论文

平板弯曲自由振动的精确化动力学方程及其分析

胡超^{①②*}, MA Fai^②, 马兴瑞^③, 黄文虎^③

① 同济大学航空航天与力学学院, 上海 200092;

② 加州大学伯克利分校工程技术学院, 伯克利 94720, 美国;

③ 哈尔滨工业大学航天学院, 哈尔滨 150001

*E-mail: chaohu@tongji.edu.cn

收稿日期: 2010-08-08; 接受日期: 2011-04-28

国家自然科学基金(批准号: 10572045)和航天创新科学研究基金资助项目

摘要 该文基于弹性动力学理论, 利用 Boussinesq-Galerkin 的弹性力学通解形式和偏微分方程的算子理论, 采用了 3 个规范条件, 建立了平板弯曲的精确化动力学方程. 通过与基于三维弹性动力学和 Mindlin 板理论得到的频散曲线做对比, 评价和考量了本文提出的平板弯曲精确化动力学方程. 由于推导时没有采用任何工程假设, 因此提出的平板动力学方程是较精确的, 可用于分析较高频率下平板结构的振动和评价目前板弯曲振动理论的适用条件.

关键词 平板弯曲波动, 动力学控制方程, 算子理论, 规范条件, Mindlin 板理论, 频散关系, 解析函数

PACS: 46.40.Cd, 43.40.+s, 02.30.Em, 02.30.Tb, 46.15.Ef

1 引言

在航空航天与土木工程中广泛采用板壳结构, 其结构的动力学方程建模十分重要. 目前, 在平板结构的力学分析中所采用的支配方程主要适用于静载和较低频率的情况, 难以适应现代动力学与振动控制发展的需要. 由于薄板理论的局限性会使分析计算结果有较大的误差, 因此, 有必要研究平板结构的动力学支配方程与建模问题^[1~4].

平板理论有两种, 一种是基于各种假设的工程实用理论, 而另一种是基于三维弹性力学的数学推导方法. 实际上, 在板壳理论的发展中有两个方向, 一个方向是以 Lurie 和 Golidenveizer 等为代表的数学板壳力学理论; 而另一个方向是 Vlasov 等为代表的工

程实用板壳理论. 20 世纪中期 Reissner 运用广义余能变分原理推导了考虑剪切变形影响的平板静力学方程^[3], 即厚板弯曲理论. 后来 Mindlin 考虑了横向剪切变形和转动惯量的影响^[4], 给出了厚板振动的动力学方程. 厚板理论摒弃了经典薄板理论的基本假设, 采用其他假设, 基于三维弹性理论对平板结构力学问题做简化分析. 厚板理论弥补了经典薄板理论的不足, 其不仅可以用于厚跨比较大的结构, 而且还可以用于剪切变形和转动惯量影响较大的振动力学问题, 例如航天器姿态动力学与控制、结构运动稳定性以及平板结构中弹性波散射与开孔动应力集中问题等^[1~4].

在工程中人们常采用弹性动力学 Lamé 形式的解. Lamé 解的结构形式简单, 在求解问题时涉及到 4 个未知函数, 采用一个规范条件 $\nabla \cdot \psi$. 而 Somigliana 解

引用格式: 胡超, MA Fai, 马兴瑞, 等. 平板弯曲自由振动的精确化动力学方程及其分析. 中国科学: 物理学 力学 天文学, 2011, 41: 781~790
Hu C, Ma F, Ma X R, et al. Refined dynamic equations of the plate bending without any assumptions (in Chinese). Sci Sin Phys Mech Astron, 2011, 41: 781~790, doi: 10.1360/132010-788

要满足 4 阶波动方程式, 是矢量函数. 根据微分方程理论, 总共出现 6 个未知函数, 需要 3 个规范条件^[3]. 本文将基于弹性动力学理论, 不做任何工程假设, 利用 Boussinesq-Galerkin 弹性力学通解形式和偏微分方程算子理论, 建立平板弯曲的精确化动力学方程.

2 平板弯曲振动的精确化支配方程

根据三维弹性动力学理论, 无体力时空位移场的支配方程即 Navier 方程为^[5,6]

$$\mu_M \nabla_0^2 \mathbf{u} + (\lambda_M + \mu_M) \nabla_0 (\nabla_0 \cdot \mathbf{u}) = \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}, \quad (1)$$

其中 λ_M, μ_M 为材料的 Lamé 常数, $\lambda_M = \frac{\nu E_M}{(1+\nu)(1-2\nu)}$, $\mu_M = \frac{E_M}{2(1+\nu)}$; E_M, ν 分别为材料的弹性模量和 Poisson 比; ρ 为材料密度; t 为时间; $\nabla_0 = i\partial/\partial x + j\partial/\partial y + k\partial/\partial z$ 为三维空间 Hamilton 算子, 相应的 Laplace 算子为

$$\nabla_0^2 = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2 = \nabla^2 + \partial^2/\partial z^2.$$

任何物体都是三维的, 应基于弹性力学三维偏微分方程进行分析求解. 但是, 对于工程实际问题, 例如平板振动, 可将其简化为二维弹性动力学问题进行求解. 本文研究小挠度平板弯曲自由振动情况.

