论文

利用光子纠缠混合态实现 Bell 不等式检验

郭伟杰^①, 樊代和^①, 韦联福^{①②*}^① 西南交通大学量子光电实验室, 成都 610031;^② 中山大学光电材料与技术国家重点实验室, 广州 510275

*联系人, E-mail: weilianfu@gmail.com

收稿日期: 2012-11-13; 接受日期: 2013-05-15

国家自然科学基金(批准号: 90921010, 11174373)和国家重大基础研究计划(编号: 2010CB923104)资助项目

摘要 Bell 不等式的违背是量子非局域关联存在的重要证据之一. 利用各种纠缠源, 人们已经在多个实验中实现了这种违背的验证. 然而, 最优的违背(即 Cirel'son 极限)仍未能在实验上达到. 针对其中的两种可能的原因: 所使用纠缠源的纠缠度难以达到最大纠缠或者所选取的测量基并非是最优测量基; 本文利用商用光子纠缠源在实验上探索这一问题的可能解决方案. 我们首先在实验上验证了, 基于通常两体光子纠缠纯态假定所选取的测量基并不能得到 Bell 不等式的最佳违背. 利用量子态层析技术, 我们重构了该商用纠缠光子态的密度矩阵, 并证实了实验中所用的纠缠光源是一个混合纠缠态. 据此, 我们对测量基进行了优化, 明显地提高了 Bell 不等式的违背程度.

关键词 Bell 不等式违背, 量子层析, 测量基

PACS: 03.65.Ud, 06.67.Mn, 03.65.Wj, 42.65.Lm

doi: 10.1360/132012-926

20 世纪物理学诞生了两个影响深远的成果, 即相对论和量子力学. 然而, 从量子力学诞生之初, 就伴随着不断的争论. 其中, 影响最大的当数 1935 年 Einstein-Podolsky-Rosen (EPR) 三人提出的对量子力学完备性的质疑^[1], 即波函数给出的对物理实在性的描述是不完备的. 若承认 EPR 的观点是正确的, 那么量子力学的描述就是不完备, 应当由一种更“完备”的理论去描述微观世界. 为此, 首先要做的是, 把那些“暗中”起作用的变量或条件(即“隐变量”)引入进来以使波函数 Ψ 所描述的体系得以完备, 从而把量子力学中对某些观测结果不能作精确预见的原因归结于

这种隐变量取值的非确定性. 现在, 所有这些按要求引入新变量或补充条件的理论都统称为隐变量理论^[2]. 在这一理论体系中, 隐变量显然是局域的, 其变化遵循我们熟知的经典物理规律. 据此, Bell 于 1964 年发表了一篇文章^[3], 从理论上证明了隐变量理论和量子力学是矛盾的. 也就是说, 基于隐变量的局域化理论一定不会违背一个现在称之为 Bell 不等式的不等式, 而在量子力学的理论体系中, Bell 不等式是可以被违背的. 由此, 物理学界掀开了通过检验 Bell 不等式的是否被违背来证实量子力学理论体系正确性的序幕. 尤其是 1969 年 CHSH 不等式^[4]的提

引用格式: 郭伟杰, 樊代和, 韦联福. 利用光子纠缠混合态实现 Bell 不等式检验. 中国科学: 物理学 力学 天文学, 2013, 43: 948–955

Guo W J, Fan D H, Wei L F. Testing the Bell's inequality violations with mixed entangled photons (in Chinese). Sci Sin-Phys Mech Astron, 2013, 43: 948–955, doi: 10.1360/132012-926

出,使得在实验上验证 Bell 不等式变得更加可行.

利用光子纠缠来进行 Bell 不等式的实验检验已经开展了多年. 整个历史过程大致可分为三个阶段,也称为“三代检验”^[5]. 第一代检验技术开始于七十年代早期,所利用的光子纠缠对产生于原子级联辐射或湮灭辐射^[6],而所检验的大多数是 Chauser-Horne 型 Bell 不等式^[7]. 虽然大多数实验都与量子力学预言相一致,但受限当时的技术水平,其置信度难以提高. 第二代检验技术始于八十年代初期,所用的纠缠光源主要是激光激励原子级联辐射产生的孪生光子. 这阶段的实验结果已经较为明显地证明了 Bell 不等式的违背. 其中,1981 年 Aspect^[8-10]领导的实验小组所得到的 Chauser-Horne-Shimony-Holt (CHSH)-型 Bell 不等式的违背结果大于 40 个标准偏差,从而在很高的置信度上验证了 Bell 不等式的违背. 最后,第三代检验开始于八十年代末,由 Ou^[11]和 Shih^[12]两个实验小组率先运用参量下转换产生的纠缠光子对来进行 Bell 不等式的检验. 重要的是,这种纠缠光子可以耦合到光纤中进行传送从而致使光源和测量装置之间可以有很长距离. 利用这一技术,1998 年 Weihs^[13]实验组得到的 Bell 函数值为 $S=2.73\pm0.02$,这是迄今为止所实现的 Bell 不等式($S\leq 2$)的最大违背,其违背的标准差达到 30 多倍,非常接近于定域性的理想条件要求. 随后,潘建伟^[14]实验组于 2005 年实现了长达 13 km 的自由空间(不借助光纤)CHSH-型 Bell 不等式的检验.

