中国科学

1982 年 6 月　　A　辑　　第 6 期

负度规量子力学的表象理论

阮图南　范洪义

(中国科学技术大学，合肥)

摘　要

本文从负度规玻色子的粒子表象出发建立了相干态表象．在这个基础上建立了负度规下的坐标表象和动量表象．并证明了负度规玻色子在闵氏空间中的坐标、动量表象不存在．从而为建立负度规玻色子的路径积分量子化的欧氏理论奠定了基础．

一、引　言

负度规量子力学的研究最早见于 Gupta[1-5] 等人的文章，但他们的讨论都限于粒子表象，而令人感兴趣的问题是负度规玻色子的坐标、动量表象是否存在？如果存在的话又怎样自洽地导出它们？它们的经典对应是欧氏空间还是闵氏空间？它们又是怎样反映负度规的特点等等．在本文建立的坐标表象和动量表象中，反厄米算符 P, Q 有实本征值，因此它们的经典对应不是原始的闵氏空间，而是一个对偶的欧氏空间．这表明负度规量子力学的坐标、动量表象是在欧氏空间中构造的．而且可以证明，在闵氏空间中的坐标、动量表象不存在，因此负度规玻色子的路径积分量子化理论只能在欧氏空间中建立．

二、薛定格方程

负度规系统的经典拉氏函数为

$$L = L(q, \dot{q}), \quad \dot{q} = \frac{dq}{dt},$$

$$\delta L = \frac{\partial L}{\partial q}\delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta \dot{q}, \tag{2.1}$$

其中 q, $\dot{q}$ 为纯虚数，L 为实数．欧拉方程由哈密顿作用量原理导出

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial L}{\partial q}. \tag{2.2}$$

为了纳入正则形式，引进正则动量 p 和 Hessian 函数 m,

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}, \quad m = \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^2}, \tag{2.3}$$

显然 p 为纯虚数，m 为实数．如果 $m \neq 0$，则存在反函数 $\dot{q} = \dot{q}(p, q)$，以致可用 p 代替 $\dot{q}$．定义经典哈氏函数

本文于 1981 年 9 月 2 日收到．

$$h = p\dot{q} - L(q, \dot{q}), \tag{2.4}$$

$$\delta h = \dot{q}\delta p - \dot{p}\delta q. \tag{2.5}$$

显然 h 为实数，且为 p, q 的函数，即 $h = h(p, q)$，

$$\delta h = \frac{\partial h}{\partial p}\delta p + \frac{\partial h}{\partial q}\delta q. \tag{2.6}$$

比较(2.5)，(2.6)式得正则方程

$$\dot{q} = \frac{\partial h}{\partial p}, \quad \dot{p} = -\frac{\partial h}{\partial q}. \tag{2.7}$$

现在引进算符对应进行量子化

$$p \to P_H, \quad q \to Q_H, \quad h(p, q) \to H(P_H, Q_H).$$

由于 p, q 为纯虚数，所以 P_H, Q_H 为反厄米算符，

$$P_H^+ = -P_H, \quad Q_H^+ = -Q_H. \tag{2.8}$$

引进量子化条件

$$[Q_H, P_H] = i, \tag{2.9}$$

则(2.7)式过渡为海森伯方程

$$\dot{Q}_H = i[H, Q_H], \quad \dot{P}_H = i[H, P_H],$$

$$\frac{\partial}{\partial t} |\rangle_H = 0. \tag{2.10}$$

亦即在海森伯表象中波函数不随时间改变．若H不显含时间t，则有

$$\frac{d}{dt} H = i[H, H] = 0, \tag{2.11}$$

即H为守恒量．由此作表象变换

$$|t\rangle = e^{-iHt}|\rangle_H, \quad P = e^{-iHt}P_H e^{iHt}, \quad Q = e^{-iHt}Q_H e^{iHt}, \tag{2.12}$$

