

通货膨胀风险下关于累积阶段的固定缴费养老金的均值 - 方差问题

献给王梓坤教授 90 华诞

张笑怡, 郭军义*

南开大学数学科学学院, 天津 300071

E-mail: zhangxiaoyi19902@163.com, jyguo@nankai.edu.cn

收稿日期: 2018-03-02; 接受日期: 2018-10-16; 网络出版日期: 2019-02-22; * 通信作者

国家自然科学基金 (批准号: 11571189) 和中央高校基本科研业务费专项资金 (批准号: 63185019) 资助项目

摘要 本文研究了在通货膨胀环境下关于累积阶段的固定缴费 (defined contribution, DC) 养老金的一个均值 - 方差问题. 一般来说, DC 养老金的管理周期比较长, 所以, 本文考虑了养老金的实际财富过程, 而非名义财富过程, 并且假设价格指数的动态过程包含一个跳 - 扩散过程. 通过投资金融市场上的三种产品 (无风险银行账户、通胀指数债券和风险资产), 该 DC 养老金最优管理的目标是在给定期望的前提下最小化终端时间的方差. 风险资产同样包含一个跳 - 扩散过程. 通过解相关的 Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB) 方程, 本文得到了最优的投资策略以及相关的有效前沿的显式表达.

关键词 Poisson 过程 DC 养老金 随机最优控制 均值 - 方差问题 HJB 方程

MSC (2010) 主题分类 97M30, 93E20

1 引言

为了重新安排退休之前和退休之后的收入以及支出, 并支持退休之后的消费, 养老金越来越成为一种很重要的金融工具. 通常有两种经典的养老金类型: 固定缴费 (DC) 养老金和固定收益 (defined benefit, DB) 养老金. 在前者中, 费用是在合同之中确定的, 而收益则根据费用的多少以及投资的收益而定. 在后者中恰恰相反, 收益明确在合同中给出, 而费用则根据收益的多少确定. 关于 DC 和 DB 养老金的随机最优控制问题的研究, 可以分别参见文献 [1, 2].

从积存的角度可以把养老金的管理分成另外两类: 现收现付 (pay as you go, PAYG) 和积存 (funding). 在前者中, 新一代基金参与者所缴纳的费用, 被用作上一代基金参与者的收益而派发出去. 在后者中却不然, 某一个群体所缴纳的费用, 被用于投资, 并在该群体退休的时候以收益的形式返还给该

英文引用格式: Zhang X Y, Guo J Y. Dynamic mean-variance problem for defined contribution pension fund under inflation (in Chinese). *Sci Sin Math*, 2019, 49: 607-620, doi: 10.1360/N012018-00045

群体, 而并非用于给另一个群体派发收益. 关于对现收现付和积存两类养老金的最优投资和最优管理问题, 可分别参见文献 [3, 4].

通常来说, 养老金计划包括两个阶段: 累积阶段和分配阶段. 前者一般是从参与养老金计划开始, 到退休为止; 后者一般是从退休开始, 到参与者死亡为止. 在累积阶段, 有很多学者研究了养老金的最优管理和最优投资问题. 例如, Han 和 Hung^[1] 通过应用动态规划原理, 解决了一个有下界保护的最优投资问题. Chen 等^[5] 通过应用鞅方法, 解决了一个密切关注通货膨胀风险的养老金计划的最优投资问题.

通货膨胀风险越来越引起实践领域和学术领域的关注. 通常来说, 由于养老金的管理分布在很长的时间区间之内, 所以, 长时间来看, 忽略通胀因素是不科学的. 在 DC 养老金的管理中, 通过考虑被通胀因素影响的实际财富过程, Yao 等^[6] 解决了一个关于最优投资的均值 - 方差问题.

通胀指数债券是一种很有力的用以对冲通胀风险的工具. 从一个家庭的角度来说, 通过对通胀指数债券的投资, Liang 和 Zhao^[7] 研究了一个均值 - 方差问题的最优投资组合以及相应的有效前沿. 类似地, Pan 和 Xiao^[8] 处理了一个最优资产 - 债务问题. 以上两篇文献都考虑了实际财富过程, 而非简单的名义财富过程.

针对累积阶段的 DC 养老基金, 并考虑通货膨胀风险, 本文考虑一个最优均值 - 方差下的最优投资组合问题. 在已有的研究中, 一般假设价格指数包含一个漂移 Brown 运动. 为了反映价格指数当中突然出现的震动, 我们对文献 [9] 所给出的模型做了进一步的修正, 新的模型包含了由 Poisson 过程所刻画的跳. 也就是说, 我们在本文中用一个跳 - 扩散模型来模拟价格指数过程. 相应地, 关于通胀指数债券的价格过程也做了调整. 本文假设通胀指数债券的价格过程也包含一个 Poisson 跳.

提及风险资产, 跳 - 扩散过程已经被广泛应用到了最优投资组合理论之中. Merton^[10] 在最优动态投资组合问题中使用了 Poisson 过程来表示风险资产的价格中突然出现的跳. 在 DC 养老金的最优管理中, Sun 等^[11] 应用了跳 - 扩散过程, 但是仅仅得到了初始时刻的最优投资策略, 却不能随着时间的推移得到更新. 在 DB 养老金的管理中, Ngwira 和 Gerrard^[12] 也用跳 - 扩散过程来描述风险资产, 并得到了最优费用和最优的投资权重. 更进一步, Delong 等^[13] 假设了股票的过程受到 Lévy 噪声的干扰. 在本文中, 我们也对用跳 - 扩散过程所描述的风险资产感兴趣, 并将之作为投资的对象之一.

本文余下内容的结构如下: 第 2 节描述了随机利率和符合跳 - 扩散过程的价格指数过程, 并描述了由三个金融产品 (银行账户、通胀指数债券和股票) 组成的金融市场. 第 3 节考虑了一个针对累积阶段的 DC 养老金的最优均值 - 方差问题. 通过应用 Lagrange 方法和动态规划原理, 找到了最优投资组合的显式表达. 第 4 节得到了有效策略和有效前沿. 第 5 节给出了相关的经济意义和结论.

2 模型和符号

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 是一个概率空间, \mathbb{P} 是 Ω 上的概率测度. 令滤波 $\mathcal{F} = \mathcal{F}^B \vee \mathcal{F}^N$, 其中 $\mathcal{F}^B = \{\mathcal{F}_t^B\}_{t \geq 0}$ 由 Brown 运动 B_r 、 B_Π 和 B_S 所生成, 即

$$\mathcal{F}_t^B = \sigma\{(B_r(s), B_\Pi(s), B_S(s)); 0 \leq s \leq t\}, \quad t \geq 0.$$

$\mathcal{F}^N = \{\mathcal{F}_t^N\}_{t \geq 0}$ 由 Poisson 过程 N_Π 和 N_S 所生成, 即

$$\mathcal{F}_t^N = \sigma\{(N_\Pi(s), N_S(s)); 0 \leq s \leq t\}, \quad t \geq 0.$$

假设 B_r 与 B_Π 相关, 相关系数 $\rho(t) \in [-1, 1]$ 是一个时间的确定性函数. 假设其他的 Brown 运动之间相互独立. N_Π 和 N_S 的强度分别是 $\lambda_\Pi \in \mathbb{R}_+$ 和 $\lambda_S \in \mathbb{R}_+$. 假设 N_Π 与 N_S 相互独立, 并假设在此空间上, Brown 运动与 Poisson 过程相互独立.