关于方程(1), Boussinesq-Galerkin 给出的解是^[5,6]

$$\mathbf{u} = 2(1-\nu) \left(\nabla_0^2 - \frac{1}{c_1^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathbf{G} - \nabla_0 (\nabla_0 \cdot \mathbf{G}), \quad (2)$$

式中 c_1, c_2 分别为弹性纵波和横波波速, $c_1^2 = \frac{\lambda_M + 2\mu_M}{\rho}$, $c_2^2 = \frac{\mu_M}{\rho}$; $\mathbf{G} = (G_1, G_2, G_3)$ 为 Somigliana 矢量势函数, 且满足方程

$$\left(\nabla_0^2 - \frac{1}{c_1^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \left(\nabla_0^2 - \frac{1}{c_2^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathbf{G} = 0. \quad (3)$$

根据 Taylor 级数展开式, 利用指数函数型算子, 则平板内任意一点的位移可描述为

$$\begin{aligned} u_x(x, y, z) &= \exp\left(z \frac{\partial}{\partial z}\right) u_x(x, y, 0), \\ u_y(x, y, z) &= \exp\left(z \frac{\partial}{\partial z}\right) u_y(x, y, 0), \\ u_z(x, y, z) &= \exp\left(z \frac{\partial}{\partial z}\right) u_z(x, y, 0). \end{aligned} \quad (4)$$

平板弯曲波动属反对称运动情况, 位移 u_x, u_y 应是坐标 z 的奇函数, 而横向位移 u_z 是坐标 z 的偶函数. 可有如下位移表达式

$$\begin{aligned} u_x(x, y, z) &= \sinh\left(z \frac{\partial}{\partial z}\right) u_x(x, y, 0), \\ u_y(x, y, z) &= \sinh\left(z \frac{\partial}{\partial z}\right) u_y(x, y, 0), \\ u_z(x, y, z) &= \cosh\left(z \frac{\partial}{\partial z}\right) u_z(x, y, 0), \end{aligned} \quad (5)$$

式中 $\sinh(\cdot), \cosh(\cdot)$ 分别为双曲正弦和双曲余弦函数.

通过分析可知, B-G 解中的 G_1, G_2 是坐标 z 的奇函数, 而 G_3 是坐标 z 的偶函数, 可有表达式

$$\begin{aligned} G_j(x, y, z) &= \sinh\left(z \frac{\partial}{\partial z}\right) G_j(x, y, 0) \\ &= \cosh\left(z \frac{\partial}{\partial z}\right) \sum_{i=1}^2 G_j^i(x, y, 0), \\ G_3(x, y, z) &= \cosh\left(z \frac{\partial}{\partial z}\right) G_3(x, y, 0) \\ &= \cosh\left(z \frac{\partial}{\partial z}\right) \sum_{i=1}^2 G_3^i(x, y, 0), \end{aligned} \quad (6)$$

其中 $\mathbf{G} = \mathbf{G}^1 + \mathbf{G}^2$, 而

$$\left(\square_j^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \mathbf{G}^j = 0, \quad \square_j^2 = \nabla^2 - \frac{1}{c_j^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}, \quad (j=1, 2)$$

为波动算子即 Lorentz 算子.

文中的三角函数型算子为

$$\begin{aligned} \frac{\sin(z \square_j)}{\square_j} &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!} z^{2n+1} \square_j^{2n}, \\ \cos(z \square_j) &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n)!} z^{2n} \square_j^{2n} \quad (j=1, 2), \end{aligned} \quad (7)$$

经推导, 可有以下式

$$\begin{aligned} \nabla_0 \cdot \mathbf{G} &= \frac{\partial G_1}{\partial x} + \frac{\partial G_2}{\partial y} + \frac{\partial G_3}{\partial z} \\ &= \sum_{j=1}^2 \frac{\sin(z \square_j)}{\square_j} \left(\frac{\partial g_1^j}{\partial x} + \frac{\partial g_2^j}{\partial y} - \square_j^2 g_3^j \right). \end{aligned} \quad (8)$$

为消除未知函数的不唯一性, 采用如下 2 个规范条件

$$\frac{\partial g_1^j}{\partial x} + \frac{\partial g_2^j}{\partial y} = 0, \quad (j=1, 2), \quad (9)$$

于是, 根据(8)式可得到如下表达式:

$$\begin{aligned}\nabla_0(\nabla_0 \cdot \mathbf{G}) = & -\sum_{j=1}^2 \left[\frac{\sin(z\alpha_j)}{\alpha_j} \alpha_j^2 \frac{\partial}{\partial x} g_3^j \right] \mathbf{i} \\ & - \sum_{j=1}^2 \left[\frac{\sin(z\alpha_j)}{\alpha_j} \alpha_j^2 \frac{\partial}{\partial y} g_3^j \right] \mathbf{j} \\ & - \sum_{j=1}^2 [\cos(z\alpha_j) \alpha_j^2 g_3^j] \mathbf{k}.\end{aligned}\quad (10)$$

