广义 Bochner-Riesz 乘子的等价性及其应用

献给陆善镇教授 75 华诞

石坐顺华, 聂旭东, 吴迪, 燕敦验*

中国科学院大学数学科学学院, 北京 100049

E-mail: shizuoshunhua11b@mails.ucas.ac.cn, niexudong10@mails.ucas.ac.cn, wudi08@mails.ucas.ac.cn, ydunyan@ucas.ac.cn

收稿日期: 2013-09-23; 接受日期: 2014-03-01; * 通讯作者
国家自然科学基金 (批准号: 11071250 和 11271162) 资助项目

摘要 本文研究下面这两个函数, $(1 - |x|^{\rho_1})_+^\alpha$ 和 $(1 - |x|^{\rho_2})_+^\alpha$, 其中 ρ_1, ρ_2 和 α 均为正实数, 文献上称这类函数为广义 Bochner-Riesz 乘子. 本文将证明, 当 α 给定时, 对任意的 $\rho_1 > 0$ 和 $\rho_2 > 0$, 这两个函数作为乘子, 其乘子算子的 L^p 有界性和 H^p 有界性是等价的.

关键词 Bochner-Riesz 乘子 L^p 乘子 H^p 乘子 等价性

MSC (2010) 主题分类 42B15, 42B35

1 引言

调和与分析中有一类重要的算子称为乘子, 记为 T_m . 这类算子是通过 Fourier 变换来定义,

$$\widehat{T_m f}(x) = m(x) \hat{f}(x),$$

其中, f 是适当的函数, 为了方便起见, 我们不妨先记为 Schwartz 函数空间上的函数, Schwartz 函数空间记为 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

对于算子 T_m 的 L^p 有界性或 H^p 有界性的研究长期以来一直是调和与分析中的一个核心问题. 显然, 由 T_m 的定义可知, T_m 的有界性完全取决于函数 m 的性质, 因此, 刻画函数 m 所满足的条件是研究乘子有界性的关键之所在.

Hörmander 等人对有界函数 m 所满足的条件作了系统研究, 得到了下面重要结果: 设实数 $s \geq 1$, $t \in \mathbb{N}^+$ 是正整数, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ 表示由非负整数 α_k , $k = 1, 2, \dots, n$ 组成的 n 维向量, 其模记为 $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$. 定义乘子空间 $M(s, t)$ 为

$$M(s, t) = \left\{ m \in L^\infty(\mathbb{R}^n) : \sup_{R>0} R^{s|\alpha|-n} \int_{R<|x|<2R} |D^\alpha m(x)|^s dx < \infty, \forall |\alpha| \leq t \right\}.$$

定理 A ^[1] 若 $m \in M(2, t)$ 且 $t > \frac{n}{2}$, 则 T_m 在 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 上有界, 其中, $1 < p < \infty$.

定理 B ^[2] 若 $m \in M(s, t)$, $t > \frac{n}{s}$, $s \geq 2$, 则 T_m 在 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 上有界, 其中, $1 < p < \infty$.

英文引用格式: Shi Z S H, Nie X D, Wu D, et al. The equivalence of a class of generalized Bochner-Riesz multipliers and its applications (in Chinese). Sci Sin Math, 2014, 44: 535–544, doi: 10.1360/N012013-00145

对于 $0 < p \leq 1$ 的情形, 文献 [2,3] 分别研究了乘子 T_m 在 H^p 上的有界性问题, 得到下面的定理 C. 此外, 陆善镇^[4] 给出了判断函数 m 是否为 $H^p(\mathbb{R}^n)$ 乘子的另外一个结果, 表述为定理 D.

定理 C 若 $m \in M(2, t)$ 且 $t > n(\frac{1}{p} - \frac{1}{2})$, 则 T_m 在 $H^p(\mathbb{R}^n)$ 上有界, 其中, $0 < p \leq 1$.

定理 D 设 $0 < p \leq 1$, k 是正整数且满足 $k > n(\frac{1}{p} - \frac{1}{2})$. 如果函数 m 在 $\mathbb{R}^n$ 上除去原点之外是 C^k 函数并且满足

$$|\partial_x^\gamma m(x)| \leq C|x|^{-|\gamma|}, \quad (1.1)$$

其中, $x \neq 0$ 且 $|\gamma| \leq k$, 那么 T_m 在 $H^p(\mathbb{R}^n)$ 上有界.

事实上, 定理 D 给出了函数 m 成为 Hardy 空间 $H^p(\mathbb{R}^n)$ 上的乘子的充分条件. 需要指出的是, 引理的假设条件可减弱至更为一般的 Hörmander 条件, 证明以及相关评注可参见文献 [4] 和此专著中的相关文献.