利率过程 $r(t)$ 满足

$$dr(t) = (a - br(t))dt + \sigma_r dB_r(t), \quad (2.1)$$

初始值为 $r(0) = r_0$. 这种均值回归形式的利率模型由 Vasicek^[14] 所提出, 其中 a 和 b 是正的常数. $\sigma_r \in \mathbb{R}_+$ 表示波动.

价格指数 $\Pi(t)$ 由一个跳 - 扩散过程所描述:

$$d\Pi(t) = \Pi(t)\mu_\Pi dt + \Pi(t)\sigma_\Pi dB_\Pi(t) + \Pi(t-)\eta_\Pi dN_\Pi(t), \quad (2.2)$$

初始值 $\Pi(0) = \Pi_0$, 其中 $\mu_\Pi \in \mathbb{R}_+$ 表示常平均通胀率; σ_Π 是常波动率; η_Π 表示跳的大小, 并满足 $\eta_\Pi \geq -1$. 在市场上, 由于价格指数和利率通常是密切相关的, 所以, 本文假设 Brown 运动 B_r 与 B_Π 是相关的.

市场上包含以下三种我们感兴趣的资产. 假设在该市场上没有交易费用, 也没有税收.

(1) 银行账户 $S_0(t)$:

$$\frac{dS_0(t)}{S_0(t)} = r(t)dt, \quad (2.3)$$

初始值为 $S_0(0) = 1$.

(2) 根据文献 [9], 假设通胀指数债券满足方程

$$\frac{dI(t)}{I(t-)} = r(t)dt + \frac{d\Pi(t)}{\Pi(t-)} = (r(t) + \mu_\Pi)dt + \sigma_\Pi dB_\Pi(t) + \eta_\Pi dN_\Pi(t), \quad (2.4)$$

初始值为 $I(0) = I_0$.

(3) 风险资产:

$$\frac{dS(t)}{S(t-)} = \mu_S(r(t))dt + \sigma_S dB_S(t) + \eta_S dN_S(t), \quad (2.5)$$

初始值为 $S(0) = S_0$, 其中 $\mu_S(r) = r + \xi$ 是平均收益率, $\xi \in \mathbb{R}_+$ 是所期望的风险溢价, σ_S 是常波动率, $\eta_S (\geq -1)$ 表达跳的大小.

参见文献 [15], 令 θ 为对应于跳 - 扩散模型的 Sharpe 比率, 则 θ 有如下的表达式:

$$\theta = \frac{\xi + \lambda_S \eta_S}{\sqrt{\sigma_S^2 + \lambda_S \eta_S^2}}. \quad (2.6)$$

假设 $\mu + \lambda_S \eta_S > r$. 在此假设之下, 风险资产对投资者是有吸引力的.

3 最优投资问题

在累积阶段的 DC 养老金管理中, 考虑一个最优的投资组合问题. 令 $C(t)$ 为 t 时刻累积的所缴纳的费用:

$$dC(t) = \Pi(t)c(t)dt, \quad (3.1)$$

其中 $c(t)$ 是时间 t 的一个确定性的函数.

该养老金管理者决定投资于三种不同资产的资金比例, 我们的目的是找到最优的投资方案. 综合考虑投资权重和所缴纳的费用, 我们有以下的财富过程:

$$dX(t) = X(t)(1 - u_I(t) - u_S(t)) \frac{dS_0(t)}{S_0(t)} + X(t)u_I(t) \frac{dI(t)}{I(t-)} + X(t)u_S(t) \frac{dS(t)}{S(t-)} + dC(t), \quad (3.2)$$

初始值

$$X(0) = X_0 > 0.$$

$u_I(t)$ 和 $u_S(t)$ 是 t 时刻分别投资于通胀指数债券和股票的权重. 剩下的 $1 - u_I(t) - u_S(t)$ 则是投资于银行账户中的权重. 假设在我们的市场中, 持有空头和持有多头都是允许的.

将 (2.3)–(2.5) 和 (3.1) 代入 (3.2), 可得

$$\begin{aligned} dX(t) = & [X(t)[r(t) + u_I(t)\mu_\Pi + u_S(t)(\mu_S(r(t)) - r(t))] + \Pi(t)c(t)]dt \\ & + X(t)u_I(t)\sigma_\Pi dB_\Pi(t) + X(t)u_S(t)\sigma_S dB_S(t) \\ & + X(t-)u_I(t)\eta_\Pi dN_\Pi(t) + X(t-)u_S(t)\eta_S dN_S(t). \end{aligned} \quad (3.3)$$

令 $u(t) = (u_I(t), u_S(t))$. 假设 $u(t)$ 是 \mathcal{F}_t 可测的, 并且满足

$$\mathbb{E} \left\{ \int_0^\infty \|u(t)\|^2 dt \right\} < \infty. \quad (3.4)$$

令 $\mathcal{A}_{X_0, \Pi_0, r_0}$ 是可容许策略集, 即它是下述所有可测过程的集合: $\{u(t)\}_{t \geq 0}$, 并且 u 满足 (3.4), X 、 Π 和 r 分别满足 (3.3)、(2.2) 和 (2.1).

通常来说, 由于养老金管理的时期非常长, 所以, 我们考虑通胀因素对其带来的影响, 那么实际财富过程为

$$\begin{aligned} d\bar{X}(t) = & d \left[\frac{X}{\Pi} \right] (t) \\ = & [\bar{X}(t)[r(t) + (u_I(t) - 1)(\mu_\Pi - \sigma_\Pi^2) + u_S(t)(\mu_S(r(t)) - r(t))] + c(t)]dt \\ & + \bar{X}(t)(u_I(t) - 1)\sigma_\Pi dB_\Pi(t) + \bar{X}(t)u_S(t)\sigma_S dB_S(t) + \bar{X}(t-)(u_I(t) - 1)(\eta_\Pi - \eta_\Pi^2) dN_\Pi(t) \\ & + \bar{X}(t-)u_S(t)\eta_S dN_S(t), \end{aligned} \quad (3.5)$$

初始值 $\bar{X}(0) = X_0/\Pi_0 \triangleq \bar{X}_0$.

给定实际财富的期望值满足 $\mathbb{E}[\bar{X}(T)] = f$, $f \in \mathbb{R}_+$, 我们的目标是要最小化实际财富值在终端时间的方差. 我们有

$$\begin{aligned} \min_{u \in \mathcal{A}_{X_0, \Pi_0, r_0}} \text{Var}[\bar{X}(T)] &= \mathbb{E}[\bar{X}(T) - f]^2 \\ \text{s.t. } \mathbb{E}[\bar{X}(T)] &= f. \end{aligned} \quad (3.6)$$

我们用 Lagrange 乘子法来处理最优控制问题当中的限制, 并且将最初的问题 (3.6) 转化成一个没有限制的最优控制问题. 令 β 为 Lagrange 乘子, 则有

$$\min_u \text{Var}[\bar{X}(T)] = \mathbb{E}[\bar{X}(T) - f]^2 + 2\beta \mathbb{E}[\bar{X}(T) - f]. \quad (3.7)$$

令 $\alpha = \beta - f$, 则 (3.7) 的右端化为

$$E[\bar{X}^2(T) + 2\alpha\bar{X}(T)] - f^2 - 2\alpha f. \tag{3.8}$$

如此一来, 问题 (3.6) 就被转化成了一个无限制的最优控制问题. 由于 (3.8) 的最后两项是确定性的, 问题 (3.7) 就等价于

$$\min_u E[\bar{X}^2(T) + 2\alpha\bar{X}(T)]. \tag{3.9}$$

我们用动态规划原理来解决此问题. 定义值函数如下:

$$V(t, \bar{X}, r) = \min_u E[\bar{X}^2(T) + 2\alpha\bar{X}(T) \mid \bar{X}(t) = \bar{X}, r(t) = r]. \tag{3.10}$$