综上所述,几十年来的实验都证明了以 Bell 不等式的违背为明显标志的非定域量子力学理论是正确的. 而这种非定域性量子效应则是目前已经得到蓬勃发展的量子密码技术和量子计算机等研究领域的理论基础. 值得注意的是,虽然多个小组的实验都证明了 Bell 不等式的违背,但实验上至今仍未实现其最大的违背,即尚未达到 $2\sqrt{2}$ 的 Cirel'son 极限^[15]. 原因可能是:所使用光子纠缠源的纠缠度尚未达到理想中的最大纠缠(即纠缠度为 1),或者实验中所选取的测量基并非最优的测量基. 基于这一猜想,我们利用商用纠缠光源在实验上探讨如何针对所使用的纠缠源,通过优化测量基来获得 Bell 不等式的最佳违背. 确实,我们的实验结果表明, Bell 不等式的违背程度不但与所用纠缠源的纠缠度有关,而且还与具体纠缠态所对应测量基的选取有关. 实验中,我们首先利用量子层析(Tomography)技术^[16]重构实验所

用的光子纠缠态,结果发现商用纠缠源所输出的是光子纠缠混合态而非通常认为的纠缠纯态,其纠缠度明显小于 1;针对这一非最大纠缠态光子纠缠源,我们利用数值计算的方法对其测量基进行了优化. 果然,在此优化测量基下所测得的 Bell 不等式的违背程度明显大于利用通常纯态基来进行验证所得到的违背程度.

本文分三个部分:第一部分简单回顾我们实验所依据的理论基础,并对我们所搭建的实验平台进行简要的说明;第二部分为本文的核心内容,我们先测量了光子对的极化关联曲线,从而说明非线性晶体参量下转换过程中所产生的两路光子是关联的;进而,利用量子层析技术重构了这些关联光子对的密度矩阵;据此,利用数值计算方法对测量基进行了优化,最后利用最优化测量基对 Bell 不等式的违背进行验证,对比于最大纠缠纯态测量基的测量结果,我们发现 Bell 不等式的违背程度确实得到了明显的提高. 最后部分是我们的总结和讨论.

1 Bell 不等式及其实验检验系统

1.1 CHSH-型 Bell 不等式

1935 年, EPR 提出了对量子力学的质疑. 他们坚持,如要准确预见一个物理量的取值,则每个物理元素都存在一个实在要素(即隐变量);空间分开且没有超距作用的两个物理系统的物理量应当是相互独立而不关联的. 从这个逻辑出发并假设,当自旋与任一矢量 $\mathbf{a}$ 方向一致时,记实在元素值为 $E(\mathbf{a})=1$,相反时记 $E(\mathbf{a})=-1$. 引入隐变量 λ , 则有 $E(\mathbf{a}, \lambda) = \pm 1$,再考虑测量过程中的不确定性,比如有时测不到结果或信号弱化等,则有 $|E(\mathbf{a}, \lambda)E(\mathbf{b}, \lambda)| \leq 1$. 定义两粒子的关联函数为

$$E(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \int E(\mathbf{a}, \lambda)E(\mathbf{b}, \lambda)\rho(\lambda)d\lambda. \quad (1)$$

其中 $\int \rho(\lambda)d\lambda = 1$, 且 $\rho(\lambda)$ 不依赖于 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$. 容易证明

$$|E(\mathbf{a}, \mathbf{b}) - E(\mathbf{a}, \mathbf{d})| \leq 2 \pm [E(\mathbf{c}, \mathbf{d}) + E(\mathbf{c}, \mathbf{b})], \quad (2)$$

故

$$S \equiv |E(\mathbf{a}, \mathbf{b}) + E(\mathbf{c}, \mathbf{b}) - E(\mathbf{a}, \mathbf{d}) + E(\mathbf{c}, \mathbf{d})| \leq |E(\mathbf{a}, \mathbf{b}) - E(\mathbf{a}, \mathbf{d})| + |E(\mathbf{c}, \mathbf{b}) + E(\mathbf{c}, \mathbf{d})| \leq 2. \quad (3)$$

这就是本实验将要检验的 CHSH-型 Bell 不等式.