平板内位移表达式为

$$\begin{aligned}\mathbf{u} = & 2(1-\nu) \left(\alpha_1^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \mathbf{G} - \nabla_0(\nabla_0 \cdot \mathbf{G}) \\ = & 2(1-\nu) \left(\alpha_1^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \sum_{j=1}^2 \mathbf{G}^j - \nabla_0(\nabla_0 \cdot \mathbf{G}),\end{aligned}\quad (11)$$

$$\begin{aligned}u_x = & \frac{\sin(z\alpha_2)}{\alpha_2} \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} g_1^2 + \sum_{j=1}^2 \frac{\sin(z\alpha_j)}{\alpha_j} \alpha_j^2 \frac{\partial}{\partial x} g_3^j, \\ u_y = & \frac{\sin(z\alpha_2)}{\alpha_2} \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} g_2^2 + \sum_{j=1}^2 \frac{\sin(z\alpha_j)}{\alpha_j} \alpha_j^2 \frac{\partial}{\partial y} g_3^j, \\ u_z = & \cos(z\alpha_2) \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} g_3^2 + \sum_{j=1}^2 \cos(z\alpha_j) \alpha_j^2 g_3^j.\end{aligned}\quad (12)$$

基于平板理论, 采用中面横向位移以及中面法线转角描述平板结构内的广义位移

$$\begin{aligned}\psi_x = & -\frac{\partial u_x}{\partial z} \Big|_{z=0} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} g_1^2 - \sum_{j=1}^2 \alpha_j^2 \frac{\partial g_3^j}{\partial x}, \\ \psi_y = & -\frac{\partial u_y}{\partial z} \Big|_{z=0} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} g_2^2 - \sum_{j=1}^2 \alpha_j^2 \frac{\partial g_3^j}{\partial y}, \\ w = & u_z \Big|_{z=0} = \nabla^2 g_3^2 + \alpha_1^2 g_3^1.\end{aligned}\quad (13)$$

设中面法线转角可描述为^[3,4,7]

$$\psi_x = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \psi_y = \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial x}.\quad (14)$$

为了用中面的横向位移和中面的法线转角代替函数 g_1^2, g_2^2, g_3^2 , 通过推导得到如下关系式

$$\begin{aligned}g_1^2 = & -T_2^{-2} \left(\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial E}{\partial x} \right); \quad g_2^2 = T_2^{-2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial E}{\partial y} \right), \\ g_3^1 = & -T_2^{-2} \alpha_1^{-2} (\alpha_2^2 w + \nabla^2 F); \quad g_3^2 = T_2^{-2} (F + w - E),\end{aligned}\quad (15)$$

其中 T_j 是时间微分算子 $T_j^2 = \frac{1}{c_j^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}$, ($j=1,2$);

$F = -\alpha_1^2 g_3^1 - \alpha_2^2 g_3^2 + E$, $\nabla^2 E = 0$. 算子的负指数表示微分算子的逆, 可利用 Green 函数表示. 在具体确定未知函数 F 时, 可采用另一个规范条件 $E = 0$.

这样, 平板振动的位移表达式为

$$\begin{aligned}u_x = & \sum_{j=1}^2 (-1)^{j-1} \frac{\sin(z\alpha_j)}{\alpha_j} \frac{\partial w}{\partial x} \\ & - T_2^{-2} \sum_{j=1}^2 (-1)^{j-1} \frac{\sin(z\alpha_j)}{\alpha_j} \nabla^2 \left(\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ & - \frac{\sin(z\alpha_2)}{\alpha_2} \left(\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} \right), \\ u_y = & \sum_{j=1}^2 (-1)^{j-1} \frac{\sin(z\alpha_j)}{\alpha_j} \frac{\partial w}{\partial y} \\ & - T_2^{-2} \sum_{j=1}^2 (-1)^{j-1} \frac{\sin(z\alpha_j)}{\alpha_j} \nabla^2 \left(\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ & - \frac{\sin(z\alpha_2)}{\alpha_2} \left(\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial x} \right), \\ u_z = & \cos(z\alpha_1) w - T_2^{-2} \sum_{j=1}^2 (-1)^{j-1} \cos(z\alpha_j) \nabla^2 (F + w).\end{aligned}\quad (16)$$

根据 Hooke 定律, 可得应力分量如下:

$$\begin{aligned}\tau_{zx} = & 2\mu_M \cos(z\alpha_1) \frac{\partial w}{\partial x} \\ & - 2\mu_M T_2^{-2} \sum_{j=1}^2 (-1)^{j-1} \cos(z\alpha_j) \nabla^2 \left(\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ & - \mu_M \cos(z\alpha_2) \left(\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \right),\end{aligned}\quad (17a)$$

$$\begin{aligned}\tau_{zy} = & 2\mu_M \cos(z\alpha_1) \frac{\partial w}{\partial y} \\ & - 2\mu_M T_2^{-2} \sum_{j=1}^2 (-1)^{j-1} \cos(z\alpha_j) \nabla^2 \left(\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ & - \mu_M \cos(z\alpha_2) \left(\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial x} \right),\end{aligned}\quad (17b)$$

$$\begin{aligned}\sigma_z = & 2\mu_M T_2^{-2} \sum_{j=1}^2 (-1)^{j-1} \frac{\sin(z\alpha_j)}{\alpha_j} \nabla^2 \nabla^2 (F + w) \\ & - (\lambda_M + 2\mu_M) T_1^2 T_2^{-2} \frac{\sin(z\alpha_1)}{\alpha_1} \nabla^2 (F + w) \\ & + (\lambda_M + 2\mu_M) T_1^2 \frac{\sin(z\alpha_1)}{\alpha_1} w \\ & - 2\mu_M \frac{\sin(z\alpha_1)}{\alpha_1} \nabla^2 w + 2\mu_M \frac{\sin(z\alpha_2)}{\alpha_2} \nabla^2 (F + w).\end{aligned}\quad (17c)$$