定义 1 设 $1 \leq p \leq \infty$ 且 $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, 我们记 $\mathfrak{M}_p(\mathbb{R}^n)$ 为所有使得算子

$$T_m f(x) = (m\hat{f})^\vee(x)$$

在 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 上有界的定义域为 $\mathbb{R}^n$ 的有界函数. 对于 $\mathfrak{M}_p(\mathbb{R}^n)$ 中的元素 m 定义其范数

$$\|m\|_{\mathfrak{M}_p(\mathbb{R}^n)} = \|T_m\|_{L^p \rightarrow L^p}.$$

定义 2 设 $0 < p \leq 1$, 我们记 $\mathfrak{M}\{H^p\}$ 为所有使得算子

$$T_m f(x) = (m\hat{f})^\vee(x)$$

在 $H^p(\mathbb{R}^n)$ 上有界, 且定义域为 $\mathbb{R}^n$ 的有界函数. 并且对于 $\mathfrak{M}\{H^p\}$ 中的元素 m 定义其范数

$$\|m\|_{\mathfrak{M}\{H^p\}} = \|T_m\|_{H^p \rightarrow H^p}.$$

注 3 对于乘子

$$\widehat{T_m f}(x) = m(x)\hat{f}(x),$$

如果能够证明函数 m 满足 $m \in \mathcal{FL}^1$, 即存在函数 $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, 使得 $m(x) = \hat{g}(x)$, 那么, 我们就可立刻得到 $m \in \mathfrak{M}_p(\mathbb{R}^n)$, 其中, $1 \leq p \leq \infty$. 这一结论是显然的. 事实上, 不妨设 $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, 则

$$T_m f = g * f.$$

由于 $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, 由 Young 不等式即可推出, T_m 在 L^p 上是有界的.

关于 $\mathfrak{M}_p(\mathbb{R}^n)$, 下面的两个性质是基本的.

性质 I $\mathfrak{M}_p(\mathbb{R}^n)$ 在点态乘积意义下是封闭的, 即对任意的 $m_1 \in \mathfrak{M}_p(\mathbb{R}^n)$, $m_2 \in \mathfrak{M}_p(\mathbb{R}^n)$, 则 $m_1 m_2 \in \mathfrak{M}_p(\mathbb{R}^n)$ 成立.

性质 II 对于 $m \in \mathfrak{M}_p(\mathbb{R}^n)$, $\|m\|_{\mathfrak{M}_p(\mathbb{R}^n)}$ 在平移、伸缩、反射和旋转变换下是不变的^[5].

本文所研究的乘子是广义的 Bochner-Riesz 平均算子, 定义如下:

$$\widehat{B_R^{\rho, \alpha} f}(x) = \left(1 - \frac{|x|^\rho}{R^\rho}\right)_+^\alpha \hat{f}(x), \quad (1.2)$$

其中, $\rho > 0$, $\alpha > 0$ 和 $R > 0$.

由性质 II 中的伸缩变换的不变性, 所以, 广义的 Bochner-Riesz 平均算子的定义可简化为

$$\widehat{B^{\rho,\alpha}f}(x) = (1 - |x|^\rho)_+^\alpha \hat{f}(x). \quad (1.3)$$

由于广义 Bochner-Riesz 平均算子 $B^{\rho,\alpha}$ 的 L^p 有界性完全取决于函数 $(1 - |x|^\rho)_+^\alpha$, 因此, 对 $(1 - |x|^\rho)_+^\alpha$ 进行深入研究在理论上是很有意义的.

1956 年, Stein [6] 在 $\rho = 2$ 的特殊情形下, 研究了这个问题, 得到下面的结果.

当 $\rho = 2, 1 < p < \infty$ 且

$$\alpha > (n-1) \left| \frac{1}{p} - \frac{1}{2} \right|$$

时, 则

$$(1 - |x|^2)_+^\alpha \in \mathfrak{M}_p(\mathbb{R}^n).$$

Fefferman [7] 考虑 $\rho = 2$ 的情形, 进一步得到, 若

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{p} - \frac{1}{2} \right| &> \frac{n+1}{4n}, \\ \alpha &> \max \left(0, n \left| \frac{1}{p} - \frac{1}{2} \right| - \frac{1}{2} \right), \end{aligned} \quad (1.4)$$

则

$$(1 - |x|^2)_+^\alpha \in \mathfrak{M}_p(\mathbb{R}^n). \quad (1.5)$$

文献 [7] 的结果表明, 条件 (1.4) 是结论 (1.5) 成立的充分条件之一. 随后, Fefferman [8] 又进一步证明, 条件 (1.4) 是 (1.5) 成立的必要条件. 其结果如下.