在随机最优控制领域, HJB 方程起到了值函数与最优控制之间的桥梁作用, 参见文献 [16, 17]. 我们有以下的验证定理:

定理 3.1 令 $v(t, \bar{X}, r) \in C^{1,2,2}([0, T] \times \mathbb{R} \times (0, +\infty)) \cap C([0, T] \times \mathbb{R} \times (0, +\infty))$ 对一切 $u \in \mathcal{A}_{X_0, \Pi_0, r_0}$ 成立, 则

$$\begin{aligned} & v_t + [\bar{X}[r + (u_I - 1)(\mu_\Pi - \sigma_\Pi^2) + u_S(\mu_S - r)] + c]v_{\bar{X}} + (a - b r)v_r \\ & + \frac{1}{2}[\bar{X}^2(u_I - 1)^2\sigma_\Pi^2 + \bar{X}^2 u_S^2\sigma_S^2]v_{\bar{X}\bar{X}} + \frac{1}{2}\sigma_r^2 v_{rr} + \bar{X}(u_I - 1)\sigma_\Pi\sigma_r\rho v_{\bar{X},r} \\ & + \lambda_\Pi[v(t, \bar{X}(1 + (u_I - 1)(\eta_\Pi - \eta_\Pi^2)), r) - v(t, \bar{X}, r)] + \lambda_S[v(t, \bar{X}(1 + u_S\eta_S), r) - v(t, \bar{X}, r)] \\ & \equiv G(v; u) \\ & \geq 0 \end{aligned} \tag{3.11}$$

对所有的 $(t, \bar{X}, r) \in ([0, T] \times \mathbb{R} \times (0, +\infty))$ 成立, 其中 $V_t, V_{\bar{X}}, V_r, V_{\bar{X}\bar{X}}, V_{rr}$ 和 $V_{\bar{X},r}$ 分别是 v 关于 t, \bar{X} 和 r 的一阶和二阶导数, 边界条件为

$$v(T, \bar{X}, r) = \bar{X}^2(T) + 2\alpha\bar{X}(T).$$

则对所有的 $u \in \mathcal{A}_{X_0, \Pi_0, r_0}, (t, \bar{X}, r) \in ([0, T] \times \mathbb{R} \times (0, +\infty))$, 有 $v(t, \bar{X}, r) \geq V(t, \bar{X}, r)$. 更进一步, 如果存在着可容许的策略 $u^* \in \mathcal{A}_{X_0, \Pi_0, r_0}$, 使 $G(v; u^*) = 0$ 对所有的 $(t, \bar{X}, r) \in ([0, T] \times \mathbb{R} \times (0, +\infty))$ 均成立, 则 $v(t, \bar{X}, r) = V(t, \bar{X}, r)$, 且此策略 u^* 为最优策略.

我们省略定理 3.1 的证明, 因为此证明是标准的, 证明可参见文献 [16, 17].

对上式关于 u 求导, 并且令它的一阶偏导数等于 0, 那么最优的投资策略 u^* 由下面两式给出:

$$\begin{aligned} & (\mu_\Pi - \sigma_\Pi^2)V_{\bar{X}} + \bar{X}(u_I^* - 1)\sigma_\Pi^2 V_{\bar{X}\bar{X}} + \sigma_\Pi\sigma_r\rho V_{\bar{X},r} \\ & + \lambda_\Pi(\eta_\Pi - \eta_\Pi^2)V_{\bar{X}}(t, \bar{X}(1 + (u_I^* - 1)(\eta_\Pi - \eta_\Pi^2)), r) \\ & = 0, \\ & (\mu_S - r)V_{\bar{X}} + \bar{X}u_S^*\sigma_S^2 V_{\bar{X}\bar{X}} + \lambda_S\eta_S V_{\bar{X}}(t, \bar{X}(1 + u_S^*\eta_S), r) = 0. \end{aligned} \tag{3.12}$$

定义 3.1 为了下面公式书写简便, 我们给出如下的记号:

$$\begin{aligned}\varpi_{\Pi} &= -\frac{(\mu_{\Pi} - \sigma_{\Pi}^2 + \lambda_{\Pi}(\eta_{\Pi} - \eta_{\Pi}^2))^2}{\sigma_{\Pi}^2 + \lambda_{\Pi}(\eta_{\Pi} - \eta_{\Pi}^2)^2}, \\ \varpi_S &= \frac{(\mu_S - r + \lambda_S \eta_S)^2}{\sigma_S^2 + \lambda_S \eta_S^2}, \\ \vartheta &= \frac{(\mu_{\Pi} - \sigma_{\Pi}^2 + \lambda_{\Pi}(\eta_{\Pi} - \eta_{\Pi}^2))\sigma_{\Pi}\sigma_r\rho}{\sigma_{\Pi}^2 + \lambda_{\Pi}(\eta_{\Pi} - \eta_{\Pi}^2)^2}, \\ \varsigma &= \frac{\sigma_{\Pi}^2\sigma_r^2\rho^2}{\sigma_{\Pi}^2 + \lambda_{\Pi}(\eta_{\Pi} - \eta_{\Pi}^2)^2}.\end{aligned}\quad (3.13)$$

最优投资策略以及相应的值函数由下面的定理给出:

定理 3.2 上述最优投资问题的最优投资策略可表示为

$$\begin{aligned}u_I^* &= -\frac{\mu_{\Pi} - \sigma_{\Pi}^2 + \lambda_{\Pi}(\eta_{\Pi} - \eta_{\Pi}^2)}{\sigma_{\Pi}^2 + \lambda_{\Pi}(\eta_{\Pi} - \eta_{\Pi}^2)^2} \left[1 + \frac{f_B(t)}{2\delta(t)} e^{-g(t)r} \frac{\alpha}{\bar{X}} + \int_t^T m(t; \tau) e^{n(t; \tau)r} d\tau \frac{1}{2\delta(t)} e^{-\gamma(t)r} \frac{1}{\bar{X}} \right] \\ &\quad - \frac{\sigma_{\Pi}\sigma_r\rho}{\sigma_{\Pi}^2 + \lambda_{\Pi}(\eta_{\Pi} - \eta_{\Pi}^2)^2} \left[\gamma(t) + \frac{f_B(t)g(t)}{2\delta(t)} e^{-g(t)r} \frac{\alpha}{\bar{X}} \right. \\ &\quad \left. + \int_t^T m(t; \tau) n(t; \tau) e^{n(t; \tau)r} d\tau \frac{1}{2\delta(t)} e^{-\gamma(t)r} \frac{1}{\bar{X}} \right] + 1, \\ u_S^* &= -\frac{\mu_S - r + \lambda_S \eta_S}{\sigma_S^2 + \lambda_S \eta_S^2} \left[1 + \frac{f_B(t)}{2\delta(t)} e^{-g(t)r} \frac{\alpha}{\bar{X}} + \int_t^T m(t; \tau) e^{n(t; \tau)r} d\tau \frac{1}{2\delta(t)} e^{-\gamma(t)r} \frac{1}{\bar{X}} \right],\end{aligned}\quad (3.14)$$