把平板上下表面剪力为零的自由边界条件代入到(17a)和(17b) 式中, 可得如下方程

$$\cos\left(\frac{h}{2}\alpha_1\right) \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{1}{2} \cos\left(\frac{h}{2}\alpha_2\right) \left(\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)$$

$$\begin{aligned}
 & -T_2^{-2} \sum_{j=1}^2 (-1)^{j-1} \cos\left(\frac{h}{2}\alpha_j\right) \nabla^2 \left(\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\
 & - \frac{1}{2} \cos\left(\frac{h}{2}\alpha_2\right) \frac{\partial f}{\partial y} = 0, \\
 & \cos\left(\frac{h}{2}\alpha_1\right) \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{1}{2} \cos\left(\frac{h}{2}\alpha_2\right) \left(\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\
 & - T_2^{-2} \sum_{j=1}^2 (-1)^{j-1} \cos\left(\frac{h}{2}\alpha_j\right) \nabla^2 \left(\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\
 & + \frac{1}{2} \cos\left(\frac{h}{2}\alpha_2\right) \frac{\partial f}{\partial x} = 0,
 \end{aligned} \quad (18)$$

式中 h 是平板的厚度.

根据复变函数理论, 方程(18)可看成是一个解析函数的实部和虚部所满足的 **Cauchy-Riemann**^[3,4,7] 条件. 此时, 方程的非齐次解并不影响应力状态的解, 因此可有

$$\begin{aligned}
 & \cos\left(\frac{h}{2}\alpha_1\right) w - \frac{1}{2} \cos\left(\frac{h}{2}\alpha_2\right) (F + w) \\
 & - T_2^{-2} \sum_{j=1}^2 (-1)^{j-1} \cos\left(\frac{h}{2}\alpha_j\right) \nabla^2 (F + w) = 0, \quad (19a)
 \end{aligned}$$

$$\cos\left(\frac{h}{2}\alpha_2\right) f = 0. \quad (19b)$$

根据整函数理论, (19b)式的余弦函数型算子可展成如下形式

$$\prod_{m=1}^{\infty} \left[1 - \frac{h^2 \alpha_2^2}{(2m-1)^2 \pi^2} \right] f = 0. \quad (20)$$

对方程(20)的左端无穷乘积级数进行截断, 可得到如下形式的 2 阶波动方程

$$\nabla^2 f - \left(\frac{\pi^2}{h^2} + \frac{1}{c_2^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) f = 0. \quad (21)$$

根据(19a)式, 以及把平板上下表面正应力为零的边界条件代入到(17c)式中, 可得平板波动的支配方程

$$\begin{aligned}
 & T_2^{-2} \sum_{j=1}^2 (-1)^{j-1} \cos\left(\frac{h}{2}\alpha_j\right) \nabla^2 (F + w) \\
 & + \frac{1}{2} \cos\left(\frac{h}{2}\alpha_2\right) (F + w) - \cos\left(\frac{h}{2}\alpha_1\right) w = 0, \\
 & T_2^{-2} \sum_{j=1}^2 (-1)^{j-1} \frac{\sin\left(\frac{h}{2}\alpha_j\right)}{\alpha_j} \nabla^2 \nabla^2 (F + w)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - \frac{1}{2} \left[\frac{\sin\left(\frac{h}{2}\alpha_1\right)}{\alpha_1} - \frac{2 \sin\left(\frac{h}{2}\alpha_2\right)}{\alpha_2} \right] \nabla^2 (F + w) \\
 & - \frac{\sin\left(\frac{h}{2}\alpha_1\right)}{\alpha_1} \nabla^2 w + \frac{1}{2} T_2^2 \frac{\sin\left(\frac{h}{2}\alpha_1\right)}{\alpha_1} w = 0.
 \end{aligned} \quad (22)$$

由(22)式可得关于未知函数 F 和 w 的算子代数方程

$$\begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (23)$$

其中各算符的表达式为

$$D_{11} = T_2^{-2} \sum_{j=1}^2 (-1)^{j-1} \cos\left(\frac{h}{2}\alpha_j\right) \nabla^2 + \frac{1}{2} \cos\left(\frac{h}{2}\alpha_2\right),$$

$$\begin{aligned}
 D_{12} &= T_2^{-2} \sum_{j=1}^2 (-1)^{j-1} \cos\left(\frac{h}{2}\alpha_j\right) \nabla^2 - \cos\left(\frac{h}{2}\alpha_1\right) \\
 &+ \frac{1}{2} \cos\left(\frac{h}{2}\alpha_2\right),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 D_{21} &= T_2^{-2} \sum_{j=1}^2 (-1)^{j-1} \frac{\sin\left(\frac{h}{2}\alpha_j\right)}{\alpha_j} \nabla^2 \nabla^2 \\
 &- \frac{1}{2} \frac{\sin\left(\frac{h}{2}\alpha_1\right)}{\alpha_1} \nabla^2 + \frac{\sin\left(\frac{h}{2}\alpha_2\right)}{\alpha_2} \nabla^2,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 D_{22} &= T_2^{-2} \sum_{j=1}^2 (-1)^{j-1} \frac{\sin\left(\frac{h}{2}\alpha_j\right)}{\alpha_j} \nabla^2 \nabla^2 - \frac{3}{2} \frac{\sin\left(\frac{h}{2}\alpha_1\right)}{\alpha_1} \nabla^2 \\
 &+ \frac{\sin\left(\frac{h}{2}\alpha_2\right)}{\alpha_2} \nabla^2 + \frac{1}{2} T_2^2 \frac{\sin\left(\frac{h}{2}\alpha_1\right)}{\alpha_1}.
 \end{aligned}$$