设 $p \neq 2$, 若 $(1 - |x|^2)_+^\alpha \in \mathfrak{M}_p(\mathbb{R}^n)$, 则

$$\alpha > \max \left(0, n \left| \frac{1}{p} - \frac{1}{2} \right| - \frac{1}{2} \right).$$

特别地, 当 $n = 2$ 时, Carleson-Sjölin [9] 证明了, 若

$$\alpha > \max \left(0, n \left| \frac{1}{p} - \frac{1}{2} \right| - \frac{1}{2} \right),$$

则 (1.5) 成立. 这表明, 当 $n = 2$ 时, 条件 (1.4) 是 (1.5) 成立的充要条件.

对于 $0 < p < 1$ 的情形, 文献 [10, 11] 分别独立地得到了下面的结果: 若 $\alpha > \frac{n}{p} - \frac{n+1}{2}$, 则 $(1 - |x|^2)_+^\alpha \in \mathfrak{M}\{H^p\}$ 成立.

我们注意到文献 [10, 11] 考虑了 $\rho = 2$ 的情形. 对于 $\rho \neq 2$ 的情形, 陆善镇 [12] 得到了一个深刻而有趣的结果, 直接回答了为什么只需考虑 $\rho = 2$ 这种情形即可. 文献 [12] 的结论是, 若 $(1 - |x|^2)_+^\alpha \in \mathfrak{M}\{H^p\}$, 则当 $\rho > 0$ 时, $(1 - |x|^\rho)_+^\alpha \in \mathfrak{M}\{H^p\}$.

对于 $1 < p < \infty$ 的情形, 已有的结果主要考虑 $\rho = 2$ 的情形. 受到文献 [12] 启发, 对于 $\rho \neq 2$ 的情形, 是否也有下面的结论.

若 $\rho > 0$, 且 $(1 - |x|^\rho)_+^\alpha \in \mathfrak{M}_p(\mathbb{R}^n)$, 则 $(1 - |x|^2)_+^\alpha \in \mathfrak{M}_p(\mathbb{R}^n)$ 成立.

进一步, 对于任意的 $\rho_1 > 0, \rho_2 > 0$ 和 $\alpha > 0$, 下面的结论 (1.6) 成立吗?

$$(1 - |x|^{\rho_1})_+^\alpha \in \mathfrak{M}_p(\mathbb{R}^n) \Leftrightarrow (1 - |x|^{\rho_2})_+^\alpha \in \mathfrak{M}_p(\mathbb{R}^n). \quad (1.6)$$

同样的问题是, 对于 Hardy 空间上的乘子, 上述结论成立吗?

本文回答这些问题, 得到主要结果:

定理 4 对于 $1 \leq p \leq \infty$. 若 $\rho_1 > 0, \rho_2 > 0$ 且 $\alpha > 0$, 则

$$(1 - |x|^{\rho_1})_+^\alpha \in \mathfrak{M}_p(\mathbb{R}^n) \Leftrightarrow (1 - |x|^{\rho_2})_+^\alpha \in \mathfrak{M}_p(\mathbb{R}^n).$$

定理 5 对于 $0 < p \leq 1$. 若 $\rho_1 > 0, \rho_2 > 0$ 且 $\alpha > 0$, 则

$$(1 - |x|^{\rho_1})_+^\alpha \in \mathfrak{M}\{H^p\} \Leftrightarrow (1 - |x|^{\rho_2})_+^\alpha \in \mathfrak{M}\{H^p\},$$

其中, $\mathfrak{M}\{H^p\}$ 表示 $H^p(\mathbb{R}^n)$ 上的乘子空间.

我们用 $\mathcal{F}$ 来表示 Fourier 变换, 即

$$\mathcal{F}f(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{-2\pi i x \cdot \xi} dx,$$

其中, $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

在本文中, 记 S 是一个函数空间, $\mathcal{F}S$ 表示线性空间 $\{\mathcal{F}f : f \in S\}$. 如果需要的话, $\mathcal{F}f$ 可以理解为分布意义下的 Fourier 变换. 关于乘子的其他结果及背景可参见文献 [14–20].

2 主要引理

为了证明定理的需要, 我们先给出几个引理.

引理 6 对于任意的 $\lambda > 0$, 则 $e^{-|x|^\lambda} \in \mathcal{F}L^1(\mathbb{R}^n)$ 成立, 即 $e^{-|x|^\lambda}$ 是某个 $L^1(\mathbb{R}^n)$ 函数的 Fourier 变换.

