足 $I_1 = 0$ 和 (31). 由 (31) 推知 $I_1 = 0$ 恒成立, 因而 (31) 是等价于方程 $I_1 = 0$.

对 $I_2 = 0$, 设 $H(x) = \alpha^2$, 则有

$$\text{Zero}(DCS_3, I_2) = \left\{ \begin{array}{l} \xi = f(x,t,\alpha u - v) + g(x,t,\alpha u + v), \\ \tau = \alpha(-f(x,t,\alpha u - v) + g(x,t,\alpha u + v)) + F(x,t), \\ \eta = \frac{1}{\alpha}(-\bar{f}(x,t,\alpha u - v) + \bar{g}(x,t,\alpha u + v)) + \bar{F}(x,t), \\ \phi = \bar{f}(x,t,\alpha u - v) + \bar{g}(x,t,\alpha u + v) \end{array} \right\}, \tag{32}$$

其中函数 $(k(x,t), h(x,t))$, $(y,z) = (f,g)$ 和 $(y,z) = (\bar{f},\bar{g})$ 满足

$$y_x + \alpha y_t = \frac{1}{2}(k(x,t) + h(x,t)), \quad z_x - \alpha z_t = \frac{1}{2}(k(x,t) - h(x,t)), \tag{33}$$

且 $P = F(x,t)$ 和 $P = \bar{F}(x,t)$ 是方程组

$$P_x(x,t) = \alpha h(x,t), \quad P_t(x,t) = k(x,t) \tag{34}$$

的任意两个解.

综上, 我们通过 (24)–(34) 获得波动方程 (23) 的完全势对称分类及具体表达式. 把分类结果总结在表 1 里. 注意到, 微分特征列集 DCS_0 和 DCS_1 没产生势对称; 如果 $g'(t) \neq 0$, 则微分特征列集 DCS_2 产生势对称; 微分特征列集 DCS_3 产生无穷多个势对称.

这些分类包括了在文献 [2] 中给出的结果. 此外, 值得注意的是, 在 (29)、(30) 和 (32) 中的解分别给出了满足 (24)、(31)、(33) 和 (34) 的参数 $H(x)$ 对应对称类的统一表示式.

4 结束语

本文用吴方法进行了计算和分类 PDEs 对称的一个探索, 给出了新的 PDEs 对称计算和分类算法理论, 其基本思想有四个方面. 首先, 我们把各类对称的判别准则统一化 (见 (3)), 使给出的理论和算法适用于广泛类对称的研究. 其次, 我们给出 PDEs 的 Lie 对称传统准则的微分代数等价变形 (定理 5 至 7). 这个结果导致产生和约化对称对应 DTEs 的新算法 (算法 B 和 C). 在算法中, 我们首先把原系统 $\mathcal{R}$ 对附加方程 (若存在) 进行约化, 并获得微分升列形式系统 $\mathcal{R}'$. 然后, 把 $\text{Pr}\mathcal{X}(\mathcal{R}')$ 对系统 $\mathcal{R}'$ 进行约化, 从而获得 DTEs. 实际上, 我们的算法把传统 Lie 算法中的 '替换变量' 用微分多项式的 '首项' 代替, 把 '带入' 用 '约化' 代替来实现. 这样有效克服了传统 Lie 算法中的一些缺陷 (见问题 1). 再次,

为了求解对称的 DTEs, 我们利用吴方法中给出的零点分解定理 (定理 2 和 3), 把 DTEs 的解集完全分解为一些列微分特征列集零点集的并, 把问题转化为求解微分特征列集对应良序方程组的问题. 从而达到最终容易确定对称的目的 (见问题 3). 最后, 我们用吴方法中的良序原理和零点分解定理给出了一个含参数 PDEs 的完全对称分类. 在这个分解式中初式和隔离子的乘积给出了所有分类方程, 而其微分特征列部分给出了对称所属的类. 由于微分特征列集含有可积条件, 从而该分解式也给出了判断对称计算中相容性问题的方法 (见问题 2 和 4).

我们的算法理论具有如下特点和创新点. 它给出了计算和分类广泛类 PDEs 各类对称的统一的机械化算法理论; 该算法用的基础理论不同于现有已知算法, 其中不涉及微分多项式理想的概念; 这是吴文俊提出的微分特征列集方法在微分领域的一个新的应用; 给定的算法理论回答了在第 2.3 小节中提出的问题 1 至 4; 该算法也可以推广应用到其它微分问题求解中, 如 PDEs 的积分因子的计算、首次积分的确定和守恒律的计算和分类等 [37]. 特别是, 从 DTEs 的微分特征列集, 我们能获得更多对称信息, 如对称维数, 对称结构和 DTEs 的泰勒级数解等 [8,9].

我们在后续文章中给出本文提出的理论和算法的更多具体应用.

致谢 作者感谢审稿专家给予的诚恳意见和有益建议, 感谢内蒙古自然科学基金重点项目 (批准号: 200607010103) 的部分资助.

