正合范畴与广义 Abel 范畴中的正合性引理

献给冯克勤教授 80 华诞

荣石, 章璞*

上海交通大学数学科学学院, 上海 200240

E-mail: rongshi@sjtu.edu.cn, pzhang@sjtu.edu.cn

收稿日期: 2020-12-22; 接受日期: 2021-05-17; 网络出版日期: 2021-09-17; * 通信作者
国家自然科学基金 (批准号: 11971304) 资助项目

摘要 弱幂等完备正合范畴和广义 Abel 范畴是 Abel 范畴两种重要的推广. 蛇引理是同调代数中最基本的引理. 本文指出在弱幂等完备正合范畴中, 三种形式的蛇引理、同调代数基本定理和 3×3 引理这五条定理都成立, 并且互相等价, 由此可推导出其他正合性引理. 在广义 Abel 范畴中, 三种形式的蛇引理都成立, 并且互相等价, 由此可推导出同调代数基本定理和其他正合性引理.

关键词 弱幂等完备正合范畴 广义 Abel 范畴 正合性 蛇引理 同调代数基本定理 3×3 引理

MSC (2020) 主题分类 18C10, 18G50, 18E10, 18E20

1 引言

1986 年, 冯克勤先生在烟台大学代数与数论暑期学校讲授交换代数 (当时还有曹锡华先生讲授群表示论, 丁石孙先生讲授代数数论, 刘绍学先生讲授 Torsion 理论). 那是本文作者第一次听到模范畴中的蛇引理和连接同态. 蛇引理是同调代数中最基本的引理 (参见文献 [1, 第 40 页]). Grothendieck^[2] 引入了 Abel 范畴, 对范畴论和同调代数的发展产生重大影响. Abel 范畴中蛇引理的直接证明较长 (参见文献 [3, 第 227 页]、[4, 第 297 页]、[5, 第 87 页] 和 [6, 第 2.5 小节]). 有文献 (参见文献 [7, 第 12 页] 和 [8, 第 316 页]) 利用 Freyd-Mitchell 嵌入定理, 将小 Abel 范畴中蛇引理转化到模范畴得以说明 (但因蛇引理很早要用到, 而 Freyd-Mitchell 嵌入定理的证明涉及更多的理论, 这种证明并非最佳).

不同范畴中的蛇引理和其他正合性引理一直是受到关注的研究课题 (参见文献 [9–12]). 正合范畴^[13] 和广义 Abel 范畴^[14] 是 Abel 范畴两种重要的推广. 在讨论正合范畴中的正合性时, 自然地要求弱幂等完备的条件. 在同调代数、群论、表示论、 K -理论、泛函分析、几何和拓扑等数学分支中, 存在大量非 Abel 的弱幂等完备正合范畴的例子, 也存在大量非 Abel 的广义 Abel 范畴的例子 (参见第 2.4 和 2.5 小节).

英文引用格式: Rong S, Zhang P. Lemmas on exactness in exact categories and in generalized Abelian categories (in Chinese). Sci Sin Math, 2021, 51: 1655–1676, doi: 10.1360/SSM-2020-0347

强形式蛇引理由 Iversen^[15] 对于广义 Abel 范畴给出, 它是三种形式的蛇引理中最强的. 由它容易推导出其他两种形式的蛇引理, 反过来则比较困难. 对于弱幂等完备正合范畴, 本文给出定理 3.1, 它断言三种形式的蛇引理、同调代数基本定理和 3×3 引理这五条定理都成立, 并且互相等价. 由此可推导出诸如单 4 引理、满 4 引理、5 引理等其他正合性引理. 对于广义 Abel 范畴, 本文给出定理 4.1, 它指出三种形式的蛇引理也都成立, 并且互相等价. 由此可推导出同调代数基本定理和其他正合性引理. 特别地, 这两类范畴中均有强形式蛇引理和同调代数基本定理, 并且弱形式蛇引理可推导出强形式蛇引理.

本文带有一定的综述性. 事实上, Bühler^[16] 得到了弱幂等完备正合范畴中的 3×3 引理和蛇引理; 三种形式的蛇引理的等价性在文献 [17] 中已经得到证明. 也就是说, 定理 3.1 中, 只有蛇引理推导出同调代数基本定理这部分是新结论, 并且之前文献中没有弱幂等完备正合范畴中同调代数基本定理的表述. 广义 Abel 范畴中强形式蛇引理在文献 [15] 中给出, 但只有证明概要, 关键的连接态射并未明确构造 (这可能由于当时没有 LaTeX 作图). 也就是说, 定理 4.1 中, 只有弱形式蛇引理推导出强形式蛇引理这部分是新结论.