实验上验证 CHSH-型 Bell 不等式, 实际上就是通过测量如下的 Bell 函数^[4]

$$S = |E(\alpha, \beta) + E(\alpha', \beta) - E(\alpha, \beta') + E(\alpha', \beta')| \quad (4)$$

来实现的. 这里, 关联函数定义为

$$E(\alpha, \beta) = P(\alpha, \beta) + P\left(\alpha + \frac{\pi}{2}, \beta + \frac{\pi}{2}\right) - P\left(\alpha, \beta + \frac{\pi}{2}\right) - P\left(\alpha + \frac{\pi}{2}, \beta\right). \quad (5)$$

其中 P 为光子符合计数的概率, α, β 为局域变量. 一般地, 如果纠缠光子对的波函数可以写为 $|\psi\rangle = \cos\theta|H\rangle_1|V\rangle_2 + \sin\theta e^{i\varphi}|V\rangle_1|H\rangle_2$, 那么在选取的一组测量基

$$\begin{aligned} |A_\alpha\rangle &= \cos\alpha|H\rangle + \sin\alpha|V\rangle, \\ |A_\beta\rangle &= \cos\beta|H\rangle + \sin\beta|V\rangle \end{aligned} \quad (6)$$

下, 光子的符合计数概率为

$$\begin{aligned} P(\alpha, \beta) &= |\langle A_\alpha | \langle A_\beta | \psi \rangle|^2 \\ &= |\langle H | \cos\alpha + \langle V | \sin\alpha \rangle| \\ &\quad (\sin\theta \cos\beta |V\rangle_1 e^{i\varphi} + \cos\theta \sin\beta |H\rangle_1) \\ &= |\cos\alpha \sin\beta \cos\theta + \sin\alpha \cos\beta \sin\theta e^{i\varphi}|^2. \end{aligned} \quad (7)$$

特别地, 当 $\theta = \pi/4, \varphi = 0, \pi$ 时, 我们有

$$P(\alpha, \beta) = \frac{1}{2} \sin^2(\alpha \pm \beta). \quad (8)$$

因此, 局域关联函数可以简单地计算

$$E(\alpha, \beta) = \sin^2(\alpha \pm \beta) - \cos^2(\alpha \pm \beta). \quad (9)$$

显然, 关联函数 $E(\alpha, \beta)$, 以及 Bell 函数 S 的取值是与测量基的选取, 即 α, β 的选择直接相关的. 可以验证, 如果局域变量的组合选取为 $(\alpha, \alpha', \beta, \beta') = (-45^\circ, 0^\circ, -22.5^\circ, 22.5^\circ)$, 那么 Bell 函数的取值就达到了其最大的取值, 即 $S_{\max} = 2\sqrt{2}$. 也就是说, 在这组测量基下 Bell 不等式将被最大地违背. 当然, 最大违背 Bell 不等式的测量基并不是唯一的, 其他的组合也可能实现其最大的违背.

1.2 实验系统

图 1 为实验的整体示意图. 激光从半导体激光器出射, 经过透镜聚焦后通过反射镜垂直入射到 BBO 晶体上. 其中未发生参量下转换的光束沿原光路出

图 1 (网络版彩图)实验框架图
Figure 1 (Color online) Experimental scheme.

射, 最后被光垃圾桶(Bin)接收; 而发生参量下转换的光束被分成对称的两束, 各自经过由半波片和补偿 BBO 晶体构成的补偿系统, 最后通过由极化分束器(PBS)、四分之一波片、半波片构成的测量系统后, 到达光子接收器并在光子计数器上显示每秒钟时间内所接收到的光子数.

本实验系统所用的纠缠光源为商用产品^[17]. 所用半导体激光器输出功率约为 95 mW (输出功率可调, 随泵浦电流的增大而增大, 实验中我们所加的电流为 0.095 A, 对应的输出功率为 95 mW), 中心波长为 405 nm, 是垂直偏振(V)光; 激光器输出光斑的直径大约有 1–2 mm, 经过聚焦透镜后, 在主 BBO 晶体处直径可以缩小为几百微米. 主 BBO 晶体厚度为 2 mm, 泵浦光经过此晶体后大部分未发生下转换, 若直接打在实验器件上会反射或者散射. 为避免由此造成实验干扰, 我们在晶体后方沿着入射方向放置一个光垃圾桶来吸收未发生转换的 405 nm 泵浦光. 经主 BBO 晶体发生参量下转换的光子劈裂成波长为 810 nm 的光子对, 他们沿与泵浦光方向约成 3° 的角度出射; 并经过后续的补偿系统对其光束特性进行整形. 最后, 由一个四分之一波片、一个半波片、一个极化分束器和光子探测器所构成的光子偏振测量系统, 可以实现不同偏振光子的检测和计数.

实验中用于产生光子纠缠对的是 II 类非线性 BBO 晶体, 其产生参量下转换的原理如图 2 所示. 当光子通过某些非线性晶体时, 会有一定几率发生参量下转换.