(23)式算子矩阵的行列式为

$$\begin{aligned}
 & D_d \\
 &= T_2^{-2} \left[\frac{\sin\left(\frac{h}{2}\alpha_1\right)}{\alpha_1} \cos\left(\frac{h}{2}\alpha_2\right) - \frac{\sin\left(\frac{h}{2}\alpha_2\right)}{\alpha_2} \cos\left(\frac{h}{2}\alpha_1\right) \right] \nabla^2 \nabla^2 \\
 &- \left[\frac{\sin\left(\frac{h}{2}\alpha_1\right)}{\alpha_1} \cos\left(\frac{h}{2}\alpha_2\right) - \frac{\sin\left(\frac{h}{2}\alpha_2\right)}{\alpha_2} \cos\left(\frac{h}{2}\alpha_1\right) \right] \nabla^2 \\
 &+ \frac{1}{4} T_2^2 \frac{\sin\left(\frac{h}{2}\alpha_1\right)}{\alpha_1} \cos\left(\frac{h}{2}\alpha_2\right),
 \end{aligned} \quad (24)$$

于是, 以横向位移函数描述的 4 阶偏微分方程为

$$D_d w = 0. \quad (25)$$

将方程(25)的无穷阶算子级数截断后可得平板

振动的支配方程

$$\nabla^2 \nabla^2 w - \frac{1}{2} \frac{3-2\kappa}{1-\kappa} \frac{1}{c_2^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \nabla^2 w + \frac{3}{4(1-\kappa)} \frac{1}{c_2^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{4}{h^2} + \frac{1}{6} \frac{1}{c_1^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{1}{2} \frac{1}{c_2^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) w = 0, \quad (26a)$$

$$D \nabla^2 \nabla^2 w - (2-\nu) D T_2^2 \nabla^2 w + C T_2^2 w + \left(\frac{7}{8} - \nu \right) D T_2^4 w = 0, \quad (26b)$$

式中 $\kappa = \frac{c_2^2}{c_1^2} = \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}$; C, D 分别为平板的抗剪刚度和抗弯刚度, $C = \frac{E_M h}{2(1+\nu)}$, $D = \frac{E_M h^3}{12(1-\nu^2)}$.

不失一般性, 研究问题的稳态解, 设

$$w = \tilde{w} e^{-i\omega t}, \quad F = \tilde{F} e^{-i\omega t}, \quad f = \tilde{f} e^{-i\omega t}, \quad (27)$$

其中 ω 是平板弯曲振动的圆频率; i 是虚数单位, $i^2 = -1$.

为研究问题方便, 在以下公式推导和分析中略去时间因子和未知势函数上的符号 $\sim$. 于是, 由(26)式可得频域内平板横向位移函数应满足的方程为

$$\nabla^2 \nabla^2 w + \frac{1}{2} \frac{3-2\kappa}{1-\kappa} k_2^2 \nabla^2 w - \frac{3}{4(1-\kappa)} k_2^4 \left(\frac{4}{k_2^2 h^2} - \frac{1}{6} \kappa - \frac{1}{2} \right) w = 0, \quad (28a)$$

$$\prod_{j=1}^2 (\nabla^2 + \alpha_j^2) w = 0, \quad (28b)$$

式中 $\alpha_j (j=1, 2)$ 是散射波波数, 满足方程

$$\alpha^4 - (2-\nu) k_2^2 \alpha^2 - 6(1-\nu) k_2^4 \left(\frac{1}{k_2^2 h^2} - \frac{1}{48} \frac{7-8\nu}{(1-\nu)} \right) = 0.$$

而基于 Mindlin 板理论得到的是

$$\alpha^4 - \left(\frac{12}{\pi^2} + \frac{(1-\nu)}{2} \right) k_2^2 \alpha^2 - 6(1-\nu) k_2^4 \left(\frac{1}{k_2^2 h^2} - \frac{1}{\pi^2} \right) = 0,$$

其中 $k_j^2 = \omega^2 / c_j^2 (j=1, 2)$.

此时相应的广义位移势函数 $F(x, y)$ 为

$$F = F_1 + F_2 = \sum_{j=1}^2 (\delta_j - 1) w_j, \quad (29)$$

其中 $(\nabla^2 + \alpha_j^2) w_j = 0$; $\delta_j (j=1, 2)$ 是位移势函数比例系数,

$$\delta_j = \frac{16 + 2(\alpha_j^2 - \kappa k_2^2) h^2}{8 + [(3-2\kappa)\alpha_j^2 - k_2^2] h^2}.$$

而基于 Mindlin 板理论得到的模式系数为

$$\delta_1 = -\frac{2}{1-\nu} \frac{\alpha_1^2 h^2}{\pi^2 - k_2^2 h^2}, \quad \delta_2 = -\frac{2}{1-\nu} \frac{\alpha_2^2 h^2}{\pi^2 - k_2^2 h^2}.$$