则(2.10)式过渡为薛定格方程

$$i\frac{\partial}{\partial t}|t\rangle = H|t\rangle, \quad H = H(P, Q), \tag{2.13}$$

$$\dot{P} = \dot{Q} = 0,$$

$$[Q, P] = i, \tag{2.14}$$

亦即在薛定格表象中算符不随时间改变．由于这两种表象在物理上完全等效，所以 P, Q 也应该是反厄米算符，即

$$P^+ = -P, \quad Q^+ = -Q. \tag{2.15}$$

为了定义变换矩阵元，必须研究哈氏函数H的厄米性质．在薛定格表象中引进算符

$$N = \frac{1}{2}(P^2 + Q^2 - 1) = N^+. \tag{2.16}$$

由此构造度规算符 $(-)^N$，则根据量子化条件(2.14)可以证明 $(-)^{2N} = 1$，以及

$$(-)^N P(-)^N = -P, \quad (-1)^N Q(-)^N = -Q. \tag{2.17}$$

其次由反厄米性(2.8)，(2.15)式，可得

$$P_H = e^{iH^+t}Pe^{-iH^+t}, \quad Q_H = e^{iH^+t}Qe^{-iH^+t}. \tag{2.18}$$

如果哈氏函数H满足下列条件

$$(-)^N H^+ (-)^N = H, \tag{2.19}$$

则由 (2.18) 式得

$$(-)^N P_H (-)^N = -P_H, \quad (-)^N Q_H (-)^N = -Q_H. \tag{2.20}$$

比较 (2.17), (2.20) 式可得结论：若 $(-)^N H^+ (-)^N = H$，则度规算符 $(-)^N$ 是表象无关的. 因此状态的内积和算符的矩阵元分别定义为 $\langle f|(-)^N|i\rangle$ 和

$$A_{fi} = \langle f|(-)^N A(P, Q)|i\rangle. \tag{2.21}$$

由此极易证明算符 H, P, Q 都是厄米矩阵，从而有实本征值. 若在薛定格表象定义坐标的本征态 $Q|q\rangle = q|q\rangle$，则在海森伯表象中有

$$Q_H(t)|q, t\rangle = q|q, t\rangle, \quad |q, t\rangle = e^{iHt}|q\rangle. \tag{2.22}$$

由此利用 (2.19) 可得变换矩阵元

$$F(q''t'', q't') = \langle q''t''|(-)^N|q't'\rangle = \langle q''|(-)^N e^{-iH(t''-t')}|q'\rangle, \tag{2.23}$$

它代表从状态 $\psi(q', t')$ 到 $\psi(q'', t'')$ 的变换.

三、粒 子 表 象

由于 P, Q 是反厄米算符，所以按下列约定引进负度规玻色子的湮灭、产生算符，

$$Q = \frac{a - a^+}{\sqrt{2}}, \quad P = \frac{a + a^+}{\sqrt{2}\, i}. \tag{3.1}$$

根据量子化条件 (2.14) 式，可以给出反常对易关系[1]

$$aa^+ - a^+a = -1. \tag{3.2}$$

定义粒子数算符

$$N = -a^+a = N^+, \tag{3.3}$$

则由反常对易关系 (3.2) 式可以导出下列性质:

$$Na = a(N - 1), \quad Na^+ = a^+(N + 1), \tag{3.4}$$

$$e^{i\theta N} a e^{-i\theta N} = e^{-i\theta} a, \quad e^{i\theta N} a^+ e^{-i\theta N} = e^{i\theta} a^+, \tag{3.5}$$

$$(-)^N a (-)^N = -a, \quad (-)^N a^+ (-)^N = -a^+, \tag{3.6}$$

$$(-)^N P (-)^N = -P, \quad (-)^N Q (-)^N = -Q.$$

定义 N 的本征态

$$N|n\rangle = n|n\rangle. \tag{3.7}$$

极易证明 n 为实数本征值. 根据 $Na|n\rangle = (n-1)a|n\rangle$ 可以推论：如果 N 存在最小本征值，则必为零，且使

$$a|0\rangle = 0, \quad \langle 0|0\rangle = 1, \tag{3.8}$$

所以 $|0\rangle$ 称为反常玻色子真空. 由此出发定义状态序列

$$|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} a^{+n}|0\rangle, \quad n = 0, 1, 2, \cdots, \tag{3.9}$$