正合范畴和广义 Abel 范畴差别较大, 互不蕴含. 正合范畴首先是加法范畴, 而广义 Abel 范畴一般不是加法范畴; 广义 Abel 范畴有核和余核, 而正合范畴中的态射一般没有核和余核. 因此, 在这两种范畴中证明三种形式的蛇引理和同调代数基本定理, 所要使用的方法是完全不同的.

2 预备知识

2.1 正合范畴

加法范畴 $\mathcal{A}$ 的一个正合对 (i, d) 是指一个态射序列 $X \xrightarrow{i} Y \xrightarrow{d} Z$, 其中 i 是 d 的核, 并且 d 是 i 的余核. 特别地, 在正合对 (i, d) 中, i 是单态射, d 是满态射.

正合范畴是 Quillen 在文献 [13, 第 2 节] 中提出的. 这里使用的定义是 Keller 在文献 [18] 中给出的等价版本. 也可参见文献 [19, 附录 A].

定义 2.1 (参见文献 [18, 附录 A]) 正合范畴是指有序对 $(\mathcal{A}, \mathcal{E})$, 其中 $\mathcal{A}$ 是加法范畴, $\mathcal{E}$ 是由 $\mathcal{A}$ 中的一些正合对作成的类, 满足下述公理 (E0)、(E1)、(E2) 和 (E2^{op}). 以下称 $\mathcal{E}$ 中的正合对 (i, d) 为容许短正合列 (conflation), 称 i 为容许单态射 (inflation), 称 d 为容许满态射 (deflation).

(E0) $\mathcal{E}$ 关于同构封闭, 并且 Id_0 是容许满态射;

(E1) 两个容许满态射的合成仍然是容许满态射;

(E2) 对任一个容许满态射 $d: Y \rightarrow Z$ 和任意态射 $f: Z' \rightarrow Z$, 存在拉回方块

$$\begin{array}{ccc} Y' & \xrightarrow{d'} & Z' \\ f' \downarrow & & \downarrow f \\ Y & \xrightarrow{d} & Z \end{array} \quad (2.1)$$

使得 d' 是容许满态射.

(E2^{op}) 对任一个容许单态射 $i: X \rightarrow Y$ 和任意态射 $f: X \rightarrow X'$, 存在推出方块

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{i} & Y \\ f \downarrow & & \downarrow f' \\ X' & \xrightarrow{i'} & Y' \end{array} \quad (2.2)$$

使得 i' 是容许单态射.

事实 2.1 设 $(\mathcal{A}, \mathcal{E})$ 是正合范畴. 则

(1) 两个容许单态射的合成仍是容许单态射.

(2) 任意恒等态射 Id_X 既是容许满态射, 又是容许单态射. 对任意对象 $X \in \mathcal{A}$, 态射 $0 \rightarrow X$ 是容许单态射; 态射 $X \rightarrow 0$ 是容许满态射.

(3) 态射 f 是同构当且仅当 f 同时是容许满态射和容许单态射.

(4) 正合范畴 $(\mathcal{A}, \mathcal{E})$ 的反范畴 $(\mathcal{A}^{\text{op}}, \mathcal{E}^{\text{op}})$ 也是正合范畴.

对于任意小正合范畴 $(\mathcal{A}, \mathcal{E})$, Gabriel-Quillen 嵌入定理断言存在 Abel 范畴 $\mathcal{B}$ 和满忠实 (fully faithful) 正合函子 $F: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$, 使得 $\text{Im } F$ 是 $\mathcal{B}$ 的扩张闭满子范畴, 并且 F 反射正合性, 即若 $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ 是 $\mathcal{A}$ 中的态射序列且 $0 \rightarrow FX \xrightarrow{Ff} FY \xrightarrow{Fg} FZ \rightarrow 0$ 是 $\mathcal{B}$ 中的正合列, 则 $(f, g) \in \mathcal{E}$. 根据 Gabriel-Quillen 嵌入定理可以推导出小加法范畴 $\mathcal{A}$ 是正合范畴当且仅当 $\mathcal{A}$ 是某个 Abel 范畴的扩张闭满子范畴 (参见文献 [13, 第 92 页] 和 [18, 附录]).