将(29)式代入到(16)式中, 我们可以得到板结构中的应力表达式

$$\sigma_x = \lambda_M \theta + 2\mu_M \varepsilon_x = -z(1-2\kappa)\mu_M \left[(\nabla^2 + k_2^2) w + \sum_{j=1}^2 (\delta_j - 1) \nabla^2 w_j \right]$$

$$- 2\mu_M z \left[\sum_{j=1}^2 (\delta_j - 1) \frac{\partial^2 w_j}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right],$$

$$\sigma_y = \lambda_M \theta + 2\mu_M \varepsilon_y$$

$$= -z(1-2\kappa)\mu_M \left[(\nabla^2 + k_2^2) w + \sum_{j=1}^2 (\delta_j - 1) \nabla^2 w_j \right],$$

$$- 2\mu_M z \left[\sum_{j=1}^2 (\delta_j - 1) \frac{\partial^2 w_j}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right],$$

$$\tau_{xy} = 2\mu_M \varepsilon_{xy} = -2\mu_M z \sum_{j=1}^2 (\delta_j - 1) \frac{\partial^2 w_j}{\partial x \partial y}$$

$$+ \mu_M z \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right),$$

$$\tau_{zx} = 2\mu_M \varepsilon_{zx}$$

$$= 2\mu_M \left[-\frac{1}{2} \sum_{j=1}^2 (\delta_j - 1) \frac{\partial w_j}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial y} \right]$$

$$+ \frac{1}{4} z^2 [(3-2\kappa)\nabla^2 + k_2^2] \sum_{j=1}^2 (\delta_j - 1) \frac{\partial w_j}{\partial x}$$

$$+ \frac{1}{4} z^2 (1-2\kappa)(\nabla^2 + k_2^2) \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{1}{4} z^2 (\nabla^2 + k_2^2) \frac{\partial f}{\partial y},$$

$$\tau_{zy} = 2\mu_M \varepsilon_{zy}$$

$$= 2\mu_M \left[-\frac{1}{2} \sum_{j=1}^2 (\delta_j - 1) \frac{\partial w_j}{\partial y} + \frac{1}{2} \frac{\partial w}{\partial y} \right]$$

$$+ \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{4} z^2 [(3-2\kappa)\nabla^2 + k_2^2] \sum_{j=1}^2 (\delta_j - 1) \frac{\partial w_j}{\partial y}$$

$$+ \frac{1}{4} z^2 (1-2\kappa)(\nabla^2 + k_2^2) \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{1}{4} z^2 (\nabla^2 + k_2^2) \frac{\partial f}{\partial x}]. \quad (30)$$

而平板内相应的广义内力可描述为

$$M_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_x z dz = -D(1-\nu) \left[\sum_{j=1}^2 (\delta_j - 1) \frac{\partial^2 w_j}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right]$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{2}D\nu\left[(\nabla^2+k_2^2)w+\sum_{j=1}^2(\delta_j-1)\nabla^2w_j\right], \\
M_y &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\sigma_y z dz = -D(1-\nu)\left[\sum_{j=1}^2(\delta_j-1)\frac{\partial^2 w_j}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right] \\
& -\frac{1}{2}D\nu\left[(\nabla^2+k_2^2)w+\sum_{j=1}^2(\delta_j-1)\nabla^2w_j\right], \\
M_{xy} &= M_{yx} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\tau_{yx} z dz \\
&= -D(1-\nu)\left[\sum_{j=1}^2(\delta_j-1)\frac{\partial^2 w_j}{\partial x\partial y}-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)\right], \\
Q_x &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\tau_{zx} dz = -C\left[\sum_{j=1}^2(\delta_j-1)\frac{\partial w_j}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\right] \\
&+ C\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{1}{4}D\left\{\nu(\nabla^2+k_2^2)\frac{\partial w}{\partial x}\right. \\
&+ [(2-\nu)\nabla^2+(1-\nu)k_2^2]\sum_{j=1}^2(\delta_j-1)\frac{\partial w_j}{\partial x} \\
&+ (1-\nu)(\nabla^2+k_2^2)\frac{\partial f}{\partial y}\left.\right\}, \\
Q_y &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\tau_{zy} dz = -C\left[\sum_{j=1}^2(\delta_j-1)\frac{\partial w_j}{\partial y}-\frac{\partial f}{\partial x}\right] \\
&+ C\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{1}{4}D\left\{\nu(\nabla^2+k_2^2)\frac{\partial w}{\partial y}\right. \\
&+ [(2-\nu)\nabla^2+(1-\nu)k_2^2]\sum_{j=1}^2(\delta_j-1)\frac{\partial w_j}{\partial y} \\
&- (1-\nu)(\nabla^2+k_2^2)\frac{\partial f}{\partial x}\left.\right\}. \quad (31)
\end{aligned}$$

3 精确化方程的考量与讨论

本文分别采用经典薄板理论、只考虑转动惯量的影响的板振动方程、Mindlin 板理论、三维弹性动力学理论以及本文给出的平板振动精确化动力学方程, 绘出了平板弯曲波动的频散曲线. 其相应的频散方程如下:

$$\frac{c}{c_2} = \sqrt{\frac{4\pi^2}{6(1-\nu)}\frac{h}{\lambda}} \quad (32)$$

(基于经典薄板理论的显式表示),

$$\frac{c}{c_2} = \sqrt{\frac{4\pi^2}{6(1-\nu)}\left[1+\frac{\pi^2}{3}\left(\frac{h}{\lambda}\right)^2\right]^{-1}}\left(\frac{h}{\lambda}\right) \quad (33)$$