其中

$$\begin{aligned}\gamma(t) &= \frac{2}{b}(1 - e^{-b(T-t)}), \\ \delta(t) &= e^{\int_t^T h(s)ds}, \\ h(t) &= \left(\frac{1}{2}\sigma_r^2 - \varsigma \right) \gamma^2(t) + (a - 2\vartheta)\gamma(t) - \varpi_{\Pi} - \varpi_S, \\ g(t) &= \frac{1}{b}(1 - e^{-b(T-t)}), \\ f_B(t) &= 2e^{\int_t^T h(s)ds}, \\ l(t) &= \frac{1}{2}\sigma_r^2 g^2(t) + (a - \vartheta - \varsigma\gamma(t))g(t) - \varpi_{\Pi} - \varpi_S - \vartheta\gamma(t), \\ m(t; \tau) &= 2c\delta(\tau)e^{\int_t^{\tau} \varepsilon(s; \tau)ds}, \\ n(t; \tau) &= \gamma(\tau)e^{-b(\tau-t)} - \frac{1}{b}(e^{-b(\tau-t)} - 1), \\ \varepsilon(t; \tau) &= \frac{1}{2}\sigma_r^2 n^2(t; \tau) + (a - \vartheta - \varsigma\gamma(t))n(t; \tau) - \varpi_{\Pi} - \varpi_S - \vartheta\gamma(t).\end{aligned}\quad (3.15)$$

并且, 值函数为

$$\begin{aligned}V(t, \bar{X}, r) &= \delta(t)e^{\gamma(t)r} \bar{X}^2 + f_B(t)e^{g(t)r} \alpha \bar{X} + \left[\int_t^T f_C(s)ds \right] \alpha^2 + \left[\int_t^T m(t; \tau) e^{n(t; \tau)r} d\tau \right] \bar{X} \\ &\quad + \left[\int_t^T \int_{-\infty}^{+\infty} f_E(\tau, \zeta) \frac{e^{-\frac{(w-\zeta)^2}{4v}}}{2\sqrt{\pi v}} d\zeta d\tau \right] \alpha + \int_t^T \int_{-\infty}^{+\infty} f_F(\tau, \zeta) \frac{e^{-\frac{(w-\zeta)^2}{4v}}}{2\sqrt{\pi v}} d\zeta d\tau,\end{aligned}\quad (3.16)$$

它是 (3.11) 的一个连续可微的解, 其中

$$\begin{aligned}
 f_C(t) &= -\frac{1}{4}(\varpi_{\Pi} + \varpi_S) \frac{f_B^2(t)}{\delta(t)} - \frac{1}{2} \vartheta \frac{f_B^2(t)g(t)}{\delta(t)} - \frac{1}{4} \varsigma \frac{f_B^2(t)g^2(t)}{\delta(t)}, \\
 f_E(t, r) &= c(t)f_B(t)e^{g(t)r} - \frac{1}{2}(\varpi_{\Pi} + \varpi_S) \frac{f_B(t)}{\delta(t)} e^{-g(t)r} \left[\int_t^T m(t; \tau) e^{n(t; \tau)r} d\tau \right] \\
 &= -\vartheta \frac{f_B(t)}{2\delta(t)} e^{-g(t)r} \left[\int_t^T m(t; \tau) n(t; \tau) e^{n(t; \tau)r} d\tau + g(t) \int_t^T m(t; \tau) e^{n(t; \tau)r} d\tau \right] \\
 &= -\frac{1}{2} \varsigma \frac{f_B(t)g(t)}{\delta(t)} e^{-g(t)r} \left[\int_t^T m(t; \tau) n(t; \tau) e^{n(t; \tau)r} d\tau \right], \\
 f_F(t, r) &= c(t) \left[\int_t^T m(t; \tau) e^{n(t; \tau)r} d\tau \right] - \frac{1}{4}(\varpi_{\Pi} + \varpi_S) \frac{1}{\delta(t)} e^{-\gamma(t)r} \left[\int_t^T m(t; \tau) e^{n(t; \tau)r} d\tau \right]^2 \\
 &= -\frac{1}{2} \vartheta \frac{1}{\delta(t)} e^{-\gamma(t)r} \left[\int_t^T m(t; \tau) e^{n(t; \tau)r} d\tau \right] \left[\int_t^T m(t; \tau) n(t; \tau) e^{n(t; \tau)r} d\tau \right] \\
 &= -\frac{1}{4} \varsigma \frac{1}{\delta(t)} e^{-\gamma(t)r} \left[\int_t^T m(t; \tau) n(t; \tau) e^{n(t; \tau)r} d\tau \right]^2, \\
 v &= \frac{\sigma_r^2}{4b} (1 - e^{-2b(\tau-t)}), \\
 w &= re^{-b(\tau-t)} + \frac{a}{b} (1 - e^{-b(\tau-t)}).
 \end{aligned} \tag{3.17}$$

定理 3.2 的证明详见附录 A. 注意上述表达式依然依赖于 α .

4 有效策略和有效前沿

本节解决原始的均值 - 方差问题 (3.6). 令 $t = 0$ 且 $\bar{X}(0) = \bar{X}_0$, 那么关于问题 (3.9) 的最优值是 $V(0, \bar{X}_0, r_0)$. 令关于最优问题 (3.7) 的最优值为 $\tilde{V}(\bar{X}_0, r_0, \alpha)$, 则有

$$\begin{aligned}
 \tilde{V}(\bar{X}_0, r_0, \alpha) &= V(0, \bar{X}_0, r_0) - f^2 - 2\alpha f \\
 &= \left[\int_0^T f_C(s) ds \right] \alpha^2 + \left[f_B(0) e^{g(0)r} \bar{X}_0 + \left[\int_0^T \int_{-\infty}^{+\infty} f_E(\tau, \zeta) \frac{e^{-\frac{(w-\zeta)^2}{4v}}}{2\sqrt{\pi v}} d\zeta d\tau - 2f \right] \alpha \right. \\
 &\quad \left. + \delta(0) e^{\gamma(0)r} \bar{X}_0^2 + \left[\int_0^T m(0; \tau) e^{n(0; \tau)r} d\tau \right] \bar{X}_0 \right. \\
 &\quad \left. + \int_0^T \int_{-\infty}^{+\infty} f_F(\tau, \zeta) \frac{e^{-\frac{(w-\zeta)^2}{4v}}}{2\sqrt{\pi v}} d\zeta d\tau - f^2 \right],
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

其中 $\alpha = \beta - f$. 通过应用 Lagrange 对偶理论, 关于原始问题 (3.6) 的最小方差可以通过在 Lagrange 乘子 β 或者 α 上最大化 $\tilde{V}(\bar{X}_0, r_0, \alpha)$ 来获得, 即

$$\text{Var}^*[X(T)] = \max_{\{\alpha\}} \tilde{V}(\bar{X}_0, r_0, \alpha). \tag{4.2}$$

由于 $f_C \leq 0$, (4.1) 在

$$\alpha^* = - \left[2 \int_0^T f_C(s) ds \right]^{-1} \left[f_B(0) e^{g(0)r} \bar{X}_0 + \int_0^T \int_{-\infty}^{+\infty} f_E(\tau, \zeta) \frac{e^{-\frac{(w-\zeta)^2}{4v}}}{2\sqrt{\pi v}} d\zeta d\tau - 2f \right] \tag{4.3}$$