则由反常对易关系 (3.2) 式可以给出本征方程

$$N|n\rangle = n|n\rangle, \quad n = 0, 1, 2, \cdots, \tag{3.10}$$

$$a|n\rangle = -\sqrt{n}\,|n - 1\rangle, \quad a^+|n\rangle = \sqrt{n+1}\,|n + 1\rangle, \tag{3.11}$$

和正交归一条件

$$\langle n' | (-)^N | n \rangle = \delta_{n',n}. \tag{3.12}$$

在上式两边乘以 $\sum\limits_{n'} | n' \rangle$ 可得完备条件

$$\sum_{n=0}^{\infty} | n \rangle \langle n | = (-)^N, \tag{3.13}$$

其中 $(-)^N$ 称为度规算符，是负度规空间的基本特点．利用反常对易关系 (3.2) 式，可以把它展开为下列正规乘积[6]

$$(-)^N = e^{-i\pi a^+ a} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!} a^{+n} a^n. \tag{3.14}$$

四、相干态表象

在文献 [4] 中我们已经引入负度规玻色子的相干态表象，它是湮灭算符 a 的本征态，

$$a | z \rangle = z | z \rangle, \quad z = x + iy, \tag{4.1}$$

其中 x, y 是实数．利用完备条件 (3.13) 式按粒子数展开

$$| z \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} (-)^n | n \rangle \langle n | z \rangle. \tag{4.2}$$

展开系数 $\langle n | z \rangle$ 满足条件

$$\langle n | a | z \rangle = \sqrt{n+1} \langle n+1 | z \rangle = z \langle n | z \rangle, \tag{4.3}$$

由此得递推关系

$$\langle n | z \rangle = \langle 0 | z \rangle \frac{z^n}{\sqrt{n!}}, \quad n = 0, 1, 2, \cdots. \tag{4.4}$$

于是展开 (4.2) 式改写为：

$$| z \rangle = \langle 0 | z \rangle \sum_{n=0}^{\infty} | n \rangle \frac{(-z)^n}{\sqrt{n!}} = \langle 0 | z \rangle e^{-za^+} | 0 \rangle. \tag{4.5}$$

若取归一化条件

$$\langle z | (-)^N | z \rangle = 1, \tag{4.6}$$

则得相干态表象中的真空波函数

$$\langle 0 | z \rangle = e^{-\frac{1}{2}|z|^2} = \langle z | 0 \rangle, \tag{4.7}$$

可见真空是 z 的偶函数．将 (4.7) 式代入 (4.4)，(4.5) 式则得粒子表象中的相干态波函数及其展开

$$\langle n | (-)^N | z \rangle = e^{-\frac{1}{2}|z|^2} \frac{(-z)^n}{\sqrt{n!}}, \tag{4.8}$$

$$| z \rangle = e^{-\frac{1}{2}|z|^2} \sum_{n=0}^{\infty} | n \rangle \frac{(-z)^n}{\sqrt{n!}} = e^{-\frac{1}{2}|z|^2 - za^+} | 0 \rangle = e^{-z^* a - za^+} | 0 \rangle. \tag{4.9}$$

极易证明相干态具有下列性质：

$$\langle z'|(-)^N|z\rangle = e^{-\frac{|z|^2+|z'|^2}{2}+zz'^*}, \tag{4.10}$$

$$\frac{1}{\pi}\int d^2z|z\rangle\langle z| = (-)^N, \quad d^2z = dxdy, \tag{4.11}$$

$$(-)^N|z\rangle = |-z\rangle, \tag{4.12}$$

$$a^+|z\rangle = \left(-\frac{\partial}{\partial z} - \frac{1}{2}z^*\right)|z\rangle, \tag{4.13}$$