在我们实验中, 当光子进入 BBO 晶体(低温相紫外非线性晶体, 具有倍频和双折射效应)后一个光子

图 2 (网络版彩图) 纠缠光子对的产生

Figure 2 (Color online) Generation of entangled photon-pairs.

会劈裂成一对光子. 因为要满足相位匹配和能量守恒, 大部分光子对会出现在对称的位置上. 当有大量光子入射在晶体上时, 这些对称的光子对会形成两个光锥, 而这两个光锥的交点处就可能存在两种状态 $|H\rangle|V\rangle$ 和 $|V\rangle|H\rangle$. 这里, $|H\rangle$ 表示水平方向偏振的光子态, 而 $|V\rangle$ 则表示垂直方向偏振的光子态. 原则上这两交叉点上的光子状态是不能区分的, 因而是一个极化光子纠缠态

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|H\rangle|V\rangle - e^{i\varphi}|V\rangle|H\rangle). \quad (10)$$

当然, 因为 BBO 是双折射晶体, 所产生的不同极化光子对在 BBO 中折射率不同, 从而出射的光子会对有一定的时间差. 另外, 在空间上两个纠缠光子也会产生纵向以及横向的差别. 这种时间和空间上的“走离”会影响光子的纠缠质量, 所以采用了如下的光路对此进行补偿, 如图 3 所示. 该系统由一块半波片和一块厚度为产生纠缠 BBO 晶体厚度的一半(将纠缠光的产生近似看成在主 BBO 晶体中心位置)的另一块 BBO 晶体来实现. 实验上将半波片光轴位置调整至与水平方向成 45° , 使极化光子经过半波片后会产生 π 相位差, 从而交换了光子的极化方向(原先垂直偏振的变为水平偏振, 水平偏振变为垂直偏振). 最后, 经过补偿 BBO 后的光子对便在时间和空间上都不可区分, 从而提高了它们的纠缠质量.

图 3 (网络版彩图) 光子对“走离”的补偿光路

Figure 3 (Color online) Compensation scheme of the “walk off” effect.

2 实验结果

2.1 极化关联曲线

我们实验的出发点是制备得到一个 $|H\rangle|V\rangle$ 和 $|V\rangle|H\rangle$ 叠加起来的光子纠缠态. 实际上, 考虑到所制备的量子态并非完全理想的光子纠缠纯态, 所以会有部分的 $|H\rangle|H\rangle$ 和 $|V\rangle|V\rangle$ 态光子产生符合计数. 当然, $|H\rangle|V\rangle$ 和 $|V\rangle|H\rangle$ 的计数必然远大于 $|H\rangle|H\rangle$ 和 $|V\rangle|V\rangle$ 的计数. 但是, 仅仅凭借这一点还不能断定我们已经成功制备了方程(10)所表示的量子纠缠态. 因为也有可能得到的是一种 $|H\rangle|V\rangle$ 和 $|V\rangle|H\rangle$ 的非纠缠混合态. 为排除这种情况, 我们还需要在基: $|+\rangle = (|H\rangle + |V\rangle)/\sqrt{2}$, $|-\rangle = (|H\rangle - |V\rangle)/\sqrt{2}$ 下做一次测量. 对非纠缠混合态来说, 无论 H 或者 V , 它们在 $|+\rangle$ 上的投影都一样, 所以在 $|++\rangle$, $|+-\rangle$, $| - + \rangle$, $| -- \rangle$ 复合基上的测量结果应该都一样. 但是, 对纠缠态方程(10)来说, 由于是相干叠加的, 在复合基 $|+-\rangle$ 和 $| - + \rangle$ 下测量所得到的符合值就必然大于或小于(取决于所制备的态)在复合基 $|++\rangle$ 和 $| -- \rangle$ 下测量所得到的符合值.

图 4 为我们取一路光路半波片(此时不加四分之一波片)固定在 0° 和 45° , 另一路为从 0° 到 360° , 步差为 22.5° 的变化情况下在测量基 $|H/V\rangle$ 和 $|+/-\rangle$ 下所得到的符合计数值. 图中方形点表示在 $|H/V\rangle$ 测量基下光子对的符合计数及相应的拟合关联曲线, 其最大值(在测量基为 $|H\rangle|V\rangle$ 和 $|V\rangle|H\rangle$ 时)远大于最小值(在测量基为 $|H\rangle|H\rangle$ 和 $|V\rangle|V\rangle$ 时). 这说明我们得到的是与 $|H\rangle|V\rangle$ 和 $|V\rangle|H\rangle$ 相关的混合或叠加态, 而并非是与 $|H\rangle|H\rangle$ 和 $|V\rangle|V\rangle$ 混合或叠加态. 图中的圆点表示在

图 4 (网络版彩图) 极化关联曲线

Figure 4 (Color online) Polarization correlation curves.