(只考虑转动惯量修正的显式表示),

$$\frac{\pi^2}{3}\left(\frac{h}{\lambda}\right)^2\left(1-\frac{c^2}{\kappa^2 c_2^2}\right)\left(\frac{c_p^2}{c^2}-1\right)=1 \quad (34)$$

(考虑转动惯量和剪切变形修正的隐式表示),

$$\frac{4c_2^2\sqrt{(c_2^2-\kappa c^2)(c_2^2-c^2)}}{(2c_2^2-c^2)^2} = \frac{\tanh\left[\frac{h}{\lambda}\frac{2\pi}{c_2}\sqrt{c_2^2-\kappa c^2}\right]}{\tanh\left[\frac{h}{\lambda}\frac{2\pi}{c_2}\sqrt{c_2^2-c^2}\right]} \quad (35)$$

(基于三维弹性动力学理论的隐式表示),

其中 $c_p^2 = \frac{E_M}{\rho(1-\nu^2)}$, 本文提出的平板动力学方程对

应的频散关系参见(28)式; λ 是弹性波波长.

在绘出频散曲线时, 图 1 和 2 中的 Poisson 比分别为 0.50 和 0.30. 根据图 1 可以看到, 当 Poisson 比

图 1 基于不同板结构动力学方程得到的频散曲线对比
Figure 1 Dispersion relation by the different theories.

图 2 基于不同板结构动力方程得到的频散曲线对比

Figure 2 Dispersion relation by the different theories.

取为 $\nu=0.50$ 时, 各频散曲线与基于三维弹性理论得到的频散曲线相差较大, 而本文给出的频散曲线与基于三维弹性动力学得到的频散曲线相差较小.

另外, 我们根据(28)式和 Mindlin 板理论, 可以绘出散射波数与剪切波数之间的关系曲线, 如图 3 和 4 所示. 图 3 和 4 中的 Poisson 比分比取为 0.50 和 0.30. 由图 3 和 4 可以看到, 根据本文板理论和 Mindlin 板理论分别得到的散射波数 α_1^2 是非常接近的, 而得到的散射波数 α_2^2 相差得还是比较大的. 随着振动频率的增加, 其散射波数 α_2^2 的变大.

对于波模 α_1 , 在任何频率下其散射波数 α_1^2 都大于零, 可见此波模处于传播区内. 对于波模 α_2 , 在频率比较低的情况下 ($h/\lambda_2 < 0.50$), 散射波数 α_2^2 小于零, 此波模处于截止频域内. 此波模被称为局部化的驻波. 而当频率比较高时 ($h/\lambda_2 > 0.50$), 散射波数 α_2^2 小于零, 可见此波模处于传播区内. 此波模被属

图 3 基于不同板动力方程得到的散射波数对比

Figure 3 Wavenumbers by the different theories.

图 4 基于不同板动力方程得到的散射波数对比

Figure 4 Wavenumbers by the different theories.

于传播波.

根据(29)式和 Mindlin 板理论, 我们绘出了模式比例系数的关系曲线, 如图 5 和 6 所示. 图 5 和 6 中的 Poisson 比比取为 0.35 和 0.30. 由图 5 和 6 可以看到, 根据本文板理论和 Mindlin 板理论分别得到的模式比例系数 δ_1 的变化趋势与高频渐近值是相同的, 而在接近静载时的低频值不同. 所得到的模式比例系数 δ_2 的变化趋势基本一致, 但是渐近值不同.

通过分析可以看到, Mindlin 板理论在 Poisson 比较小, 同时振动频率较低时, 本文结果与 Mindlin 板理论的结果比较接近. 可以看到 Mindlin 板理论主要适用于中频和 Poisson 比不大不小的情况.

根据参考文献[6], 可知 Mindlin 板理论的适用范围主要在 $\omega/\omega_0 < 1.0$, 即 $h/\lambda_2 < 0.5$. 所给出的平板开孔动应力集中系数的数值结果也没有表现出, 当频率非常高时其动应力集中系数趋近于 1 的特点. 可见 Mindlin 板理论还是有其应用局限性的. 而本文提出的动力学模型是完全基于数学弹性动力学理论得到的, 它的应用局限性就小些.

图 5 基于不同板动力方程得到的模式比例系数

Figure 5 Mode coefficients by the different theories.

图 6 基于不同板动力方程得到的模式比例系数

Figure 6 Mode coefficients by the different theories.

4 结论

本文提出的平板动力学新模型的主要特点是, 完全基于三维弹性动力学理论, 没有采用任何基本假设, 直接采用偏微分算子和复变函数解析理论等推导得到了更为精化的平板弯曲振动方程. 本文提出的平板动力学理论可望能够用于评价工程平板振动的近似理论的精确性和适用条件.