时取得最大值

$$\begin{aligned}
& - \left[4 \int_0^T f_C(s) ds \right]^{-1} \left[f_B(0) e^{g(0)r} \bar{X}_0 + \int_0^T \int_{-\infty}^{+\infty} f_E(\tau, \zeta) \frac{e^{-\frac{(w-\zeta)^2}{4v}}}{2\sqrt{\pi v}} d\zeta d\tau - 2f \right]^2 + \delta(0) e^{\gamma(0)r} \bar{X}_0^2 \\
& + \left[\int_0^T m(0; \tau) e^{n(0;\tau)r} d\tau \right] \bar{X}_0 + \int_0^T \int_{-\infty}^{+\infty} f_F(\tau, \zeta) \frac{e^{-\frac{(w-\zeta)^2}{4v}}}{2\sqrt{\pi v}} d\zeta d\tau - f^2.
\end{aligned} \quad (4.4)$$

我们将上述结论在下面的定理中进行总结:

定理 4.1 我们有最优投资策略

$$\begin{aligned}
u_I^* &= -\frac{\mu_\Pi - \sigma_\Pi^2 + \lambda_\Pi(\eta_\Pi - \eta_\Pi^2)}{\sigma_\Pi^2 + \lambda_\Pi(\eta_\Pi - \eta_\Pi^2)^2} \left[1 + \frac{f_B(t)}{2\delta(t)} e^{-g(t)r} \frac{\alpha^*}{\bar{X}} + \int_t^T m(t; \tau) e^{n(t;\tau)r} d\tau \frac{1}{2\delta(t)} e^{-\gamma(t)r} \frac{1}{\bar{X}} \right] \\
& - \frac{\sigma_\Pi \sigma_r \rho}{\sigma_\Pi^2 + \lambda_\Pi(\eta_\Pi - \eta_\Pi^2)^2} \left[\gamma(t) + \frac{f_B(t)g(t)}{2\delta(t)} e^{-g(t)r} \frac{\alpha^*}{\bar{X}} \right. \\
& \left. + \int_t^T m(t; \tau) n(t; \tau) e^{n(t;\tau)r} d\tau \frac{1}{2\delta(t)} e^{-\gamma(t)r} \frac{1}{\bar{X}} \right] + 1, \\
u_S^* &= -\frac{\mu_S - r + \lambda_S \eta_S}{\sigma_S^2 + \lambda_S \eta_S^2} \left[1 + \frac{f_B(t)}{2\delta(t)} e^{-g(t)r} \frac{\alpha^*}{\bar{X}} + \int_t^T m(t; \tau) e^{n(t;\tau)r} d\tau \frac{1}{2\delta(t)} e^{-\gamma(t)r} \frac{1}{\bar{X}} \right],
\end{aligned} \quad (4.5)$$

并且, 有效前沿为

$$\begin{aligned}
\text{Var}^*[\bar{X}(T)] &= - \left[4 \int_0^T f_C(s) ds \right]^{-1} \left[f_B(0) e^{g(0)r} \bar{X}_0 + \int_0^T \int_{-\infty}^{+\infty} f_E(\tau, \zeta) \frac{e^{-\frac{(w-\zeta)^2}{4v}}}{2\sqrt{\pi v}} d\zeta d\tau - 2f \right]^2 \\
& + \delta(0) e^{\gamma(0)r} \bar{X}_0^2 + \left[\int_0^T m(0; \tau) e^{n(0;\tau)r} d\tau \right] \bar{X}_0 \\
& + \int_0^T \int_{-\infty}^{+\infty} f_F(\tau, \zeta) \frac{e^{-\frac{(w-\zeta)^2}{4v}}}{2\sqrt{\pi v}} d\zeta d\tau - f^2,
\end{aligned} \quad (4.6)$$

其中 α^* 由 (4.3) 给出.

5 敏感性分析及结论

本文的创新点以及研究重点是价格指数带跳时 DC 养老金的最优决策. 为了研究价格指数所包含的跳对最优投资的影响, 我们作以下的敏感性分析. 由于反映价格指数中所包含的跳的参数 (λ_Π 和 η_Π) 只对投资于通货膨胀指数债券的权重有所影响, 而对投资于股票的权重并无影响, 所以, 下文中只研究 λ_Π 和 η_Π 对 u_I^* 的影响. 除特别指出外, 文中的参数值如下: $\sigma_r = 0.5$, $a = 0.01$, $b = 0.01$, $\mu_\Pi = 0.5$, $\sigma_\Pi = 0.5$, $\eta_\Pi = 0.5$, $\xi = 0.5$, $\sigma_S = 0.5$, $\eta_S = 0$, $\lambda_S = 0$, $\rho = 0$, $\bar{X}_0 = 1$, $f = 5$, $t = 0$, $T = 3$.

由图 1(a) 可见, 当价格指数当中所包含的跳的大小和强度为正时, 投资者对通胀指数债券所持有的最优权重为负, 即持有空头. 随着跳的强度增大, 最优权重的绝对值随之增加. 这表明, 当价格指数出现越来越频繁的震动时, 指数债券对投资者的吸引力越来越大, 尽管是以持有空头的方式. 相反, 当跳的大小为负时 ($\eta_\Pi = -0.5$), 由图 1(b) 可见, 投资者对通胀指数债券所持有的最优权重为正, 即持有多头. 随着跳的强度增大, 最优权重也随之增加. 这同样表明, 当价格指数出现越来越频繁的震动时, 指数债券对投资者的吸引力越来越大.

在研究中, 通常假设投资者 (在本文中特指 DC 养老金的管理者) 是理性的, 也即投资者是厌恶风险且偏好收益的. 那么对于相同的风险水平, 理性的投资者会选择收益最大的资产组合; 或者说, 对于

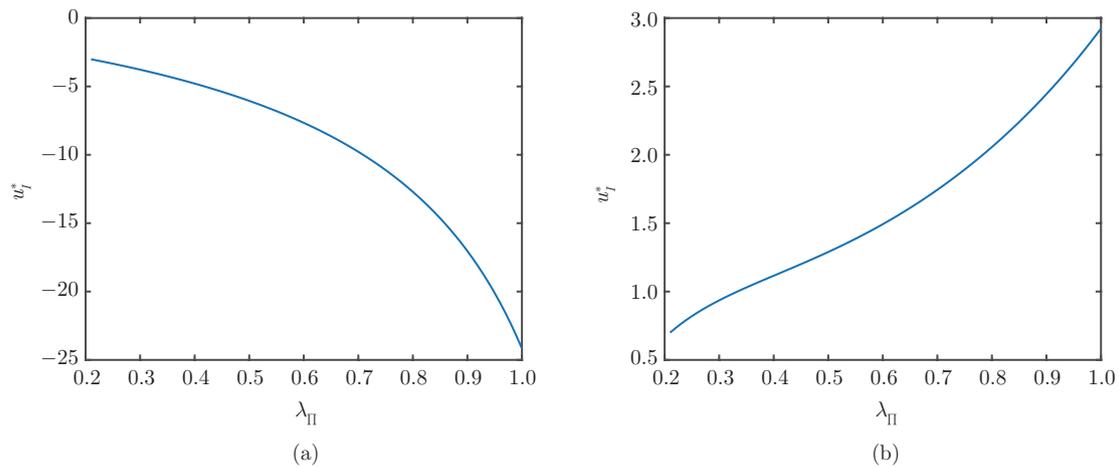


图 1 λ_{π} 对投资策略的影响. (a) $\eta_{\pi} = 0.5$; (b) $\eta_{\pi} = -0.5$

相同的收益水平, 理性的投资者会选择风险最小的资产组合. 可同时满足这两个条件的资产组合被称为“有效前沿”抑或“有效边界”. 在本文中, 当我们假设预期的收益水平为 f 时, 我们求得了最小的风险, 由 (4.6) 给出. 同时, 我们也得到了使得风险最小的投资组合权重, 这些最优的权重由 (4.5) 给出. 也就是说, 养老金的管理者按照 (4.5) 给出的投资比例进行投资才是最理性的, 否则在给定预期收益的前提下, 会面临较大的投资风险. 而对于 DC 养老金而言, 这也就可能意味着该养老金的偿付能力降低.