2.2 正合范畴中的容许态射

正合范畴 $(\mathcal{A}, \mathcal{E})$ 中的态射 $f: X \rightarrow Y$ 称为容许态射, 如果存在一个容许满 - 容许单 - 分解 $f = \tilde{f}\bar{f}$, 其中 $\bar{f}$ 是容许满态射, $\tilde{f}$ 是容许单态射. 图示如下:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ & \searrow \bar{f} & \nearrow \tilde{f} \\ & \overline{X} & \end{array}$$

显然零态射、容许满态射和容许单态射均是容许态射.

设 $f: X \rightarrow Y$ 是容许态射, $f = \tilde{f}\bar{f}$ 是其容许满 - 容许单 - 分解. 因 $\bar{f}$ 是容许满态射, 故 $\bar{f}$ 的核 $\text{Ker } \bar{f}$ 存在. 因 $\tilde{f}$ 是单态射, 故 $\text{Ker } f$ 也存在且

$$\text{Ker } f = \text{Ker } \bar{f}.$$

对偶地, $\text{Coker } f$ 也存在且 $\text{Coker } f = \text{Coker } \tilde{f}$, 即容许态射的核和余核均存在. 设 $(\text{Coker } f, p_f)$ 是 f 的余核, 其中

$$p_f: Y \rightarrow \text{Coker } f = \text{Coker } \tilde{f}.$$

则 $(\tilde{f}, p_f)$ 是容许短正合列. 从而 $(\overline{X}, \tilde{f})$ 是 f 的像 $\text{Im } f$, 或者说 $\text{Im } f = \overline{X}$. 图示如下:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ & \searrow \bar{f} & \nearrow \tilde{f} \\ & \text{Im } f & \end{array}$$

有零对象的范畴中, 满态射 $h: U \rightarrow V$ 总有余核 $0: V \rightarrow 0$, 而 $0: V \rightarrow 0$ 总有核 $\text{Id}_V: V \rightarrow V$. 因此, h 的像 $\text{Im } h$ 总存在且 $\text{Im } h = V$. 正合范畴中容许单态射 $h: U \rightarrow V$ 的像 $\text{Im } h$ 总存在且 $\text{Im } h = U$. 因此

$$\text{Im } f = \text{Im } \bar{f} = \text{Im } \tilde{f}.$$

如果详细地写出像的态射, 则 f 的像、 $\bar{f}$ 的像和 $\tilde{f}$ 的像分别是 $(\text{Im } f, \tilde{f})$ 、 $(\text{Im } f, \text{Id}_{\text{Im } f})$ 和 $(\text{Im } f, \tilde{f})$.

设 $(\mathcal{A}, \mathcal{E})$ 是正合范畴, $i: X \rightarrow Y$ 是容许单态射. 则有容许满态射 $d: Y \rightarrow Z$ 使得 (i, d) 是容许短正合列. 如果不引起混淆, 习惯地将 Z 记为 Y/X (严格地说, 对象 Y/X 与态射 i 有关). 根据这

种记号, 若 $f: X \rightarrow Y$ 是容许态射, 则有 $\text{Coker } f = Y/\text{Im } f$. 为方便以后引用, 我们将上述讨论写成如下事实.

事实 2.2 设 $(\mathcal{A}, \mathcal{E})$ 是正合范畴, $f: X \rightarrow Y$ 是容许态射, $f = \tilde{f}\bar{f}$ 是其容许满 - 容许单 - 分解. 则 $\text{Im } f = \text{Im } \bar{f} = \text{Im } \tilde{f}$, 且 $\text{Coker } f = Y/\text{Im } f$.

2.3 正合范畴中的正合性

容许态射序列 $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ 称为在 Y 处 $\mathcal{E}$ - 正合, 或简称在 Y 处正合, 如果对于容许满 - 容许单 - 分解 $f = \tilde{f}\bar{f}$ 和 $g = \tilde{g}\bar{g}$, 态射对 $(\tilde{f}, \bar{g})$ 是容许短正合列, 即 $\text{Im } f = \text{Ker } g$. 参见下图:

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & Z \\ & \searrow \bar{f} & \nearrow \tilde{f} & \searrow \bar{g} & \nearrow \tilde{g} \\ & \bullet & & \bullet & \end{array}$$

容许态射序列

$$X_s \xrightarrow{f_s} \cdots \rightarrow X_{i-1} \xrightarrow{f_{i-1}} X_i \xrightarrow{f_i} X_{i+1} \rightarrow \cdots \xrightarrow{f_{t-1}} X_t \quad (t \geq s+2)$$

称为正合列, 如果该序列在每个 X_j ($s+1 \leq j \leq t-1$) 处正合, 即对于容许满 - 容许单 - 分解 $f_j = i_j d_j$, 有 $(i_{j-1}, d_j) \in \mathcal{E}$, 其中 $s+1 \leq j \leq t-1$.