$|+/-\rangle$ 测量基下的所测得的光子对符合计数及相应的拟合关联曲线, 同样得到了在测量基 $|+\rangle|+\rangle$ 和 $|-\rangle|-\rangle$ 时符合计数值远小于在测量基 $|+\rangle|-\rangle$ 和 $|-\rangle|+\rangle$ 时的符合计数. 这些极化关联曲线反映了光子纠缠态在不同测量基下的量子关联特性. 由此可见, 实验所制备的确实是 $|H\rangle|V\rangle$ 和 $|V\rangle|H\rangle$ 的纠缠光子态. 但同时也可以看到, 纠缠源在基矢 $|+\rangle|-\rangle$ 的对比度较差从而表明此商用纠缠源并不是理想的源. 这也正是文章后面部分对测量基优化的必要性所在.

2.2 Bell 不等式的验证

在实验上已经证实了所产生的就是光子纠缠态后, 我们就可以选取恰当的测量基来对 Bell 不等式进行检验了.

首先, 我们简单地假定实验上所得到的光子纠缠态就是方程(10)所刻划的最大纠缠态, 因而其对应的最佳测量基应该就是上节所论述的那种情况, 即: $(\alpha, \alpha', \beta, \beta') = (-45^\circ, 0^\circ, -22.5^\circ, 22.5^\circ)$. 实验上的实现是, 调节半波片到实验所需角度(本文验证 Bell 不等式时均不加四分之一波片), 并记录下光子计数器每秒的符合计数. 表 1 中 A 光路光子计数为 70000 s^{-1} , B 光路计数为 72500 s^{-1} .

由此我们得到

$$S = 2.100 \pm 0.016. \quad (11)$$

这里, Bell 函数 S 的计算是由实验测量得到的关联函数 E 来计算的; 而 E 又由实验中所测量得到的符合概率 P 直接由光子符合计数读数 $n(\alpha, \beta)$ 决定, 即

$$\begin{aligned} P(\alpha, \beta) &= \left| \langle A_\alpha |_1 \langle A_\beta |_2 \psi \rangle \right|^2 \\ &= \frac{n(\alpha, \beta)}{n(\alpha, \beta) + n\left(\alpha + \frac{\pi}{2}, \beta + \frac{\pi}{2}\right) + n\left(\alpha, \beta + \frac{\pi}{2}\right) + n\left(\alpha + \frac{\pi}{2}, \beta\right)}. \end{aligned} \quad (12)$$

表 1 纯态测量基下的符合计数

Table 1 Coincidence counts under the pure state measurement settings in a time interval of 1 s

B 路	A 路			
	-22.5°	67.5°	22.5°	112.5°
-45°	1468	3414	232	4606
45°	3325	1213	4515	295
0°	3875	1139	2013	2962
90°	898	3719	2872	1863

因而

$$\begin{aligned} E(\alpha, \beta) &= \frac{n(\alpha, \beta) + n\left(\alpha + \frac{\pi}{2}, \beta + \frac{\pi}{2}\right) - n\left(\alpha, \beta + \frac{\pi}{2}\right) - n\left(\alpha + \frac{\pi}{2}, \beta\right)}{n(\alpha, \beta) + n\left(\alpha + \frac{\pi}{2}, \beta + \frac{\pi}{2}\right) + n\left(\alpha, \beta + \frac{\pi}{2}\right) + n\left(\alpha + \frac{\pi}{2}, \beta\right)}. \end{aligned} \quad (13)$$

最后, 由定义式(4)即可计算出 S . 其误差值定义为^[18]

$$\sigma_s = \sqrt{\sum_{i=1}^{16} \left(\sigma_{n_i} \frac{\partial S}{\partial n_i} \right)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{16} n_i \left(\frac{\partial S}{\partial n_i} \right)^2}. \quad (14)$$

这里, 光子计数器的符合计数假定服从通常的泊松统计分布, 这样其每次计数的标准差就是 $\sigma_{n_i} = \sqrt{n_i}$.

显然, 上述实验所得到的 S 值虽然大于 2(即 Bell 不等式被违背), 但远未达到理想的最大值 $2\sqrt{2} \approx 2.828$.

2.3 密度矩阵及测量基的优化

以上实验的测量基取值 $\theta_1 = -45^\circ$, $\theta_1' = 0^\circ$, $\theta_2 = -22.5^\circ$, $\theta_2' = 22.5^\circ$, 是基于纠缠纯态方程(10)情况下的预想值. 如果光子纠缠态确实是这个波函数所描写的纯态的话, Bell 不等式的违背应该能达到其最大违背值^[15] $2\sqrt{2}$. 但实际测量的结果与这个预想的最大违背值相差较大. 那么, 是什么因素使得实验上未能得到最大的违背呢?