证明 首先考虑 $\lambda > n+1$ 的情形. 利用 Taylor 展开可以得到

$$e^{-|x|^\lambda} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} |x|^{\lambda k},$$

从而, 当 $|x| \rightarrow 0$, 可得到

$$e^{-|x|^\lambda} - 1 = o(|x|^{n+1}).$$

因此, 对任意满足 $|\alpha| \leq n+1$ 的多重指标 α , 容易得到

$$\lim_{|x| \rightarrow 0} \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^\alpha (e^{-|x|^\lambda} - 1) = 0.$$

将 $e^{-|x|^\lambda}$ 的 Fourier 变换记为 f_λ , 即

$$f_\lambda(x) = \widehat{e^{-|\cdot|^\lambda}}(x).$$

利用分部积分可以得到

$$\begin{aligned} (2\pi i x_i)^{n+1} f_\lambda(x) &= (-1)^{n+1} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|y|^\lambda} \left(\frac{\partial}{\partial y_i} \right)^{n+1} e^{-2\pi i x \cdot y} dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{\partial}{\partial y_i} \right)^{n+1} e^{-|y|^\lambda} e^{-2\pi i x \cdot y} dy, \end{aligned}$$

其中, $i = 1, 2, \dots, n$.

将 n 个等式两边同时取绝对值并且相加, 就可得到下面不等式:

$$|f_\lambda(x)|(2\pi)^{n+1} \sum_{i=1}^n |x_i|^{n+1} \leq \sum_{i=1}^n \int_{\mathbb{R}^n} \left| \left(\frac{\partial}{\partial y_i} \right)^{n+1} e^{-|y|^\lambda} \right| dy. \quad (2.1)$$

对任意 $x \in \mathbb{R}^n$, 显然存在常数 C , 使得

$$\frac{1}{C} |x|^{n+1} \leq \sum_{i=1}^n |x_i|^{n+1} \leq C |x|^{n+1} \quad (2.2)$$

成立. 由 (2.1) 和 (2.2) 可以得到

$$|x|^{n+1} |f_\lambda(x)| \leq C \sum_{i=1}^n \int_{\mathbb{R}^n} \left| \left(\frac{\partial}{\partial y_i} \right)^{n+1} e^{-|y|^\lambda} \right| dy. \quad (2.3)$$

此外, 由 Fourier 变换的定义, 可立即推出

$$|f_\lambda(x)| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |e^{-|y|^\lambda}| dy. \quad (2.4)$$

由 (2.3) 和 (2.4), 我们可以得到

$$|f_\lambda(x)| \leq \frac{C}{1 + |x|^{n+1}} \left(\sum_{i=1}^n \int_{\mathbb{R}^n} \left| \left(\frac{\partial}{\partial y_i} \right)^{n+1} e^{-|y|^\lambda} \right| dy + \int_{\mathbb{R}^n} |e^{-|y|^\lambda}| dy \right).$$

由于

$$\frac{1}{1 + |x|^{n+1}} \in L^1(\mathbb{R}^n),$$

从而易知,

$$f_\lambda(x) \in L^1(\mathbb{R}^n).$$

下面讨论 $0 < \lambda \leq n+1$ 的情形.

对于 $\beta > 0$, 我们将用到以下递推关系式:

$$e^{-\beta} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}} e^{-\frac{\beta^2}{4u}} du.$$

该公式在计算 Poisson 核的 Fourier 变换时有用, 其证明可以参见文献 [13, 第 1 章]. 我们将利用此递推关系来证明我们的论述在 $0 < \lambda \leq n+1$ 也是成立的. 利用 Fubini 定理, 经过简单计算可得

$$\begin{aligned} f_{\frac{\lambda}{2}}(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|y|^{\frac{\lambda}{2}}} e^{-2\pi i x \cdot y} dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}^n} \int_0^\infty \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}} e^{-\frac{|y|^\lambda}{4u}} e^{-2\pi i x \cdot y} du dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|y|^\lambda}{4u}} e^{-2\pi i x \cdot y} dy du \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}} (4u)^{\frac{n}{\lambda}} f_\lambda((4u)^{\frac{1}{\lambda}} x) du. \end{aligned}$$

我们来计算 $\|f_{\frac{\lambda}{2}}\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}$,

$$\begin{aligned}\|f_{\frac{\lambda}{2}}\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} &\leq \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}^n} \int_0^\infty \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}} (4u)^{\frac{n}{2}} |f_\lambda((4u)^{\frac{1}{2}}x)| du dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}} (4u)^{\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} |f_\lambda((4u)^{\frac{1}{2}}x)| dx du \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \|f_\lambda\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \int_0^\infty \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}} du \\ &= \|f_\lambda\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}.\end{aligned}$$

