胡海昌解的完备性与逼近性

张鸿庆　王震宇
(大连工学院应用数学研究所)

无体积力作用下各向同性弹性体 A (R^3 中的单连通开集)的弹性位移 U 满足 Lamé 方程:

$$\Delta U + \frac{1}{1-2r}\,\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,U = 0, \quad \left(0 < r < \frac{1}{2}\right).$$

如果存在 A 上的调和函数 f 与重调和函数 g, 使得

$$U = -\,\mathrm{grad}\,D_3 g + (-D_2 f,\ D_1 f,\ 2(1-r)\Delta g), \tag{1}$$

我们则称 U 可以表示成胡海昌解 (1), 这里 $D_j = \dfrac{\partial}{\partial x_j}$; $j = 1, 2, 3$. 如果 A 的每个弹性位移都可以表示成胡海昌解,则称胡海昌解在 A 上是完备的 (参阅文献 [1] 和 [2]). 胡海昌解及其完备性在国内外都引起了一些学者的注意(见文献 [3] 的评述). 文献 [4] 证明了这个解在凸区域上的完备性,文献 [2] 则指出了通常在非 x_3-凸区域上这个解不完备, 并且在一类较特殊的 x_3-凸区域上证明了完备性. 这里所谓区域是 x_3-凸的是指该区域与任意平行于 x_3-轴的直线的交集总是一个开区间或者空集. 对于这个问题,我们得到了如下结果:

定理 1　(i) 胡海昌解在 A 上完备的充分条件是 $D_3(\mathrm{Ker}\Delta) = \mathrm{Ker}\Delta$. 此处, $\mathrm{Ker}\Delta = \{v: v \in C^\infty(A),\ \Delta v = 0\}$.

(ii) 如果 A 是星形区域,这个条件也是必要的.

定理 2　如果 A 是 x_3-凸区域,则胡海昌解在 A 上完备.

除了用胡海昌解表示弹性位移 U, 我们自然还可以考虑用胡海昌解逼近 U. 如果在 A 上对于每个弹性位移 U, 都存在一个调和函数序列 $f^{(j)}$ 和重调和函数序列 $g^{(j)}$, 使得 $U^{(j)} = -\mathrm{grad}D_3 g^{(j)} + (-D_2 f^{(j)}, D_1 f^{(j)}, 2(1-r)\Delta g^{(j)})$ 以及 $U^{(j)}$ 的各阶导数在 A 内的任何紧集 K 上都一致收敛于 U 以及相应的各阶导数,我们就说胡海昌解在 A 上具有逼近性. 文献 [5] 在研究 Neuber 解时,曾采用过类似的逼近概念.

与逼近性密切相关的是 A 的洞. 设 H 是余集 $R^3\backslash A$ 的某个紧致的连通分集,则 H 恰好是 A 的一个洞. 记 I 为 A 的所有洞组成的集合,可以证明 $L = A \cup \left(\bigcup\limits_{H\in I} H\right)$ 是开集 (参阅文献 [6]). 如果存在一个紧集 K 和开集 V 以及 I 的一个分解: $I = I_1 \cup I_2$ ($I_1 \neq \varnothing$), 满足 $\bigcup\limits_{H\in I_1} H \subset K \subset V \subset L$, 而且 $V \cap \left(\bigcup\limits_{H\in I_2} H\right) = \varnothing$, 我们就称 A 的洞是可以分离的. 容易知道,如果 A 具有有限多个洞(这是实际应用中常见的情形),则一定可以分离. 若 A 没有洞,也称 A 的洞不能分离. 显而易见,有洞的区域一定是非 x_3-凸的. 我们将证明

定理 3　当且仅当 A 的洞不能分离时,胡海昌解在 A 上具有逼近性.

本文 1984 年 7 月 2 日收到.

一个实用的推论是：若A没有洞，则胡海昌解可以逼近任何弹性位移，而当A具有有限多个洞时，该解就没有这种逼近性.

定理 1(i) 的证明　众所周知，每个位移函数U都可以表示成 Papkovitch 解

$$U=(w^1,w^2,w^3)-\frac{1}{4}(1-r)^{-1}\mathrm{grad}\left(w^0+\sum_{i=1}^{3}x_iw^i\right),\tag{2}$$