理论上, Bell 函数的取值既与纠缠光子本身的量子态有关, 也与所选取的测量基有关. 为证实这一点, 我们首先利用“量子态层析技术”^[16]来重构光子纠缠态的密度矩阵, 从而对实验所用的纠缠态进行明确的表征. 在此基础上, 我们再选取与此纠缠态相关的最佳测量基来对 Bell 不等式的违背进行验证. 首先, 两个量子比特系统的密度矩阵 ρ 可以一般地表示为^[19]

$$\rho = \sum_{\nu=1}^{16} \Gamma_\nu \gamma_\nu. \quad (15)$$

其中 $\gamma_\nu = \text{Tr}\{\Gamma_\nu \cdot \rho\}$, $\{\Gamma_\nu\}$ 为 16 个线性独立的 4×4 矩阵, 其满足如下关系:

$$\text{Tr}\{\Gamma_\nu \cdot \Gamma_\mu\} = \delta_{\nu, \mu}, \quad A = \sum_{\nu=1}^{16} \Gamma_\nu \text{Tr}\{\Gamma_\nu \cdot A\} \quad \forall A. \quad (16)$$

A 为任意 4×4 矩阵. 在实验测量中, 选定测量角度(半波片和四分之一波片的角度选取)后, 记其投影态为 ψ_ν , 则我们在探测器上读取的符合计数 n_ν 可以写为

$$n_v = N \langle \psi_v | \Gamma | \psi_v \rangle. \quad (17)$$

N 是一个独立的常量, 和光子流及探测器效率有关.

记 $B_{v,\mu} = \langle \psi_v | \Gamma | \psi_\mu \rangle$ 则 n_v 可以写成

$$n_v = \sum_{\mu=1}^{16} B_{v,\mu} \gamma_\mu, \quad (18)$$

得到

$$\gamma_v = N^{-1} \sum_{\mu=1}^{16} (B^{-1})_{v,\mu} n_\mu, \quad (19)$$

将式(19)代入式(15), 就可以得到密度矩阵

$$\rho = N^{-1} \sum_{v=1}^{16} M_v n_\mu, M_v = \sum_{\mu=1}^{16} (B^{-1})_{v,\mu} \Gamma_v, \quad (20)$$

$$N = \sum_v \text{Tr} \{ M_v \} n_v.$$

为了方便计算, 我们合适地选取了 16 个矩阵 Γ_v , 使得

$$\text{Tr} \{ M_v \} = \begin{cases} 1, v=1, 2, 3, 4, \\ 0, v=5, \dots, 16. \end{cases} \quad (21)$$

所以, 我们有

$$\begin{aligned} N &= \sum_{v=1}^4 n_v \\ &= N (\langle HH | \rho | HH \rangle + \langle HV | \rho | HV \rangle \\ &\quad + \langle VH | \rho | VH \rangle + \langle VV | \rho | VV \rangle). \end{aligned} \quad (22)$$

最后, 纠缠光子态的密度矩阵就可以重构为

$$\rho = \left(\sum_{v=1}^{16} M_v n_v \right) / \left(\sum_{v=1}^4 n_v \right). \quad (23)$$

实验中, 我们在上文提到的 Bell 不等式验证完后, 立马在相同条件下(仅加入测量密度矩阵所需的四分之一波片)重构了密度矩阵. 表 2 为密度矩阵重构所需

16 组测量基下的符合计数.

表 2 中

$$\begin{aligned} |D\rangle &= (|H\rangle + |V\rangle) / \sqrt{2}, |R\rangle = (|H\rangle - i|V\rangle) / \sqrt{2}, \\ |L\rangle &= (|H\rangle + i|V\rangle) / \sqrt{2}. \end{aligned} \quad (24)$$

这样与密度矩阵有关的参数全部得到, 从而得出重构的密度矩阵 ρ 为

$$\begin{pmatrix} 0.0208 & 0.0422 + 0.0342i & 0.0908 - 0.0268i & -0.0292 - 0.0224i \\ 0.0422 - 0.0342i & 0.5333 & 0.3523 - 0.1094i & -0.0278 + 0.0505i \\ 0.0908 + 0.0268i & 0.3523 + 0.1094i & 0.4289 & -0.0223 - 0.0606i \\ -0.0292 + 0.0224i & -0.0278 - 0.0505i & -0.0223 + 0.0606i & 0.0169 \end{pmatrix}.$$

显然, 此矩阵平方 ρ^2 的迹 $\text{Tr}(\rho^2) = 0.783 < 1$. 这表明, 实验所利用的光子纠缠源不是一个纯态纠缠光子对, 其相对于理想纠缠态式(10)的保真度^[20]为 $F = \langle \psi | \rho | \psi \rangle = 0.857$.