由此我们可以看出, $f_\lambda \in L^1(\mathbb{R}^n)$ 蕴涵 $f_{\frac{\lambda}{2}} \in L^1(\mathbb{R}^n)$. 而上面已经证明了命题对 $\lambda > n+1$ 时是成立的. 于是, $f_\lambda \in L^1(\mathbb{R}^n)$ 对所有 $\lambda > 0$ 均成立. 由 Fourier 变换的反演定理即可推出我们的结论成立. $\square$

引理 7 若对任意 $\rho > 0, \alpha > 0$, 则 $(1 + |x|^\rho)^{-\alpha} \in \mathcal{FL}^1(\mathbb{R}^n)$ 成立.

证明 记 $J_{\rho,\alpha}$ 为 $(1 + |x|^\rho)^{-\alpha}$ 在分布意义下的 Fourier 变换, 即对于任意的 $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$,

$$\langle J_{\rho,\alpha}, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |y|^\rho)^{-\alpha} \hat{\varphi}(y) dy.$$

利用以下公式:

$$(1 + |x|^\rho)^{-\alpha} = C_\alpha \int_0^\infty e^{-(1+|x|^\rho)t} t^\alpha \frac{dt}{t},$$

其中, C_α 满足

$$C_\alpha \int_0^\infty e^{-t} t^{\alpha-1} dt = 1.$$

对于 $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, 则

$$\begin{aligned}\langle J_{\rho,\alpha}, \varphi \rangle &= \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |x|^\rho)^{-\alpha} \hat{\varphi}(x) dx \\ &= C_\alpha \int_{\mathbb{R}^n} \int_0^\infty e^{-(1+|x|^\rho)t} t^\alpha \hat{\varphi}(x) \frac{dt}{t} dx \\ &= C_\alpha \int_0^\infty t^\alpha e^{-t} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|x|^\rho t} \hat{\varphi}(x) dx \frac{dt}{t} \\ &= C_\alpha \int_0^\infty e^{-t} t^{-\frac{n}{\rho}} t^\alpha \int_{\mathbb{R}^n} f_\rho(t^{-\frac{1}{\rho}}x) \varphi(x) dx \frac{dt}{t} \\ &= C_\alpha \int_{\mathbb{R}^n} \int_0^\infty e^{-t} t^{-\frac{n}{\rho}} t^\alpha f_\rho(t^{-\frac{1}{\rho}}x) \frac{dt}{t} \varphi(x) dx,\end{aligned}\tag{2.5}$$

其中, f_ρ 表示函数 $e^{-|x|^\rho}$ 的 Fourier 变换.

由 (2.5) 可以推出

$$J_{\rho,\alpha}(x) = C_\alpha \int_0^\infty e^{-t} t^{-\frac{n}{\rho}} f_\rho(t^{-\frac{1}{\rho}}x) t^\alpha \frac{dt}{t}.$$

此外, 由引理 6 可知, $f_\rho \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

简单的计算可以得到

$$\|J_{\rho,\alpha}\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} = C_\alpha \int_{\mathbb{R}^n} \left| \int_0^\infty e^{-t} t^{-\frac{n}{\rho}} f_\rho(t^{-\frac{1}{\rho}}x) t^\alpha \frac{dt}{t} \right| dx$$

$$\begin{aligned}
&\leq C_\alpha \int_{\mathbb{R}^n} \int_0^\infty e^{-t} t^{-\frac{n}{\rho}} |f_\rho(t^{-\frac{1}{\rho}}x)| t^\alpha \frac{dt}{t} dx \\
&= C_\alpha \int_0^\infty e^{-t} t^\alpha \frac{dt}{t} \|f_\rho\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \\
&= \|f_\rho\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}.
\end{aligned}$$

由于 $f_\rho \in L^1(\mathbb{R}^n)$, 从而得到 $J_{\rho,\alpha} \in L^1(\mathbb{R}^n)$. 再由 Fourier 变换的反演定理即可得需要的结果. $\square$

3 定理的证明

定理 4 的证明. 由对称性, 只需给出一边的蕴含关系即可.