或

$$|z+\varepsilon\rangle = e^{-\varepsilon(a^+ + \frac{1}{2}z^*)}|z\rangle. \tag{4.14}$$

定义算符在相干态的平均值 $\bar{A} = \langle z|(-)^N A|z\rangle$，则有

$$\bar{Q} = \sqrt{2}x, \quad \bar{P} = \sqrt{2}y, \tag{4.15}$$

$$\bar{Q}^2 = \frac{1}{2} + 2x^2, \quad \bar{P}^2 = \frac{1}{2} + 2y^2,$$

$$\Delta Q^2 = \bar{Q}^2 - \bar{Q}^2 = \frac{1}{2}, \quad \Delta P^2 = \bar{P}^2 - \bar{P}^2 = \frac{1}{2},$$

故

$$\Delta Q \Delta P = \frac{1}{2}. \tag{4.16}$$

因此相干态满足最小测不准关系．利用完备性(4.11)式可得算符 a, a^+, P 和 Q 的表式

$$a = \frac{1}{\pi}\int d^2z z|z\rangle\langle z|(-)^N, \tag{4.17}$$

$$a^+ = \frac{-1}{\pi}\int d^2z z^*|z\rangle\langle z|(-)^N, \tag{4.18}$$

$$Q = \frac{\sqrt{2}}{\pi}\int d^2z x|z\rangle\langle z|(-)^N, \tag{4.19}$$

$$P = \frac{\sqrt{2}}{\pi}\int d^2z y|z\rangle\langle z|(-)^N. \tag{4.20}$$

由上述公式可以看出约定(3.1)式是自洽的．特别是它们表明了坐标、动量表象的建立可借助于相干态．

五、坐标表象

在(4.9)式中令 $z = x + iy$ 得相干态的显示形式

$$|z\rangle = e^{-\frac{x^2+y^2}{2}-(x+iy)a^+}|0\rangle, \tag{5.1}$$

利用高斯积分公式对 y 积分之，得

$$\int_{-\infty}^{\infty} dy|z\rangle = \sqrt{2\pi}e^{-\frac{1}{2}(a^+ + x)^2}|0\rangle, \tag{5.2}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dydy'\langle z'|(-)^N|z\rangle = 2\pi\sqrt{\pi}\, e^{-\frac{1}{2}x^2}\delta\left(\frac{x-x}{\sqrt{2}}\right). \tag{5.3}$$

由此定义正交归一化态

$$|q\rangle = \frac{e^{\frac{1}{4}x^2}}{\sqrt{2\pi\sqrt{\pi}}}\int_{-\infty}^{\infty} dy|z\rangle\Big|_{x=\sqrt{2}q} = \frac{1}{4\sqrt{\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}q^2-\sqrt{2}qa^+ - \frac{1}{2}a^{+2}}|0\rangle, \tag{5.4}$$

$$\langle q'|(-)^N|q\rangle = \delta(q - q'), \tag{5.5}$$

则利用反常对易关系 (3.2) 式可以给出本征方程

$$Q|q\rangle = \frac{a - a^+}{\sqrt{2}}|q\rangle = q|q\rangle, \quad q^* = q, \tag{5.6}$$

以及平移公式

$$P|q\rangle = \frac{a + a^+}{\sqrt{2}\, i}|q\rangle = \frac{\sqrt{2}\, a^+ + q}{i}|q\rangle = i\frac{d}{dq}|q\rangle, \tag{5.7}$$

$$|q + \varepsilon\rangle = e^{-i\varepsilon P}|q\rangle. \tag{5.8}$$

因此 $|q\rangle$ 是坐标算符 Q 的本征态，且本征值为实数 $q = x/\sqrt{2}$. 利用 (3.6) 式和正交归一条件 (5.5) 式可以直接验证下列公式的正确性

$$(-)^N|q\rangle = |-q\rangle, \tag{5.9}$$

$$|q\rangle\langle q|(-)^N = \delta(q - Q), \tag{5.10}$$

积分 (5.10) 式得完备条件

$$\int_{-\infty}^{\infty} dq|q\rangle\langle q| = (-)^N. \tag{5.11}$$

利用厄米多项式 $H_n(x)$ 的母函数公式

$$e^{-t^2+2xt} = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(x)\frac{t^n}{n!}, \tag{5.12}$$