为了在实验上得到该商用纠缠源所允许的 Bell 最大违背, 我们还需要对测量基进行优化. 前面已经论述, Bell 函数 S 的取值由关联函数 E 决定, 而 E 又由符合计数概率 P 直接决定. 由于

$$P(\alpha, \beta) = \langle \psi_v | \rho | \psi_v \rangle. \quad (25)$$

其中测量基的一般表达式为

$$\begin{aligned} |\psi_v\rangle &= \cos(\theta_s) \cos(\theta_i) |H\rangle_s |H\rangle_i + \cos(\theta_s) \sin(\theta_i) |H\rangle_s |V\rangle_i \\ &\quad + \sin(\theta_s) \cos(\theta_i) |V\rangle_s |H\rangle_i + \sin(\theta_s) \sin(\theta_i) |V\rangle_s |V\rangle_i, \end{aligned} \quad (26)$$

其中 s, i 代表实验中的两路光路, θ 代表半波片光轴和水平方向的夹角, 只要确定出实验中所制备纠缠态的形式, 总可以利用 Mathematica^[21]找出使得 S 为最大值的测量基, 即最佳测量基. 我们的数值结果表明, 对目前的商用纠缠源, 如果测量基选取由如下的角度:

$$\theta_{os} = 14.2^\circ, \theta_{oi} = -1.5^\circ, \theta'_{os} = -21^\circ, \theta'_{oi} = 39.6^\circ. \quad (27)$$

那么, 实验上可得到的 Bell 函数最大值将为

$$S_{\text{opt-max}} = 2.320. \quad (28)$$

这将明显高于纯态假定下的测量结果. 确实, 利用我们的实验测量数据(表 3), 我们可以得到在此优化测量基下的 Bell 函数可达到

$$S = 2.254 \pm 0.016. \quad (29)$$

确实比纯态测量基所得到的相应实验结果(即表 1, 此时基于纯态测量基下的符合计数, 通过计算得到 Bell 函数值为: $S = 2.100 \pm 0.016$)有了确实提高. 只是由于实验误差的原因, 并不能达到计算得到的最大违背 2.320.

表 2 16 组测量基下的符合计数

Table 2 Coincidence counts for the selected 16 sets of linearly independent projection in a time interval of 1 s

v	A	B	n_v	v	A	B	n_v
1	$ H\rangle$	$ H\rangle$	123	9	$ D\rangle$	$ R\rangle$	1842
2	$ H\rangle$	$ V\rangle$	3151	10	$ D\rangle$	$ D\rangle$	2676
3	$ V\rangle$	$ V\rangle$	100	11	$ R\rangle$	$ D\rangle$	1216
4	$ V\rangle$	$ H\rangle$	2534	12	$ H\rangle$	$ D\rangle$	1886
5	$ R\rangle$	$ H\rangle$	1170	13	$ V\rangle$	$ D\rangle$	1185
6	$ R\rangle$	$ V\rangle$	1924	14	$ V\rangle$	$ L\rangle$	1675
7	$ D\rangle$	$ V\rangle$	1461	15	$ H\rangle$	$ L\rangle$	1435
8	$ D\rangle$	$ H\rangle$	1865	16	$ R\rangle$	$ L\rangle$	498

表 3 在优化测量基下所得的符合计数

Table 3 Coincidence counts under the optimized measurement settings in a time interval of 1 s

B 路	A 路			
	14.2°	104.2°	-21°	69°
-1.5°	909	4189	143	4985
88.5°	4009	851	4661	185
39.6°	3645	1401	1966	3092
-50.4°	1226	3688	2854	1995

3 结论

利用商用纠缠源, 本文讨论了如何得到 Bell 不等式的最佳违背. 我们的实验结果表明, 基于通常两体光子最大纠缠纯态所选取的测量基, 一般并不能得到 Bell 不等式的最佳违背. 因为实验上所获得的, 用于验证 Bell 不等式违背的光子纠缠态往往不是理

想的最大纠缠纯态, 因而所选取的测量基就不是设想中的最佳测量基.

本实验中, 我们利用量子层析技术, 重构了所用商用纠缠源的光子纠缠态的密度矩阵, 证实了实验中所得到的光子纠缠源是一个混合纠缠态. 在此基础上, 我们对具体纠缠态有关的测量基进行了优化, 得到了与理论计算值比较接近的 Bell 不等式最大违背值.

尽管限于所用商用纠缠光源的品质, 我们实验测量所得到的 Bell 不等式的违背值与该不等式的最优违背值(即 Cirel'son 极限 $S=2.828$)有明显的差距. 但可以预想, 如果纠缠源所制备出了的纠缠光子足够逼近理想纠缠纯态方程(10), 同时测量基也能够得到优化, 那么达到或者逼近 Cirel'son 极限是有可能的.