若 $(1 - |x|^{\rho_1})_+^\alpha \in \mathfrak{M}_p(\mathbb{R}^n)$, 选取正整数 k 使得

$$2^k \rho_2 > \max\{n+1, \rho_1\}. \quad (3.1)$$

选取函数 $\psi \in C_c^\infty$ 满足

$$\psi(x) = \begin{cases} 1, & \text{当 } \frac{2}{3} \leq |x| \leq \frac{5}{3}, \\ 0, & \text{当 } |x| < \frac{1}{2} \text{ 或 } |x| > 2, \end{cases}$$

则有如下分解:

$$(1 - |x|^{2^k \rho_2})_+^\alpha = \left(\frac{1 - |x|^{2^k \rho_2}}{1 - |x|^{\rho_1}} \right)^\alpha \psi(x) (1 - |x|^{\rho_1})_+^\alpha + (1 - |x|^{2^k \rho_2})_+^\alpha (1 - \psi(x)). \quad (3.2)$$

先来说明下面的这个结论成立,

$$\left(\frac{1 - |x|^{2^k \rho_2}}{1 - |x|^{\rho_1}} \right)^\alpha \psi(x) \in C_c^\infty.$$

这个函数的奇性只可能出现在球面 $|x| = 1$ 之上.

下面证明它在 $|x| = 1$ 上及附近是光滑的.

对于 $\theta \geq 1$, 令

$$F(t) = \frac{1 - t^\theta}{1 - t},$$

用数学分析的基本知识容易证明 F 在 $\mathbb{R}^+ = (0, \infty)$ 上是光滑函数, 特别在 $t = 1$ 处是无穷次可微的.

令 $\theta = \frac{2^k \rho_2}{\rho_1}$. 由不等式 (3.1) 可知, $\theta > 1$. 由函数 ψ 的定义可知,

$$\text{supp} \psi \subset \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \frac{1}{2} \leq |x| \leq 2 \right\},$$

并且 ψ 是 C^∞ 函数. 因此, 显然可得到 $(F(|x|^{\rho_1}))^\alpha \psi(x)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的 C_c^∞ 函数, 当然也是 Schwartz 速降函数. 从而,

$$(F(|x|^{\rho_1}))^\alpha \psi(x) \in \mathcal{FL}^1(\mathbb{R}^n).$$

众所周知, Schwartz 函数是 L^p 乘子函数. 所以,

$$\left(\frac{1 - |x|^{2^k \rho_2}}{1 - |x|^{\rho_1}} \right)^\alpha \psi(x) \in \mathfrak{M}_p(\mathbb{R}^n).$$

由假设可知,

$$(1 - |x|^{\rho_1})_+^\alpha \in \mathfrak{M}_p(\mathbb{R}^n).$$

由 $\mathfrak{M}_p(\mathbb{R}^n)$ 的性质 I, 可得

$$\left(\frac{1 - |x|^{2^k \rho_2}}{1 - |x|^{\rho_1}} \right)^\alpha \psi(x) (1 - |x|^{\rho_1})_+^\alpha \in \mathfrak{M}_p(\mathbb{R}^n). \quad (3.3)$$

又由 $2^k \rho_2 > n + 1$, 得出

$$(1 - |x|^{2^k \rho_2})_+^\alpha (1 - \psi(x)) \in C_c^{n+1}(\mathbb{R}^n).$$

事实上, 由函数 ψ 的定义, 很容易得到

$$\text{supp}((1 - |x|^{2^k \rho_2})_+^\alpha (1 - \psi(x))) \subset \left\{ x \in \mathbb{R}^n : 0 \leq |x| \leq \frac{2}{3} \right\}. \quad (3.4)$$

利用分部积分, 很容易计算出 $C_c(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{FL}^1(\mathbb{R}^n)$. 因此,

$$(1 - |\cdot|^{2^k \rho_2})_+^\alpha (1 - \psi(\cdot)) \in \mathfrak{M}_p(\mathbb{R}^n). \quad (3.5)$$

因此, 由 (3.2)、(3.3) 和 (3.5), 我们得到

$$(1 - |x|^{2^k \rho_2})_+^\alpha \in \mathfrak{M}_p(\mathbb{R}^n). \quad (3.6)$$

由分解因式可得到

$$(1 - |x|^{2^{k-1} \rho_2})_+^\alpha = (1 + |x|^{2^{k-1} \rho_2})^{-\alpha} (1 - |x|^{2^k \rho_2})_+^\alpha. \quad (3.7)$$

利用引理 7 得到

$$(1 + |x|^{2^{k-1} \rho_2})^{-\alpha} \in \mathfrak{M}_p(\mathbb{R}^n). \quad (3.8)$$

因此, 由 (3.5)–(3.7), 再结合乘子性质 I, 我们得到

$$(1 - |x|^{2^{k-1} \rho_2})_+^{-\alpha} \in \mathfrak{M}_p(\mathbb{R}^n). \quad (3.9)$$

用相同的方法, 我们可以得到

$$(1 - |x|^{2^{k-2} \rho_2})_+^\alpha \in \mathfrak{M}_p(\mathbb{R}^n), \quad \dots, \quad (1 - |x|^{\rho_2})_+^\alpha \in \mathfrak{M}_p(\mathbb{R}^n)$$

成立.