由于对养老金的管理通常跨越很长时间, 所以, 通货膨胀是一个影响养老金管理的重要因素. 而通货膨胀指数债券通常被用来对冲通货膨胀风险. 本文针对累积阶段的 DC 养老金, 研究了一个在均值 - 方差问题下的最优投资组合问题. 我们考虑了随机的利率, 以及包含跳 - 扩散过程的价格指数, 并且假设风险资产也包含一个跳 - 扩散过程. 应用 Lagrange 乘子法和动态规划原理, 我们得到了最优的投资策略以及相应的有效前沿. 通过解相关的 HJB 方程, 最后我们得到了最优投资权重的显式表达.

参考文献

- 1 Han N, Hung M. Optimal asset allocation for DC pension plans under inflation. *Insurance Math Econom*, 2012, 51: 172–181
- 2 Josa-Fombellida R, Rincón-Zapatero J P. Stochastic pension funding when the benefit and the risky asset follow jump diffusion processes. *European J Oper Res*, 2012, 220: 404–413
- 3 Alonso-García J, Devolder P. Optimal mix between pay-as-you-go and funding for DC pension schemes in an overlapping generations model. *Insurance Math Econom*, 2016, 70: 224–236
- 4 Li D, Rong X, Zhao H. Time-consistent investment strategy for DC pension plan with stochastic salary under CEV model. *J Syst Sci Complex*, 2016, 29: 428–454
- 5 Chen Z, Li Z, Zeng Y, et al. Asset allocation under loss aversion and minimum performance constraint in a DC pension plan with inflation risk. *Insurance Math Econom*, 2017, 75: 137–150
- 6 Yao H, Yang Z, Chen P. Markowitz's mean-variance defined contribution pension fund management under inflation: A continuous-time model. *Insurance Math Econom*, 2013, 53: 851–863
- 7 Liang Z, Zhao X. Optimal mean-variance efficiency of a family with life insurance under inflation risk. *Insurance Math Econom*, 2016, 71: 164–178
- 8 Pan J, Xiao Q. Optimal dynamic asset-liability management with stochastic interest rates and inflation risks. *Chaos Solitons Fractals*, 2017, 103: 460–469
- 9 Zhang A, Ewald C. Optimal investment for a pension fund under inflation risk. *Math Methods Oper Res*, 2010, 71:

353–369

- 10 Merton R C. Optimum consumption and portfolio rules in a continuous-time model. *J Econom Theory*, 1971, 3: 373–413
- 11 Sun J, Li Z, Zeng Y. Precommitment and equilibrium investment strategies for defined contribution pension plans under a jump-diffusion model. *Insurance Math Econom*, 2016, 67: 158–172
- 12 Ngwira B, Gerrard R. Stochastic pension fund control in the presence of Poisson jumps. *Insurance Math Econom*, 2007, 40: 283–292
- 13 Delong L, Gerrard R, Haberman S. Mean-variance optimization problems for an accumulation phase in a defined benefit plan. *Insurance Math Econom*, 2008, 42: 107–118
- 14 Vasicek O A. An equilibrium characterization of the term structure. *J Financ Econ*, 1977, 5: 177–188
- 15 Björk T, Slinko I. Towards a general theory of good-deal bounds. *Rev Finance*, 2006, 10: 221–260
- 16 Yong X, Zhou X Y. Dynamic programming and HJB equations. In: *Stochastic Control*. New York: Springer-Verlag, 1999, 157–215
- 17 Fleming W H, Soner H M. Controlled Markov diffusion in \mathbb{R}^n . In: *Controlled Markov Processes and Viscosity Solution*, 2nd ed. New York: Springer-Verlag, 1993, 152–197

附录 A 定理 3.2 的证明

我们猜想值函数的解满足 $V \in C^{1,2}$ 和 $V_{XX} > 0$, 并有以下形式:

$$V(t, \bar{X}, r) = A(t, r)\bar{X}^2 + B(t, r)\bar{X}\alpha + C(t, r)\alpha^2 + D(t, r)\bar{X} + E(t, r)\alpha + F(t, r), \quad (\text{A.1})$$

其中 $A(\cdot, \cdot)$ 、 $B(\cdot, \cdot)$ 、 $C(\cdot, \cdot)$ 、 $D(\cdot, \cdot)$ 、 $E(\cdot, \cdot)$ 和 $F(\cdot, \cdot)$ 是 6 个待定方程, 有边界条件 $A(T, r) = 1$, $B(T, r) = 2$, $C(T, r) = D(T, r) = E(T, r) = F(T, r) = 0$.

对其求导, 我们有

$$\begin{aligned} V_t &= A_t \bar{X}^2 + B_t \bar{X} \alpha + C_t \alpha^2 + D_t \bar{X} + E_t \alpha + F_t, & V_{\bar{X}} &= 2A \bar{X} + B \alpha + D, & V_{\bar{X} \bar{X}} &= 2A, \\ V_{\bar{X} r} &= 2A_r \bar{X} + B_r \alpha + D_r, & V_r &= A_r \bar{X}^2 + B_r \bar{X} \alpha + C_r \alpha^2 + D_r \bar{X} + E_r \alpha + F_r, \\ V_{rr} &= A_{rr} \bar{X}^2 + B_{rr} \bar{X} \alpha + C_{rr} \alpha^2 + D_{rr} \bar{X} + E_{rr} \alpha + F_{rr}, \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

其中 A_t 、 A_r 和 A_{rr} 表示 A 分别对时间 t 和利率 r 的一阶和二阶导数. 本文中其他函数的导数有类似形式的表达式.

将 (A.2) 代入 (3.12), 可得

$$\begin{aligned} u_I^* &= -\frac{\mu_{\Pi} - \sigma_{\Pi}^2 + \lambda_{\Pi}(\eta_{\Pi} - \eta_{\Pi}^2)}{\sigma_{\Pi}^2 + \lambda_{\Pi}(\eta_{\Pi} - \eta_{\Pi}^2)} \frac{2A\bar{X} + B\alpha + D}{2A\bar{X}} - \frac{\sigma_{\Pi}\sigma_r\rho}{\sigma_{\Pi}^2 + \lambda_{\Pi}(\eta_{\Pi} - \eta_{\Pi}^2)} \frac{2A_r\bar{X} + B_r\alpha + D_r}{2A\bar{X}} + 1, \\ u_S^* &= -\frac{\mu_S - r + \lambda_S\eta_S}{\sigma_S^2 + \lambda_S\eta_S^2} \frac{2A\bar{X} + B\alpha + D}{2A\bar{X}}. \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