参考文献

- 1 Einstein A, Podolsky B, Rosen N. Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete? Phys Rev, 1935, 47: 777-780
- 2 Bohm D, Aharonov Y. Discussion of experimental proof for the paradox of Einstein, Rosen, and Podolsky. Phys Rev, 1957, 108: 1070-1076
- 3 Bell J S. On the Einstein Podolsky Rosen paradox. Phys, 1964, 1: 195-200
- 4 Clauser J F, Horne M A, Shimony A, et al. Proposed experiment to test hidden-variable theories. Phys Rev Lett, 1969, 23: 880-884
- 5 Aspect A. Bell's inequality test: More ideal than ever. Nature, 1999, 398: 189-190
- 6 Clauser J F, Shimony A. Bell's theorem: Experimental test and implication. Rep Prog Phys, 1978, 41: 1881-1927
- 7 Clauser J, Horne M. Experimental consequences of objective local theories. Phys Rev D, 1974, 10(2): 526-535
- 8 Aspect A, Grangier P, Roger G. Experimental tests of realistic local theories via Bell's theorem. Phys Rev Lett, 1981, 47: 460-463
- 9 Aspect A, Grangier P, Roger G. Experimental realization of Einstein-Podolsky-Rosen-Bohm gedankenexperiment: A new violation of Bell's inequalities. Phys Rev Lett, 1982, 49(2): 91-94
- 10 Aspect A, Dalibard J, Roger G. Experimental test of Bell's inequalities using time-varying analyzers. Phys Rev Lett, 1982, 49(25): 1804-1807
- 11 Ou Z Y, Mandel L. Violation of Bell's inequality and classical probability in a two-photon correlation experiment. Phys Rev Lett, 1988, 61(1): 50-53
- 12 Shih Y H, Alley C O. New type of Einstein-Podolsky-Rosen-Bohm experiment using pairs of light quanta produced by optical parametric down conversion. Phys Rev Lett, 1988, 61: 2921-2924
- 13 Weihs G, Jennewien T, Simon C, et al. Violation of Bell's inequality under strict Einstein locality conditions. Phys Rev Lett, 1998, 81(23): 5039-5043
- 14 Peng C Z, Yang T, Bao X H, et al. Phys Rev Lett, 2005, 94(15): 150501
- 15 Cirel'son B S. Quantum generalizations of Bell's inequality. Lett Math Phys, 1980, 4: 93-100
- 16 Knight P, Miller A. Measuring the Quantum States of Light. Cambridge: Cambridge University Press, 1997
- 17 蔡昕东, 彭承志, 金贤敏. 小型量子纠缠源教学系统. 中华人民共和国知识产权局, CN201110170177.2, 2011-11-23
- 18 Dehlinger D, Mitchell M. Entangled photons, nonlocality and Bell inequalities in the undergraduate laboratory. Am J Phys, 2002, 70: 903-910
- 19 James D, Kwiat P, Munro W, et al. Measurement of qubits. Phys Rev A, 2001, 64: 052312
- 20 Nielsen M, Chuang I. Quantum Computation and Information. Cambridge: Cambridge University Press, 2000
- 21 Press W, Teukolsky S, Vetterling W, et al. Numerical Recipes in Fortran 77: The Art of Scientific Computing. 2nd ed. Cambridge: Cambridge University Press, 1992

Testing the Bell's inequality violations with mixed entangled photons

GUO WeiJie¹, FAN DaiHe¹ & WEI LianFu^{1,2*}

¹Quantum Optoelectronics Laboratory, School of Physics and Technology, Southwest Jiaotong University, Chengdu 610031, China;

²State Key Laboratory of Optoelectronic Materials and Technologies, School of Physics Science and Engineering, Sun Yet-sen University, Guangzhou 510275, China

Bell's inequality plays an important role in quantum mechanics. Many experiments have been made to test the Bell's inequality by using various bipartite entangled sources. However, the maximal violation of the Bell inequality (i.e., the Cirel'son's limit) has not been reached yet, due to various practically-existing imperfections (e.g., entangled source is not the pure maximally-entangled state, and the measurement settings used are not the best ones). In this paper, we investigate experimentally an approach to enhance the violation degree of Bell's inequality with the commercialized entangled photons by optimizing the measurement settings for the experimentally-reconstructed density matrix of the entangled photons. It is shown that the measurement setting related to the pure entangled state can not get maximally violation generally. However, upon the density matrix reconstructed by tomographic technique, optimal measurement settings can be found. With these optimal settings, we consequently found that the violation degree of the Bell's inequality can be increased. This suggests a possible approach to optimize the test of Bell's inequality.

Bell inequality violation, quantum tomographic reconstruction, measurement settings

PACS: 03.65.Ud, 06.67.Mn, 03.65.Wj, 42.65.Lm

doi: 10.1360/132012-926