至此, 我们完成了定理 4 的证明. $\square$

定理 5 的证明 定理 5 的证明与定理 4 的证明有许多相同之处, 在这里, 我们只把不同的写出来. 设 $(1 - |x|^{\rho_1})_+^\alpha \in \mathfrak{M}\{H^p\}$. 下面来证明 $(1 - |x|^{\rho_2})_+^\alpha \in \mathfrak{M}\{H^p\}$.

选取正整数 k 使得

$$2^k \rho_2 > \left[n \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{2} \right) \right] + 1. \quad (3.10)$$

对于分解式 (3.2), 为了简洁, 令

$$H_1(x) = (1 - |x|^{2^k \rho_2})_+^\alpha (1 - \psi(x)), \quad H_2(x) = \left(\frac{1 - |x|^{2^k \rho_2}}{1 - |x|^{\rho_1}} \right)^\alpha \psi(x).$$

由 (3.4) 可知,

$$\operatorname{supp} H_1 \subset \left\{ x \in \mathbb{R}^n : 0 \leq |x| \leq \frac{2}{3} \right\},$$

且 $H_1 \in C_c^l(\mathbb{R}^n)$, 其中, $l = [n(\frac{1}{p} - \frac{1}{2})] + 1$.

容易验证函数 H_1 满足定理 C 中的条件, 因此, $H_1 \in \mathfrak{M}\{H^p\}$.

对 H_2 而言, 由于 ψ 支在环 $\{x \in \mathbb{R}^n : \frac{1}{2} \leq |x| \leq 2\}$ 上, 由定理 C 立刻推出 $H_2 \in \mathfrak{M}\{H^p\}$.

显然, 容易验证 Hardy 空间上的乘子在点态乘积意义下也是封闭的, 所以

$$H_2(x)(1 - |x|^{\rho_1})_+^\alpha \in \mathfrak{M}\{H^p\},$$

即

$$\left(\frac{1 - |x|^{2^k \rho_2}}{1 - |x|^{\rho_1}} \right)^\alpha \psi(x)(1 - |x|^{\rho_1})_+^\alpha \in \mathfrak{M}\{H^p\}$$

成立.

于是, 我们可以得到

$$(1 - |x|^{2^k \rho_2})_+^\alpha \in \mathfrak{M}\{H^p\}. \quad (3.11)$$

注意到, 当 $\rho > 0$ 和 $\alpha > 0$ 时, 容易验证函数 $(1 + |x|^\rho)^{-\alpha}$ 对 $|\gamma| \leq l$ 的多重指标 γ , 满足定理 D 中的估计 (1.1), 故

$$(1 + |x|^\rho)^{-\alpha} \in \mathfrak{M}\{H^p\}. \quad (3.12)$$

于是, 应用与定理 4 相同的方法, 我们得到 $(1 - |x|^{\rho_2})_+^\alpha \in \mathfrak{M}\{H^p\}$. 至此, 定理 5 证毕. $\square$

4 一些应用

下面给出本文主要定理的直接应用.

由定理 4, 再结合文献 [7–9], 立刻推出推论 8 和 9.

推论 8 设 $1 < p < \infty$ 且 $\rho > 0$. 若

$$\left| \frac{1}{p} - \frac{1}{2} \right| > \frac{n+1}{4n}, \quad \alpha > \max \left(0, n \left| \frac{1}{p} - \frac{1}{2} \right| - \frac{1}{2} \right),$$

则广义 Bochner-Riesz 平均乘子算子 $\widehat{B^{\rho, \alpha} f}(x) = (1 - |x|^\rho)_+^\alpha \hat{f}(x)$ 在 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 上是有界的.

推论 9 设 $p \neq 2$. 若存在某个 $\rho > 0$, 满足 $(1 - |x|^\rho)_+^\alpha \in \mathfrak{M}_p(\mathbb{R}^n)$, 则

$$\alpha > \max \left(0, n \left| \frac{1}{p} - \frac{1}{2} \right| - \frac{1}{2} \right).$$

特别地, 当 $n = 2$ 时, 对任意给定的 $\rho > 0$, $(1 - |x|^\rho)_+^\alpha \in \mathfrak{M}_p(\mathbb{R}^n)$ 成立的充要条件是

$$\alpha > \max \left(0, n \left| \frac{1}{p} - \frac{1}{2} \right| - \frac{1}{2} \right).$$

下面考虑这两个乘子:

$$\widehat{T_\lambda f}(x) = e^{-|x|^\lambda} \hat{f}(x), \quad (4.1)$$

$$\widehat{T_{\alpha, \rho} f}(x) = (1 + |x|^\rho)^{-\alpha} \hat{f}(x). \quad (4.2)$$

应用引理 6、7 和定理 5, 可得到下面两个推论.