将值函数的导数以及 u_I^* 和 u_S^* 的表达式代入 (3.11), 并根据 \bar{X}^2 、 $\bar{X}\alpha$ 、 α^2 、 \bar{X} 和 α 重新排列, 我们得到了以下关于 \bar{X} 和 α 的二项式方程:

$$\left[A_t + (2r - \varpi_{\Pi} - \varpi_S)A + (a - br - 2\theta)A_r + \frac{1}{2}\sigma_r^2 A_{rr} - \varsigma \frac{A_r^2}{A_r} \right] \bar{X}^2$$

$$\begin{aligned}
 & + \left[B_t + \left(r - \varpi_{\Pi} - \varpi_S - \vartheta \frac{A_r}{A} \right) B + \left(a - b r - \vartheta - \varsigma \frac{A_r}{A} \right) B_r + \frac{1}{2} \sigma_r^2 B_{rr} \right] \bar{X} \alpha \\
 & + \left[C_t + (a - b r) C_r + \frac{1}{2} \sigma_r^2 C_{rr} - \frac{1}{4} (\varpi_{\Pi} + \varpi_S) \frac{B^2}{A} - \frac{1}{2} \vartheta \frac{B B_r}{A} - \frac{1}{4} \varsigma \frac{B_r^2}{A} \right] \alpha^2 \\
 & + \left[D_t + \left(r - \varpi_{\Pi} - \varpi_S - \vartheta \frac{A_r}{A} \right) D + \left(a - b r - \vartheta - \varsigma \frac{A_r}{A} \right) D_r + \frac{1}{2} \sigma_r^2 D_{rr} + 2cA \right] \bar{X} \\
 & + \left[E_t + (a - b r) E_r + \frac{1}{2} \sigma_r^2 E_{rr} + cB - \frac{1}{2} (\varpi_{\Pi} + \varpi_S) \frac{BD}{A} - \vartheta \frac{B D_r + B_r D}{2A} - \frac{1}{2} \varsigma \frac{B_r D_r}{A} \right] \bar{X} \\
 & + \left[F_t + (a - b r) F_r + \frac{1}{2} \sigma_r^2 F_{rr} + cD - \frac{1}{4} (\varpi_{\Pi} + \varpi_S) \frac{D^2}{A} - \frac{1}{2} \vartheta \frac{D D_r}{A} - \frac{1}{4} \varsigma \frac{D_r^2}{A} \right] \\
 & = 0.
 \end{aligned} \tag{A.4}$$

由于 (A.4) 对于每一个 \bar{X} 和 α 都成立, 上式等价于下面 6 个偏微分方程 (partial differential equations, PDEs):

$$\begin{cases} A_t + (2r - \varpi_{\Pi} - \varpi_S)A + (a - b r - 2\vartheta)A_r + \frac{1}{2} \sigma_r^2 A_{rr} - \varsigma \frac{A_r^2}{A} = 0, \\ A(T, r) = 1, \end{cases} \tag{A.5}$$

$$\begin{cases} B_t + \left(r - \varpi_{\Pi} - \varpi_S - \vartheta \frac{A_r}{A} \right) B + \left(a - b r - \vartheta - \varsigma \frac{A_r}{A} \right) B_r + \frac{1}{2} \sigma_r^2 B_{rr} = 0, \\ B(T, r) = 2, \end{cases} \tag{A.6}$$

$$\begin{cases} C_t + (a - b r) C_r + \frac{1}{2} \sigma_r^2 C_{rr} - \frac{1}{4} (\varpi_{\Pi} + \varpi_S) \frac{B^2}{A} - \frac{1}{2} \vartheta \frac{B B_r}{A} - \frac{1}{4} \varsigma \frac{B_r^2}{A} = 0, \\ C(T, r) = 0, \end{cases} \tag{A.7}$$

$$\begin{cases} D_t + \left(r - \varpi_{\Pi} - \varpi_S - \vartheta \frac{A_r}{A} \right) D + \left(a - b r - \vartheta - \varsigma \frac{A_r}{A} \right) D_r + \frac{1}{2} \sigma_r^2 D_{rr} + 2cA = 0, \\ D(T, r) = 0, \end{cases} \tag{A.8}$$

$$\begin{cases} E_t + (a - b r) E_r + \frac{1}{2} \sigma_r^2 E_{rr} + cB - \frac{1}{2} (\varpi_{\Pi} + \varpi_S) \frac{BD}{A} - \vartheta \frac{B D_r + B_r D}{2A} - \frac{1}{2} \varsigma \frac{B_r D_r}{A} = 0, \\ E(T, r) = 0, \end{cases} \tag{A.9}$$

$$\begin{cases} F_t + (a - b r) F_r + \frac{1}{2} \sigma_r^2 F_{rr} + cD - \frac{1}{4} (\varpi_{\Pi} + \varpi_S) \frac{D^2}{A} - \frac{1}{2} \vartheta \frac{D D_r}{A} - \frac{1}{4} \varsigma \frac{D_r^2}{A} = 0, \\ F(T, r) = 0, \end{cases} \tag{A.10}$$

其中 $A = A(t, r)$, $B = B(t, r)$, $C = C(t, r)$, $D = D(t, r)$, $E = E(t, r)$ 且 $F = F(t, r)$.

假设 (A.5) 的解的形式满足 $A(t, r) = \delta(t)e^{\gamma(t)r}$, 且有边值条件 $\delta(T) = 1$ 和 $\gamma(T) = 0$. 简化之后, 我们有

$$\delta'(t) + \delta(t)\gamma'(t)r + (2r - \varpi_{\Pi} - \varpi_S)\delta(t) + (a - br - 2\vartheta)\delta(t)\gamma(t) + \frac{1}{2}\sigma_r^2\delta(t)\gamma^2(t) - \varsigma\delta(t)\gamma^2(t) = 0. \tag{A.11}$$

由于上式对每个 r 都成立, 它等价于

$$\begin{aligned}\gamma'(t) - b\gamma(t) + 2 &= 0, \\ \delta'(t) + h(t)\delta(t) &= 0,\end{aligned}\tag{A.12}$$

其中 h 由 (3.15) 给出, $\gamma(t) = \frac{2}{b}(1 - e^{-b(T-t)})$ 且 $\delta(t) = e^{\int_t^T h(s)ds}$.

对于 (A.6) 的解, 我们猜想 $B(t, r) = f_B(t)e^{g(t)r}$, 且边值条件为 $f_B(T) = 2$ 和 $g(T) = 0$. 与计算 $A(t, r)$ 的方法相似, $f_B(t)$ 和 $g(t)$ 的表达式最终由 (3.15) 给出.

下面解方程组 (A.7). 将 $A(t, r)$ 和 $B(t, r)$ 的表达式代入, 可得

$$\begin{cases} C_t + (a - br)C_r + \frac{1}{2}\sigma_r^2 C_{rr} - \frac{1}{4}(\varpi_{\Pi} + \varpi_S) \frac{f_B^2(t)}{\delta(t)} - \frac{1}{2}\vartheta \frac{f_B^2(t)g(t)}{\delta(t)} - \frac{1}{4}\varsigma \frac{f_B^2(t)g^2(t)}{\delta(t)} = 0, \\ C(T, r) = 0. \end{cases}\tag{A.13}$$

由于 (A.13) 中的非齐次项独立于 r , 我们假设 $C(t, r)$ 也独立于 r , 因此, 将 $C(t, r)$ 记为 $C(t)$, 并且 $C_r = C_{rr} = 0$. 因此,

$$C(t) = \int_t^T f_C(s)ds,\tag{A.14}$$

其中

$$f_C(t) = -\frac{1}{4}(\varpi_{\Pi} + \varpi_S) \frac{f_B^2(t)}{\delta(t)} - \frac{1}{2}\vartheta \frac{f_B^2(t)g(t)}{\delta(t)} - \frac{1}{4}\varsigma \frac{f_B^2(t)g^2(t)}{\delta(t)}.$$