则 $|q\rangle$ 可按粒子展开，由 (5.4) 式得

$$|q\rangle = \sum_{n=0}^{\infty}|n\rangle \frac{(-)^n}{\sqrt{2^n n!\sqrt{\pi}}}e^{-\frac{1}{2}q^2}H_n(q). \tag{5.13}$$

由此给出粒子表象中的坐标波函数

$$\langle n|(-)^N|q\rangle = \frac{(-)^n}{\sqrt{2^n n!\sqrt{\pi}}}e^{-\frac{1}{2}q^2}H_n(q), \quad n = 0, 1, 2, \cdots. \tag{5.14}$$

令 $n = 0$ 得真空波函数

$$\langle q|0\rangle = \frac{1}{\sqrt[4]{\pi}}e^{-\frac{1}{2}q^2}, \tag{5.15}$$

可见真空是 q 的偶函数. 由定义 (5.4) 式还可以给出相干态波函数

$$\begin{aligned}\langle q|(-)^N|z\rangle &= \frac{e^{\frac{1}{4}x'^2}}{\sqrt{2\pi\sqrt{\pi}}}\int_{-\infty}^{\infty}dy'\langle z'|(-)^N|z\rangle\Big|_{x'=\sqrt{2}q} \\ &= \frac{1}{\sqrt[4]{\pi}}e^{-\frac{1}{2}q^2+\sqrt{2}qz-\frac{z^2+|z|^2}{2}}.\end{aligned} \tag{5.16}$$

六、动量表象

如果利用高斯公式在 (5.1) 式中对 x 积分得

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx|z\rangle = \sqrt{2\pi}e^{\frac{1}{2}(a^+-iy)^2}|0\rangle, \tag{6.1}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dxdx'\langle z'|(-)^N|z\rangle = 2\pi\sqrt{\pi}\, e^{-\frac{1}{2}y^2}\delta\left(\frac{y-y'}{\sqrt{2}}\right), \tag{6.2}$$

由此定义正交归一化态

$$|p\rangle = \frac{e^{\frac{1}{4}y^2}}{\sqrt{2\pi\sqrt{\pi}}}\int_{-\infty}^{\infty} dx|z\rangle\Big|_{y=\sqrt{2}p} = \frac{1}{\sqrt[4]{\pi}}e^{-\frac{1}{2}p^2-i\sqrt{2}pa^++\frac{1}{2}a^{+2}}|0\rangle, \tag{6.3}$$

$$\langle p'|(-)^N|p\rangle = \delta(p-p'). \tag{6.4}$$

利用反常对易关系 (3.2) 式可以给出本征方程

$$P|p\rangle = \frac{a+a^+}{\sqrt{2}\,i}|p\rangle = p|p\rangle, \quad p^* = p, \tag{6.5}$$

和平移公式

$$Q|p\rangle = \frac{a-a^+}{\sqrt{2}}|p\rangle = (-\sqrt{2}\,a^+ + ip)|p\rangle = -i\frac{d}{dP}|p\rangle, \tag{6.6}$$

$$|p+\varepsilon\rangle = e^{i\varepsilon Q}|p\rangle. \tag{6.7}$$

可见 $|p\rangle$ 是动量算符 P 的本征态，且本征值为实数 $p = y/\sqrt{2}$. 利用 (3.6) 式和正交归一条件 (6.4) 式可以验证下列公式的正确性