推论 10 设 $\lambda > 0$, 则由 (4.1) 定义的算子 T_λ 在 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 上是有界的, 其中, $1 \leq p \leq \infty$.

推论 11 对任意 $\rho > 0, \alpha > 0$, 则下面两个结论成立:

(I) 由 (4.2) 定义的算子 $T_{\alpha,\rho}$ 在 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 上是有界的, 其中, $1 \leq p \leq \infty$;

(II) 由 (4.2) 定义的算子 $T_{\alpha,\rho}$ 在 $H^p(\mathbb{R}^n)$ 上是有界的, 其中, $0 < p \leq 1$.

参考文献

- 1 Hörmander L. Estimates for translation invariant operators in L^p spaces. *Acta Math*, 1960, 104: 93–139
- 2 Calderón A P, Torchinsky A. Parabolic maximal functions associated with a distribution, II. *Adv Math*, 1977, 24: 101–171
- 3 Taibleson M H, Weiss G. The molecular characterization of certain Hardy spaces. *Asterisque*, 1980, 77: 67–149
- 4 Lu S Z. *Four Lectures on Real H^p Spaces*. Singapore: World Scientific, 1995
- 5 Grafakos L. *Classical and Modern Fourier Analysis*. Beijing: China Machine Press, 2006
- 6 Stein E M. Interpolation of linear operators. *Trans Amer Math Soc*, 1956, 83: 482–492
- 7 Fefferman C. Inequalities for strongly singular convolution operators. *Acta Math*, 1970, 124: 9–36
- 8 Fefferman C. The multiplier problem for the ball. *Ann Math*, 1971, 94: 330–336
- 9 Carleson L, Sjölin P. Oscillatory integrals and a multiplier problem for the disc. *Studia Math*, 1972, 44: 287–299
- 10 Stein E M, Taibleson M H, Weiss G. Weak-type estimates for maximal operators on certain H^p spaces. *Rend Circ Mat Palermo (2) Suppl*, 1981, 1: 81–97
- 11 Sjölin P. Convolution with oscillating kernels on H^p spaces. *J Lond Math Soc (2)*, 1981, 23: 442–454
- 12 Lu S Z. Decomposition of kernel and maximal generalized Bochner-Riesz means. *Chinese Quart J Math*, 1989, 4: 16–23
- 13 Stein E M, Weiss G. *Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces*. Princeton, NJ: Princeton University Press, 1971
- 14 Baernstein A, Sawyer E T. Embedding and multiplier theorems for $H^p(\mathbb{R}^n)$. *Mem Amer Math Soc*, 1985, 59: 1–82
- 15 Bochner S. Summation of multiple Fourier series by spherical means. *Trans Amer Math Soc*, 1936, 40: 175–207
- 16 陆善镇. 乘子与 Herz 型空间. *中国科学 A 辑*, 2008, 38: 601–619
- 17 Lu S Z, Yan D Y. *Bochner-Riesz Means on Euclidean Spaces*. Singapore: World Scientific, 2013
- 18 Stein E M. Localization and summability of multiple Fourier series. *Acta Math*, 1958, 100: 93–147
- 19 Stein E M. On certain exponential sums arising in multiple Fourier series. *Ann Math*, 1961, 73: 87–109
- 20 谢林森, 兰家诚, 蓝森华, 等. Herz 型 Hardy 空间上乘子算子的 Jackson 型和 Bernstein 型不等式. *中国科学 A 辑*, 2008, 38: 885–896

The equivalence of a class of generalized Bochner-Riesz multipliers and its applications

SHI ZuoShunHua, NIE XuDong, WU Di & YAN DunYan

Abstract We consider the following two functions, $(1 - |x|^{\rho_1})_+^\alpha$ and $(1 - |x|^{\rho_2})_+^\alpha$ which are called the generalized Bochner-Riesz multipliers, where ρ_1, ρ_2 and α are positive real numbers. We shall prove that, as the multiplier operators with respect to the two functions, their L^p -boundedness and H^p -boundedness are equivalent for any ρ_1, ρ_2 and fixed α .

Keywords Bochner-Riesz multiplier, L^p multiplier, H^p multiplier, equivalence property

MSC(2010) 42B15, 42B35

doi: 10.1360/N012013-00145