其中 $w^j\in\mathrm{Ker}\Delta(j=0,1,2,3)$. 由于假定 $D_3(\mathrm{Ker}\Delta)=\mathrm{Ker}\Delta$，存在 $h\in\mathrm{Ker}\Delta$ 满足 $D_3^2h=-(D_1w^1+D_2w^2)$. 作调和函数

$$e=\frac{1}{4}(1-r)^{-1}\left(w^0+\sum_{i=1}^{3}x_iw^i\right)-D_3g^*,$$

其中g^*是方程

$$\Delta g^*=\frac{1}{2}(1-r)^{-1}(w^3-D_3h)$$

的解. 利用方程 $D_3e^*=e$ 和 $D_3h^*=h$ 的调和函数解e^*和h^*，可以定义重调和函数g为 $g=g^*+e^*-h^*$. 记向量函数 $V=(D_3w^2-D_2D_3h,\ D_1D_3h-D_3w^1,\ D_2w^1-D_1w^2)$，因 $\mathrm{rot}\,V=0$，存在函数m满足 $\mathrm{grad}\,m=V$. 又令 $W=(w^2-D_2h,\ D_1h-w^1,\ m)$，亦有 $\mathrm{rot}\,W=0$，于是存在函数f满足 $\mathrm{grad}\,f=W$，而且 $\Delta f=\mathrm{div}W=0$. 对于 (2) 式中的U及上述的f和g可以直接验证 (1) 式成立，由此知胡海昌解是完备的.

定理 1(ii) 的证明　任取A上的调和函数h，令 $G=\mathrm{grad}\,h$，于是 $\mathrm{div}\,G=0$. 根据 Poincaré 引理，在星形域A上存在一个向量函数B满足 $\mathrm{rot}\,B=G$. 构造调和矢量函数 $(w^1,w^2,w^3)=\mathrm{grad}\,h^*-\mathrm{rot}\,B^*$，其中 $\Delta h^*=h$，$\Delta B^*=B$，则 $\mathrm{div}\,(w^1,w^2,w^3)=h$. 作弹性位移

$$U=(w^1,w^2,w^3)-\frac{1}{4}(1-r)^{-1}\mathrm{grad}\left(\sum_{i=1}^{3}x_iw^i\right),$$假定胡海昌解完备，则

$$(w^1,w^2,w^3)-\frac{1}{4}(1-r)^{-1}\mathrm{grad}\left(\sum_{i=1}^{3}x_iw^i\right)=-\mathrm{grad}\,D_3g+(-D_2f,D_1f,2(1-r)\Delta g),$$

其中 $f\in\mathrm{Ker}\Delta$，$g\in\mathrm{Ker}\Delta^2$. 记

$$v=\frac{1}{4}(1-r)^{-1}\left(\sum_{i=1}^{3}x_iw^i\right)-D_3g,$$

则前式变成 $\mathrm{grad}\,v=(w^1+D_2f,\ w^2-D_1f,\ w^3-2(1-r)^{-1}\Delta g)$，两端取散度得 $\Delta v=h-2(1-r)\Delta D_3g$，而由$v$的定义直接算得 $\Delta v=\frac{1}{2}(1-r)^{-1}h-\Delta D_3g$，因此，$\Delta v=0$. 从而方程 $D_3u=h$ 有调和函数解 $2(1-r)\Delta g$，此即所证.

定理 2 的证明　根据文献 [4]，若方程 $D_3u=f$ 对于任何 $f\in C^\infty(A)$ 恒有解 $u\in C^\infty(A)$，则 $D_3(\mathrm{Ker}\Delta)=\mathrm{Ker}\Delta$. 为了得到这个方程的在$x_3$-凸区域上的可解性，根据文献 [7] 中的“推论 3.5.2”，只需建立下面引理.

引理 1　设 $P(D_j)$ 是只含有D_j的线性常系数偏微分算子. 则对于每个 $u\in C_0^\infty(A)$，$\mathrm{supp}P(D_j)u$ 的x_j-凸包等于 $\mathrm{supp}\,u$ 的x_j-凸包（所谓A的x_j-凸包是指包含A的最小x_j-凸集，记做 $\#_j(A)_0$).

证明　只需证明 $\mathrm{supp}\,u\subset\#_j(\mathrm{supp}\,P(D_j)u)$. 任取 $x\in R^n\setminus\#_j(\mathrm{supp}\,P(D_j)u)$，过点$x$

作平行于 x_j 轴的直线 L，它被 x 分成 L^+ 和 L^- 两条射线. 由于 $\#_j(\operatorname{supp} P(D_j)u)$ 是 x_j-凸的，不妨设在 L^+ 上有 $P(D_j)u=0$. 在 L^+ 线上充分远的点上，u 关于 x_j 的各阶导数及其本身都等于零，根据常微分方程 Cauchy 问题解的唯一性，有 $u(x)=0$，此即所证.