特别地, 容许态射序列 $0 \rightarrow X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \rightarrow 0$ 称为正合列, 如果 $(f, g) \in \mathcal{E}$.

2.4 弱幂等完备正合范畴

为研究正合范畴中的正合性, 我们需要如下:

引理 2.1 (参见文献 [19, 附录] 和 [16, 第 7.2 和 7.6 小节]) 设 $\mathcal{A}$ 是正合范畴. 则下述结论等价:

- (i) $\mathcal{A}$ 中的可裂满态射均有核;
- (ii) $\mathcal{A}$ 中的可裂单态射均有余核;
- (iii) 若 de 是容许满态射, 则 d 也是容许满态射;
- (iv) 若 ki 是容许单态射, 则 i 也是容许单态射.

称满足上述条件的正合范畴为弱幂等完备正合范畴 (参见文献 [16] 和 [20, 第 1.11.5 小节]).

存在大量的非 Abel 的弱幂等完备正合范畴. 例如, 复数域上 Banach 空间和有界线性映射作成的范畴 Ban , 可度量完备拓扑空间和连续线性映射作成的范畴 Fre , 无挠 Abel 群范畴 Ab_{tf} , Abel 范畴 $\mathcal{A}$ 上的复形范畴 $\mathcal{C}(\mathcal{A})$, 其中正合结构是由链可裂复形短正合列给出的 (不是由通常的复形短正合列给出的). 而 Gorenstein 投射模作成的范畴总是弱幂等完备正合范畴, 并且在大部分情形下它不是 Abel 范畴 (参见文献 [17]).

对于 Abel 范畴, 下述定理中的结论是熟知的. 它在证明弱幂等完备正合范畴中的同调代数基本定理时要用到.

定理 2.1 设 $g: X \rightarrow Y$ 是弱幂等完备正合范畴 $(\mathcal{A}, \mathcal{E})$ 中的容许满态射, $h: Y \rightarrow Z$ 是容许态射. 则存在容许单态射 $s: \text{Ker } g \rightarrow \text{Ker}(hg)$, 使得 s 的余核形如 $\pi: \text{Ker}(hg) \rightarrow \text{Ker } h$, 并且满足

$$k_{hg}s = k_g, \quad gk_{hg} = k_h\pi,$$

其中 $k_h: \text{Ker } h \rightarrow Y$, $k_{hg}: \text{Ker}(hg) \rightarrow X$ 和 $k_g: \text{Ker } g \rightarrow X$ 分别是 h 的核、 hg 的核和 g 的核. 特别地, 有同构 $\text{Ker } h \cong \text{Ker}(hg)/\text{Ker } g$, 并且这个同构是函子的.

证明 首先, $\text{Ker } g$ 、 $\text{Ker } h$ 和 $\text{Ker}(hg)$ 都是良定的. 因 $h(gk_{hg}) = 0$, 故存在唯一的态射 π 使得 $gk_{hg} = k_h\pi$. 因 $(hg)k_g = 0$, 故存在唯一的态射 s 使得 $k_{hg}s = k_g$. 图示如下:

$$\begin{array}{ccccc} \text{Ker } g & \xrightarrow{s} & \text{Ker}(hg) & \xrightarrow{\pi} & \text{Ker } h \\ & \searrow k_g & \downarrow k_{hg} & & \downarrow k_h \\ & & X & \xrightarrow{g} & Y \xrightarrow{h} Z. \end{array}$$

因 g 是容许满态射, 故 k_g 是容许单态射, 即 $k_{hg}s$ 是容许单态射. 因 $(\mathcal{A}, \mathcal{E})$ 是弱幂等完备正合范畴, 故 s 是容许单态射.

下证 s 是 π 的核. 首先, 因 $k_h\pi s = gk_{hg}s = gk_g = 0$ 且 k_h 是单态射, 故 $\pi s = 0$. 设 $w : W \rightarrow \text{Ker}(hg)$ 是使得 $\pi w = 0$ 的态射. 则 $gk_{hg}w = k_h\pi w = 0$. 因此存在唯一的态射 $t : W \rightarrow \text{Ker } g$ 使得 $k_{hg}w = k_gt$. 于是 $k_{hg}st = k_gt = k_{hg}w$, 从而 $w = st$. 这证明了 s 是 π 的核.