通过分析可以看到, 基于本文平板动力学支配方程得到的频散关系非常接近于基于三维弹性动力学理论得到的频散方程. 说明本文给出的平板内弯曲波动过程的频散关系是比较准确的. 可见, 本文基于三维弹性的数学理论直接推导得到的平板弯曲振动的支配方程是更为精确的动力学方程. 它不仅适用于平板低频振动情况, 而且还适用于高频振动情况. 不会产生由于结构动力学近似理论造成的高频弥散或截止频率等现象.

另外, 在相同的参数情况下, 本文分别基于著名的 Mindlin 板动力学方程和本文给出的厚板振动方程, 分析计算了平板弯曲的散射波数和模式比例系数.

结果表明: Mindlin 板理论的结果与本文的结果还是比较接近的, 特别是在中频情况下. 在低频范围内, 即当 $h/\lambda < 0.50$ 时, 与 Mindlin 板理论一样都与三维弹性理论得到的频散关系一致的. 当振动频率比较高时, 即当 $h/\lambda > 0.50$ 时, 本文提出的平板振动方程模型更接近于基于三维弹性动力学得到的频散关系, 比 Mindlin 板理论的结果误差要小.

随着现代科学技术的进步, 研究对象开始朝着高速、高频的方向发展. 本文提出的平板弯曲振动的支配方程, 有望能在航天器挠性结构、宽带振动频率的动力学与稳定性的研究中应用^[8,9]. 实现对复杂结

构的精确化动力学分析和实施振动主动控制, 使大型结构的动力学行为能够把握在人们的控制范围内^[10].

可以看到, 在低频振动频率下, 平板中存在着一个扩展型的弯曲波传播模和一个衰减性的局部化振动模. 而在较高的振动频率下, 平板中的两个弯曲波模都是属于扩展形式的传播模. 平板弯曲振动时, 结构中的弯曲模式由一个截断后得到的 4 阶偏微分方程描述, 在稳定情况下, 可通过算子分解后得到两个 Helmholtz 型方程; 同时, 结构中还存在一个描述剪切运动的模式, 由一个截断后得到的 2 阶偏微分方程描述, 在稳定情况下, 即变为一个 Helmholtz 型方程.

参考文献

- 1 Ma X R, Gou X Y, Li T S, et al. Development generalization of spacecraft dynamics (in Chinese). J Astronaut, 2000, 21(3): 1-5 [马兴瑞, 苟兴宇, 李铁寿, 等. 航天器动力学发展概况. 宇航学报, 2000, 21 (3): 1-5]
- 2 Hu C, Chen T, Han G, et al. Flexural wave propagation and localized vibration in narrow Mindlin's plate. J Sound Vib, 2007, 306(3-5): 389-399
- 3 Reissner E. On the theory of transverse bending of elastic plates. Int J Solids Struct, 1976, 12(8): 545-554
- 4 Mindlin R D. Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic elastic plates. ASME J Appl Mech, 1951, 18: 31-36
- 5 Eringen A C, Suhubi E S. Elastodynamics, Volume II Linear Theory. New York, San Francisco, London: Academic Press, 1975
- 6 Pao Y H, Mao C C. Diffraction of Elastic Waves and Dynamic Stress Concentrations (in Chinese). Liu D K, Su X Y, Trans. Beijing: Science Press, 1993. 230-231 [鲍亦兴, 毛昭宙. 弹性波的衍射与动应力. 刘殿魁, 苏先樾, 译. 北京: 科学出版社, 1993. 230-231]
- 7 Hu H C. Variational Principle in Elasticity and Its Applications (in Chinese). Beijing: Science Press, 1981 [胡海昌. 弹性力学的变分原理及其应用. 北京: 科学出版社, 1981]
- 8 Liang L F, Liu S Q, Zhou J S. Quasi-variational principles of single flexible body dynamics and their applications. Sci China Ser G-Phys Mech Astron, 2009, 52(5): 775-787
- 9 Liu D K, Hu C. Scattering of flexural wave and dynamic stress concentration in Mindlin thick plates. Acta Mech Sin, 1996, 12(2): 169-185
- 10 Lasiecka I, Triggiani R. Control Theory for Partial Differential Equations: Continuous and Approximation Theories. Cambridge: Cambridge University Press, 2000

Refined dynamic equations of the plate bending without any assumptions

HU Chao^{1,2*}, MA Fai², MA XingRui³ & HUANG WenHu³

¹ *School of Aerospace Engineering and Applied Mechanics, Tongji University, Shanghai 200092, China;*

² *Department of Mechanical Engineering, University of California, Berkeley 94720, USA;*

³ *School of Astronautics, Harbin Institute of Technology, Harbin 150001, China*

In this paper, based on the theory of elastodynamics, applied the general solution of Boussinesq-Galerkin and the operator theory of partial differential equations, the refined dynamic equations of the plate flexural motion has been obtained by using three gauge conditions. And the dispersion relations, which are from the given theory, three dimension theory of elasticity and Mindlin's plate theory, have been compared. The results of refined dynamic equations and applicable condition have been analyzed. Since derivation of the dynamic equation has been conducted without any assumptions, so the proposed equation of plate bending is exact, this can be used to analyze high frequency vibration of plate bending and to evaluate the applicable condition of the engineering plate theory.

plate flexural motion, dynamic governing equation, operator theory, gauge condition, Mindlin's plate theory, dispersion relation, analytic function

PACS: 46.40.Cd, 43.40.+s, 02.30.Em, 02.30.Tb, 46.15.Ef

doi: 10.1360/132010-788