定理 3 的证明 充分性. 设 A 的洞不能分离，根据文献 [6]，$D_3(\mathrm{Ker}\Delta)$ 在 $\mathrm{Ker}\Delta$ 中按 $C^\infty(A)$ 的通常拓扑稠密(本文的逼近性正是按 $C^\infty(A)$ 的拓扑引进的). 将任给的弹性位移 U 表示成 (2) 式，在 $D_3^2(\mathrm{Ker}\Delta)$ 中取序列 $w^{1(j)}$ 和 $w^{2(j)}$ 分别逼近 w^1 和 w^2. 显然存在 $\mathrm{Ker}\Delta$ 中的函数序列 $h^{(j)}$ 满足 $D_3^2h^{(j)}=-(D_1w^{1(j)}+D_2w^{2(j)})$. 用定理 1(i) 的证明方法，就可以构造出调和函数序列 $f^{(j)}$ 和重调和函数序列 $g^{(j)}$，使得 $-\operatorname{grad} D_3g^{(j)}+(-D_2f^{(j)},D_1f^{(j)},2(1-r)\Delta g^{(j)})$ 逼近于 U.

必要性. 任取 $w\in\mathrm{Ker}\Delta$，则 $(0,w,0)-\frac{1}{4}(1-r)^{-1}\operatorname{grad} d(x_3w)$

是一个弹性位移，于是由假定存在调和函数序列 $f^{(j)}$ 和重调和函数 $g^{(j)}$，使得在 $C^\infty(A)$ 的意义下有

$$\lim_{j\to\infty}[-\operatorname{grad} D_3g^{(j)}+(-D_2f^{(j)},D_1f^{(j)},2(1-r)\Delta g^{(j)})]$$
$$=(0,w,0)-\frac{1}{4}(1-r)^{-1}\operatorname{grad} d(x_3w).$$

将此式两端取旋度，仅看第三个分量便得 $-D_3^2f^{(j)}$ 逼近 D_1w. 这说明 $D_3^2(\mathrm{Ker}\Delta)$ 在 $D_1(\mathrm{Ker}\Delta)$ 中按 $C^\infty(A)$ 的拓扑稠密. 为了由此得到洞的不可分离性，我们建立了如下引理

引理 2 设

$$P(D)=\sum_{s\leqslant|\alpha|\leqslant t}a_\alpha D^\alpha(s>0)\quad 和\quad Q(D)=\sum_{p\leqslant|\alpha|\leqslant q}b_\alpha D^\alpha(p>0)$$

是两个常系数偏微分算子，并且 Q 是亚椭圆的. 又设 $T(D)=\sum_\alpha c_\alpha D^\alpha$ 是满足 $\sum_{|\alpha|<h}|c_\alpha|\neq 0$ 的线性常系数偏微分算子，这里 $h=\min(s,p)-1$. 如果 $P(\mathrm{Ker}Q)$ 在 $T(\mathrm{Ker}Q)$ 中按 $C^\infty(A)$ 的拓扑稠密，则 A 的洞是不能分离的.

证明 假设洞可以分离(见前面的定义)，取函数 $g\in C_0^\infty(V)$ 而且在 K 的邻域上 $g=1$. 令 $f=c_{\alpha^*}x^{\alpha^*}$，$\alpha^*$ 满足 $c_\alpha\neq 0$，

$$\sum_{|\alpha|<|\alpha^*|}|c_\alpha|=0\quad 和\quad |\alpha^*|\leqslant h,$$

则 $w=Q(-D)(fg)\in C_0^\infty(A)$ 而且 $P(-D)(fg)\in C_0^\infty(A)$. 记 δ_x 为 $x\in\bigcup_{H\in I_1}H$ 处的 Dirac 函数，E 为 $Q(D)$ 的基本解. $E*\delta_x$ 在 A 上的限制属于 $\mathrm{Ker}Q$，将其记做 u. 可以算出 $\langle w\cdot T(D)u\rangle=(-1)^{|\alpha^*|}\alpha^*!c_{\alpha^*}^2$，而对于每个 $v\in P(\mathrm{Ker}Q)$ 却有 $\langle w\cdot v\rangle=0$，这与 $P(\mathrm{Ker}Q)$ 在 $T(\mathrm{Ker}Q)$ 中稠密相矛盾.

参 考 文 献

[1] 胡海昌，物理学报，**9**(1953)，3: 130—147.
[2] 王敏中，应用数学与力学，**2**(1981)，2: 243—249.
[3] 范天佑，应用数学学报，**6**(1983)，1: 126—128.
[4] 张鸿庆，力学学报，特刊，1981，151—161.
[5] Слободянский М. Г., *П. М. М.*, XXIII (1959), 468—482.
[6] Bratti, G., *Red. Rem. Mat. Univ. Padova*, **57** (1977), 167—172.
[7] Hörmander, L., *Linear Partial Differential Operators*, Springer-Verlag, 1963.