下证上图中的方块是 g 和 k_h 的拉回方块. 事实上, 设 $t_1 : T \rightarrow \text{Ker } h$ 和 $t_2 : T \rightarrow X$ 是使得 $k_h t_1 = g t_2$ 的态射. 图示如下:

$$\begin{array}{ccc} T & \xrightarrow{t_1} & \text{Ker } h \\ & \searrow u & \downarrow k_h \\ & & \text{Ker}(hg) \xrightarrow{\pi} \text{Ker } h \\ & \searrow t_2 & \downarrow k_{hg} \\ & & X \xrightarrow{g} Y \xrightarrow{h} Z, \end{array}$$

则 $hgt_2 = hk_h t_1 = 0$. 故存在唯一的态射 $u : T \rightarrow \text{Ker}(hg)$ 使得 $k_{hg}u = t_2$. 另一方面,

$$k_h\pi u = gk_{hg}u = gt_2 = k_h t_1.$$

因 k_h 是单态射, 故 $\pi u = t_1$. 这证明了该方块是 g 和 k_h 的拉回方块. 从而根据公理 (E2) 以及拉回的唯一性即知 π 是容许满态射.

因 s 是容许单态射以及 π 是容许满态射并且 s 是 π 的核, 故 (s, π) 是容许短正合列. $\square$

2.5 广义 Abel 范畴

称有零对象的范畴 $\mathcal{A}$ 为广义 Abel 范畴, 如果 $\mathcal{A}$ 有核和余核, 并且对 $\mathcal{A}$ 中任一态射 f , 典范态射 $\text{Coim } f \rightarrow \text{Im } f$ 是同构, 其中 $\text{Coim } f$ 是 f 的核的余核, $\text{Im } f$ 是 f 的余核的核.

因此, 广义 Abel 范畴就是在 Abel 范畴的定义中去掉加法范畴的条件. 循环群范畴和域上代数的维数小于固定数的模作成的范畴, 是非 Abel 的广义 Abel 范畴的简单例子.

广义 Abel 范畴是 Puppe^[14] 引入的. 在文献 [14]、[21, 第 18 和 33 页] 和 [15, 定义 1.1] 中, 广义 Abel 范畴都被称为正合范畴. 为了避免与文献 [13, 第 2 节] 意义下的正合范畴相混淆, 这里使用广义 Abel 范畴以示区别. 广义 Abel 范畴未必是加法范畴, 其中两个对象未必有直和, 进而未必有拉回和推出.

2.6 态射范畴

使用态射范畴可以有效地处理态射的函子性问题.

范畴 $\mathcal{A}$ 的态射范畴 $\text{Mor}(\mathcal{A})$ 的对象是 $\mathcal{A}$ 的态射 $f: X \rightarrow Y$; 对象 $f: X \rightarrow Y$ 到对象 $f': X' \rightarrow Y'$ 的一个态射是 $\mathcal{A}$ 中的一对态射 (α, α') , 使得下图是交换的:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\alpha} & X' \\ f \downarrow & & \downarrow f' \\ Y & \xrightarrow{\alpha'} & Y' \end{array}$$

对象 $f: X \rightarrow Y$ 的恒等态射 Id_f 即是 $(\text{Id}_X, \text{Id}_Y)$. 下述事实的证明是直接的.

事实 2.3 (1) 若 $\mathcal{A}$ 是加法范畴, 则 $\text{Mor}(\mathcal{A})$ 也是加法范畴.

(2) 设 $\mathcal{A}$ 是有核的范畴, $f: X \rightarrow Y$ 和 $f': X' \rightarrow Y'$ 是 $\mathcal{A}$ 中态射, $(\alpha, \alpha') \in \text{Hom}(f, f')$. 设 $k: \text{Ker } \alpha \rightarrow X$ 是 α 的核, $k': \text{Ker } \alpha' \rightarrow X'$ 是 α' 的核. 则存在唯一的态射 $\tilde{f}: \text{Ker } \alpha \rightarrow \text{Ker } \alpha'$ 使得下图是交换的:

$$\begin{array}{ccccc} \text{Ker } \alpha & \xrightarrow{k} & X & \xrightarrow{\alpha} & X' \\ \downarrow \tilde{f} & & \downarrow f & & \downarrow f' \\ \text{Ker } \alpha' & \xrightarrow{k'} & Y & \xrightarrow{\alpha'} & Y' \end{array}$$

并且 $(k, k'): \tilde{f} \rightarrow f$ 是 (α, α') 的核, 即 $\text{Ker}(\alpha, \alpha') = \tilde{f}$.