参考文献

1 Olver P J. Applications of Lie Groups to Gifferential Equations. London: Springer-Verlag, 1991
2 Bluman G, Kumei S. Symmetries and Differential Equations. In: Applied Mathematical Sciences, vol. 81. New York: Springer-Verlag, 1989
3 Bluman G, Yan Z. Nonclassical potential solutions of partial differential equations. Eruopean J Appl Math, 2005, 16: 239–261
4 Ovsiannikov L V. Group Analysis of Differential Equations (Translation edited by Ames W F). New York-London: Academic Press, 1982
5 Fushchlicch W I. Conditional symmetries of the eqations of mathematical physics. Ukrain Math J, 1991, 43: 1456–1470
6 Bluman G, Cole J D. The general similarity solution of the heat equation. J Math Mech, 1969, 18: 1025–1042
7 Klimov D M, Zhuravlev V Ph. Group-Theoritic Methods in Mechanics and Applied Mathematics. London-New York: Taylor and Francis, 2002
8 Reid G J. Algorithms for reducing a system of PDEs to standard form, determining the dimension of its solution space and calculating its Taylor series solution. European J Appl Math, 1991, 2: 293–318
9 Schwarz F. An algorithm for determining the size of symmetry groups. Computing, 1992, 49: 95–115
10 Wolf T, Brand A. Investigating DEs with CRACK and related programs. SIGSAM Bull, 1995, SI: 1–8
11 Mansfield E. Differential Gröbner gases. PhD Thesis. Sydney: University of Sydney, 1991
12 Lisle I G, Reid G J. Symmetry classification using noncommutative invariant differential operators. Found Comput Math, 2006, 6: 353–386
13 Ibragimov N H. Applications in Engineering and Physical Sciences. In: CRC Hand Book of Lie Group Analysis of Differential Equations, vol. 2. Boca Raton: CRC Press, 1994
14 Hereman W. Symbolic software for Lie symmetry analysis. In: Lie Group Analysis of Differential Equations, vol. 3. Boca Raton: CRC Press, 1996, 367–413
15 Topunov V L. Reducing systems of linear partial differential equations to a passive form. Acta Appl Math, 1989, 16: 191–206
16 陈玉福, 高小山. 微分多项式系统的对合特征. 中国科学 A 辑, 2003, 33: 97–113
17 Clarkson P A, Mansfield E L. Open problems in symmetry analysis. In: Leslie J A, Robart T, eds. Geometrical Study of Differential Equations. Contemprorary Mathematics Series, vol. 285. Providence, RI: American Mathematical Society, 2001, 195–205
18 Ames W F, Lohner R J, Adams E. Group properties of $u_{tt} = [f(u)u_x]_x$. Internat J Non-Linear Mech, 1981, 16: 439–447

19 Torrisi M, Tracina R. Equivalance transformation and symmetries for a heat conduction model. Internat J Non-Linear Mech, 1998, 33: 473–487
20 Ibragimov N H, Torrisi M, Valenti A. Preliminary group classification of equation $v_{tt} = f(v, v_x)v_{xx} + g(x, v_x)$. J Math Phys, 1991, 32: 2988–2995
21 Zhdanov R, Lahno V. Group classification of heat conductivity equations with a nonlinear sources. J Phys A, 1990, 32: 7405–7418
22 Nikitin A G, Popovych R O. Group classification of nonlinear Schrödinger equations. Ukrainian Math J, 2001, 53: 1053–1060
23 Popovych R O, Ivanova N M. New results on group classification of nonlinear diffusion-convection equations. J Phys A, 2004, 37: 7547–7565
24 Huang D J, Ivanova N M. Group analysis and exact solutions of a class of variable coefficient nonlinear telegraph equations. J Math Phys, 2007, 48: 073507
25 Bluman G, Temuer C. Local and nonlocal symmetries for nonlinear telegraph equations. J Math Phys, 2005, 46: 023505
26 Bluman G, Temuer C. Conservation laws for nonlinear telegraph-type equations. J Math Anal Appl, 2005, 310: 459–476
27 Bluman G, Temuer C. Comparing symmetries and conservation laws of nonlinear telegraph equations. J Math Phys, 2005, 46: 073513
28 Bluman G, Temuer C, Anco S C. New conservation laws obtained directly from symmetry action on a known conservation law. J Math Anal Appl, 2006, 322: 233–250
29 Wu W T. Basic principles of mechanical proving theorem in elementary geometry. J Syst Sci, Math Sci, 1984, 4: 207–235
30 Wu W T. Mathematics Mechanization. Beijing-Dordrecht-Boston-London: Science Press-Kluwer Academic Publishers, 2000
31 Wu W T. On the foundation of algebraic differential geometry. Syst Sci Math Sci, 1989, 2, 289–312
32 Ritt J F. Differential Algebra. In: AMS Colloquium Publications, vol. 33. Providence, RI: American Mathematical Society, 1950
33 Clarkson P A, Mansfield E L. Algorithms for the non-classical method of symmetry reductions. SIAM J Appl Math, 1994, 54: 1693–1719
34 高小山, 王定康, 裘宗燕, 杨宏. 方程求解与机器证明 - 基于 MMP 的问题求解. 北京: 科学出版社, 2006
35 Temuer C. An algorithmic theory of reduction of differential polynomial system. Adv Math (China), 2003, 32: 208–220
36 特木尔朝鲁, 高小山. 微分多项式系统的近微分特征列集. 数学学报, 2002, 45: 1041–1050
37 特木尔朝鲁, 银山. 常微分方程 (组) 的高次积分因子与高次积分及其微分特征列集算法. 数学学报, 2007, 50: 1017–1030

A new algorithmic theory for determining and classifying classical and non-classical symmetries of partial differential equations

TEMUER Chaolu & BAI YuSan

Abstract In this article, based on differential form Wu's method, unified mechanical algorithmic theories for determining and classifying classical, non-classical symmetries of partial differential equations are proposed. Some theoretical and algorithmic deficiencies commonly encountered in Lie's algorithm are overcame by the theories. The algorithms make the determination and classification of symmetry become more direct and systematic and extend the range of applications of Lie's algorithm. This is also a new application of Wu's method in the field of differential equations.

Keywords: symmetry, classification, Wu's method, differential characteristic set
MSC(2000): 03F03, 03F65, 35A30, 58J70, 58J72