$$(-)^N|p\rangle = |-p\rangle, \tag{6.8}$$

$$|p\rangle\langle p|(-)^N = \delta(p-P). \tag{6.9}$$

积分 (6.9) 式得完备条件

$$\int_{-\infty}^{\infty} dp|p\rangle\langle p| = (-)^N. \tag{6.10}$$

利用厄米多项式的母函数 (5.12) 式，则得 $|p\rangle$ 的粒子展开，由 (6.3) 式得

$$|p\rangle = \sum_{n=0}^{\infty}|n\rangle\frac{(-i)^n}{\sqrt{2^n n!\sqrt{\pi}}}e^{-\frac{1}{2}p^2}H_n(p). \tag{6.11}$$

由此得粒子表象中的动量本征态

$$\langle n|(-)^N|p\rangle = \frac{(-i)^n}{\sqrt{2^n n!\sqrt{\pi}}}e^{-\frac{1}{2}p^2}H_n(p), \quad n = 0,1,2,\cdots. \tag{6.12}$$

令 $n=0$ 得真空波函数

$$\langle p|0\rangle = \frac{1}{\sqrt[4]{\pi}}e^{-\frac{1}{2}p^2}, \tag{6.13}$$

可见真空是 p 的偶函数. 由定义 (6.3) 式可得动量表象中的相干态波函数

$$\langle p|(-)^N|z\rangle = \frac{e^{\frac{1}{4}y'^2}}{\sqrt{2\pi\sqrt{\pi}}}\int_{-\infty}^{\infty} dx'\langle z'|(-)^N|z\rangle\Big|_{y'=\sqrt{2}p}$$

$$= \frac{1}{\sqrt[4]{\pi}}e^{-\frac{1}{2}p^2-i\sqrt{2}pz+\frac{z^2-|z|^2}{2}}. \tag{6.14}$$

利用 $|p\rangle$, $|q\rangle$ 的定义，(6.3) 和 (5.4) 式还可以求坐标表象中的动量波函数，

$$\langle q|(-)^N|p\rangle = \frac{e^{\frac{x'^2+y^2}{4}}}{2\pi\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} dxdy'\langle z'|(-)^N|z\rangle\Big|_{\substack{x'=\sqrt{2}q,\\ y=\sqrt{2}p.}} = \frac{e^{ipq}}{\sqrt{2\pi}} \tag{6.15}$$

在第五节和第六节我们从相干态出发，自然地求得反厄米算符 P, Q 的本征态和实数本征值，建立了坐标表象和动量表象．这与通常正度规量子力学的基本假定：厄米算符的本征值为实数迥然不同．原因是尽管在负度规下 P, Q 为反厄米算符，但由于度规算符 $(-)^N$ 的存在，使得 $(-)^N P$ 和 $(-)^N Q$ 都是厄米算符．因此以上建立的坐标、动量表象实际上是在欧氏空间中进行的，它们的经典对应不能直接回到闵氏空间．

七、闵氏空间中的坐标表象

定义坐标算符的本征方程

$$Q|q\rangle = q|q\rangle, \quad Q^+ = -Q, \tag{7.1}$$

求闵氏平均值得

$$\langle q|Q|q\rangle = q\langle q|q\rangle = -q^*\langle q|q\rangle, \tag{7.2}$$

若 $\langle q|q\rangle \neq 0$，则本征值 q 为纯虚数，即

$$q^* = -q, \quad q = iq_0, \tag{7.3}$$

其中 q_0 为实数．因此反厄米算符 Q 对应于经典闵氏空间．求 Q 的矩阵元得方程

$$\langle q'|Q|q\rangle = q\langle q'|q\rangle = q'\langle q'|q\rangle, \tag{7.4}$$