下面解方程组 (A.8). 代入 $A(t, r)$ 的表达式, 我们有

$$\begin{cases} D_t + (r - \varpi_{\Pi} - \varpi_S - \vartheta\gamma(t))D + (a - br - \vartheta - \varsigma\gamma(t))D_r + \frac{1}{2}\sigma_r^2 D_{rr} + 2c\delta(t)e^{\gamma(t)r} = 0, \\ D(T, r) = 0, \end{cases}\tag{A.15}$$

最后一项 $2c\delta(t)e^{\gamma(t)r}$ 表明上式是一个非齐次的方程. 由文献 [6, 命题 2], (A.15) 的解可以通过解下面齐次的 PDE 来得到. 令 τ ($\tau \leq T$) 满足

$$\begin{cases} \psi_t + (r - \varpi_{\Pi} - \varpi_S - \vartheta\gamma(t))\psi + (a - br - \vartheta - \varsigma\gamma(t))\psi_r + \frac{1}{2}\sigma_r^2 \psi_{rr} = 0, \\ \psi(\tau, r) = 2c\delta(\tau)e^{\gamma(\tau)r}, \end{cases}\tag{A.16}$$

则 (A.15) 的解为

$$D(t, r) = \int_t^T \psi(t, r; \tau)d\tau.\tag{A.17}$$

对于方程组 (A.16), 我们猜想 $\psi(t, r; \tau) = m(t; \tau)e^{n(t; \tau)r}$. 边界值分别为 $m(\tau; \tau) = 2c\delta(\tau)$ 和 $n(\tau; \tau) = \gamma(\tau)$. 通过解 $A(t, r)$ 或者 $B(t, r)$ 的类似方法, 我们有

$$D(t, r) = \int_t^T m(t; \tau)e^{n(t; \tau)r}d\tau,\tag{A.18}$$

其中 m 和 n 由 (3.15) 给出.

最后还剩下两个偏微分方程: (A.9) 和 (A.10). 定义

$$\begin{aligned} f_E(t, r) &= cB - \frac{1}{2}(\varpi_\Pi + \varpi_S) \frac{BD}{A} - \vartheta \frac{BD_r + B_r D}{2A} - \frac{1}{2} \varsigma \frac{B_r D_r}{A}, \\ f_F(t, r) &= cD - \frac{1}{4}(\varpi_\Pi + \varpi_S) \frac{D^2}{A} - \frac{1}{2} \vartheta \frac{DD_r}{A} - \frac{1}{4} \varsigma \frac{D_r^2}{A}, \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

则 (A.9) 和 (A.10) 可以分别写为

$$\begin{cases} E_t + (a - b r) E_r + \frac{1}{2} \sigma_r^2 E_{rr} + f_E(t, r) = 0, \\ E(T, r) = 0, \end{cases} \quad (\text{A.20})$$

$$\begin{cases} F_t + (a - b r) F_r + \frac{1}{2} \sigma_r^2 F_{rr} + f_F(t, r) = 0, \\ F(T, r) = 0, \end{cases} \quad (\text{A.21})$$

类似于求解 $D(t, r)$ 的方法, 我们有

$$E(t, r) = \int_t^T \varphi(t, r; \tau) d\tau, \quad (\text{A.22})$$

其中 φ 是以下齐次方程的解 ($\tau \leq T$):

$$\begin{cases} \varphi_t + (a - b r) \varphi_r + \frac{1}{2} \sigma_r^2 \varphi_{rr} = 0, \\ \varphi(\tau, r; \tau) = f_E(\tau, r). \end{cases} \quad (\text{A.23})$$

下面用变量代换的方法解 (A.23). 定义

$$\begin{cases} q(v, w; \tau) = \varphi(t, r; \tau), \\ v = \frac{\sigma_r^2}{4b} (1 - e^{-2b(\tau-t)}), \\ w = r e^{-b(\tau-t)} + \frac{a}{b} (1 - e^{-b(\tau-t)}). \end{cases} \quad (\text{A.24})$$

令 $t = \tau$, 则有 $v = 0$ 和 $w = r$. 根据 (A.23) 给出的边值条件, $q(v, w; \tau)$ 的初值为

$$q(0, w; \tau) = \varphi(\tau, r; \tau) = f_E(\tau, r) = f_E(\tau, w). \quad (\text{A.25})$$

另一方面, 在 (A.24) 中, 求 φ 关于 t 和 r 的一阶和二阶导, 可得

$$\begin{aligned} \varphi_t &= -\frac{\sigma_r^2}{2} e^{-2b(\tau-t)} q_v - (a - b r) e^{-b(\tau-t)} q_w, \\ \varphi_r &= e^{-b(\tau-t)} q_w, \\ \varphi_{rr} &= e^{-2b(\tau-t)} q_{ww}. \end{aligned} \quad (\text{A.26})$$

将 (A.26) 代入 (A.23) 并同时考虑 $q(v, w; \tau)$ 的初值, 有

$$\begin{cases} q_v(v, w; \tau) - q_{ww}(v, w; \tau) = 0, \\ q(0, w; \tau) = f_E(\tau, w). \end{cases} \quad (\text{A.27})$$

上述方程是一个热方程. 它的解为

$$q(v, w; \tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_E(\tau, \zeta) \frac{e^{-\frac{(w-\zeta)^2}{4v}}}{2\sqrt{\pi v}} d\zeta. \quad (\text{A.28})$$

通过 (A.22), 方程组 (A.20) 的解为

$$\begin{aligned} E(t, r) &= \int_t^T \varphi(t, r; \tau) d\tau \\ &= \int_t^T \int_{-\infty}^{+\infty} f_E(\tau, \zeta) \frac{e^{-\frac{(w-\zeta)^2}{4v}}}{2\sqrt{\pi v}} d\zeta d\tau, \end{aligned} \quad (\text{A.29})$$

其中 f_E 由 (A.19) 给出.

类似地, 方程 (A.21) 的解为

$$F(t, r) = \int_t^T \int_{-\infty}^{+\infty} f_F(\tau, \zeta) \frac{e^{-\frac{(w-\zeta)^2}{4v}}}{2\sqrt{\pi v}} d\zeta d\tau, \quad (\text{A.30})$$

其中 f_F 由 (A.19) 给出, v 和 w 由 (A.24) 给出.

显然, $V_{\overline{XX}} = 2A(t, r) = 2\delta(t)e^{\gamma(t)r} > 0$. 将 A 、 B 和 C 的表达式代入 (A.3) 可知, 最优投资策略最终由 (3.14) 给出.

Dynamic mean-variance problem for defined contribution pension fund under inflation

Xiaoyi Zhang & Junyi Guo

Abstract This paper studies the optimal investment strategy for a mean-variance problem of a defined contribution (DC) pension plan during the accumulation phase. Generally, the time horizon of DC pension management is really long, and thus the real wealth process, instead of the nominal process is derived with the consideration of inflation. The inflation index is described by a jump-diffusion process. The plan aims to minimize the risk measured by variance, by investing the wealth in a financial market consisting of a bank account, an inflation-indexed bond and a risky asset. The dynamic of the risky asset is also subjected to a Poisson jump and a Brownian uncertainty. The closed-form optimal investment decision and the efficient frontier are derived by solving the corresponding Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB) equation.

Keywords Poisson process, defined contribution pension plan, stochastic optimal control, mean-variance problem, HJB equation

MSC(2010) 97M30, 93E20

doi: 10.1360/N012018-00045