它的解为正交归一条件

$$\langle q'|q\rangle = \delta(q_0 - q_0'), \tag{7.5}$$

于是完备条件可取为

$$\int_{-\infty}^{\infty} dq_0|q\rangle\langle q| = 1. \tag{7.6}$$

求量子化条件 (2.14) 式的矩阵元得方程

$$\langle q'|[Q, P]|q\rangle = (q' - q)\langle q'|P|q\rangle = i\langle q'|q\rangle,$$
$$(q_0' - q_0)\langle q'|P|q\rangle = \delta(q_0 - q_0') \tag{7.7}$$

它的解为平移公式

$$\langle q'|P|q\rangle = \frac{\partial}{\partial q_0}\delta(q_0 - q_0'), \quad P|q\rangle = i\frac{d}{dq}|q\rangle, \tag{7.8}$$

$$|q + \varepsilon\rangle = e^{-i\varepsilon p}|q\rangle. \tag{7.9}$$

为了考察本征态 $|q\rangle$ 的存在性，利用粒子表象的完备性 (3.13) 式作展开

$$|q\rangle = \sum_{n=0}^{\infty}(-)^n|n\rangle\langle n|q\rangle. \tag{7.10}$$

展开系数 $\langle n|q\rangle$ 满足方程 $\langle n|Q|q\rangle = q\langle n|q\rangle$ 或

$$\langle n|a - a^+|q\rangle = \sqrt{2}\,q\langle n|q\rangle,$$

由此得递推关系

$$\sqrt{n+1}\langle n+1|q\rangle + \sqrt{n}\langle n-1|q\rangle = \sqrt{2}\,q\langle n|q\rangle. \tag{7.11}$$

它的解为粒子表象中的坐标波函数．

$$\langle n|q\rangle = \langle 0|q\rangle \frac{H_n(q)}{\sqrt{2^n n!}}, \quad n = 0,1,2,\cdots. \tag{7.12}$$

代入 (7.10) 式，得展开

$$|q\rangle = \langle 0|q\rangle \sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle \frac{(-)^n}{\sqrt{2^n n!}} H_n(q), \tag{7.13}$$

其中 $\langle 0|q\rangle$ 满足方程 $\langle 0|a^+|q\rangle = 0$，或

$$\langle 0|Q - iP|q\rangle = 0.$$

利用 (7.1)，(7.8) 可得微分方程

$$\frac{d}{dq}\langle 0|q\rangle = -q\langle 0|q\rangle. \tag{7.14}$$

它的解为：

$$\langle 0|q\rangle = Ce^{-\frac{1}{2}q^2} = Ce^{\frac{1}{2}q_0^2}, \tag{7.15}$$

其中 C 是由真空归一条件决定的常数，即

$$1 = \langle 0|0\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dq_0 \langle 0|q_0\rangle\langle q_0|0\rangle = |c|^2 \int_{-\infty}^{\infty} dq_0 e^{q_0^2}$$

或

$$|c|^2 = 1\Big/\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{x^2} = 0. \tag{7.16}$$

由此导出

$$\langle 0|q\rangle = 0, \tag{7.17}$$

代入 (7.13) 式立得

$$|q\rangle = 0. \tag{7.18}$$

这表明在闵氏空间中的坐标表象不存在，类似讨论可以证明在闵氏空间中动量表象也不存在。因此负度规下的路径积分量子化理论，只能在欧氏空间中建立。

参 考 文 献

[1] Gupta, S. N., *Quantum Electrodynamics*, Gordon and Breach Science Publishers, Inc., 1977, 35.
[2] Gupta, S. N., *Proc. Phys. Soc.*, **63**(1950), 681; **64**(1951), 850.
[3] Bleuler, K., *Helv. Phys. Acta.*, **23**(1950), 567.
[4] Ruan, T. N. Fan, H. Y. Yin, H. C., *Scientia Sinica*, **6**(1981), 749.
[5] Ruan, T. N. Fan, H Y. Yin, H. C., *Journal of CUST*, **1**(1981), 32.
[6] Louisell, W. H., *Quantum Statistical Properties of Radiation*, John Wiley & Sons, Inc., 1973, 156.