(2') 设 $\mathcal{A}$ 是余核的范畴, $f: X \rightarrow Y$ 和 $f': X' \rightarrow Y'$ 是 $\mathcal{A}$ 中态射, $(\alpha, \alpha') \in \text{Hom}(f, f')$. 设 $c: Y \rightarrow \text{Coker } \alpha$ 是 α 的余核, $c': Y' \rightarrow \text{Coker } \alpha'$ 是 α' 的余核. 则存在唯一的态射 $\overline{f}: \text{Coker } \alpha \rightarrow \text{Coker } \alpha'$ 使得下图是交换的:

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{\alpha} & X' & \xrightarrow{c} & \text{Coker } \alpha \\ \downarrow f & & \downarrow f' & & \downarrow \overline{f} \\ Y & \xrightarrow{\alpha'} & Y' & \xrightarrow{c'} & \text{Coker } \alpha' \end{array}$$

并且 $(c, c'): f' \rightarrow \overline{f}$ 是 (α, α') 的余核, 即 $\text{Coker}(\alpha, \alpha') = \overline{f}$.

(3) 若 $\mathcal{A}$ 是广义 Abel 范畴, 则 $\text{Mor}(\mathcal{A})$ 也是广义 Abel 范畴.

(4) 设 $\mathcal{A}$ 是加法范畴. 设 $(\alpha, \alpha'): f \rightarrow f'$ 和 $(\beta, \beta'): f'' \rightarrow f'$ 是 $\text{Mor}(\mathcal{A})$ 中的两个对象. 若 $\mathcal{A}$ 中存在关于态射 α 和 β 的拉回, 也存在关于态射 α' 和 β' 的拉回, 则 (α, α') 和 (β, β') 在 $\text{Mor}(\mathcal{A})$ 中也存在拉回.

(4') 设 $\mathcal{A}$ 是加法范畴. 设 $(\alpha, \alpha'): f \rightarrow f'$ 和 $(\beta, \beta'): f \rightarrow f''$ 是 $\text{Mor}(\mathcal{A})$ 中的两个对象. 若 $\mathcal{A}$ 中存在关于态射 α 和 β 的推出, 也存在关于态射 α' 和 β' 的推出, 则 (α, α') 和 (β, β') 在 $\text{Mor}(\mathcal{A})$ 中也存在推出.

(5) 设 $(\mathcal{A}, \mathcal{E})$ 是正合范畴. 将所有 $((\alpha, \alpha'), (\beta, \beta'))$ 作成的类记为 $\mathcal{E}_{\text{Mor}}$, 其中 (α, β) 和 (α', β') 均为容许短正合列, 即 $(\alpha, \beta), (\alpha', \beta') \in \mathcal{E}$, 则 $(\text{Mor}(\mathcal{A}), \mathcal{E}_{\text{Mor}})$ 作成正合范畴, 并且若 $(\mathcal{A}, \mathcal{E})$ 是弱幂等完备正合范畴, 则 $(\text{Mor}(\mathcal{A}), \mathcal{E}_{\text{Mor}})$ 也是弱幂等完备正合范畴.

3 弱幂等完备正合范畴中的正合性定理

3.1 弱幂等完备正合范畴上容许复形的上调对象

设 $(\mathcal{A}, \mathcal{E})$ 是弱幂等完备正合范畴. 称 $\mathcal{A}$ 上的复形 $X = (X^n, d^n)_{n \in \mathbb{Z}}$ 为容许复形, 如果所有微分 d^n 都是容许态射.

设 $X = (X^n, d^n)_{n \in \mathbb{Z}}$ 为 $\mathcal{A}$ 上的容许复形, $d^n = \widetilde{d^n} \overline{d^n}$ 是 d^n 的容许满 - 容许单 - 分解. 设 k^n 是 d^n 的核. 参见下图:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & \text{Im } d^{n-1} & \xrightarrow{\delta^{n-1}} & \text{Ker } d^n & & \text{Im } d^n \\
 & \nearrow \widetilde{d^{n-1}} & & \searrow & \downarrow k^n & \nearrow \widetilde{d^n} & \\
 X^{n-1} & \xrightarrow{d^{n-1}} & X^n & \xrightarrow{d^n} & X^{n+1} & &
 \end{array}$$

因 $0 = d^n d^{n-1} = d^n \widetilde{d^{n-1}} \overline{d^{n-1}}$ 且 $\overline{d^{n-1}}$ 是满态射, 故

$$d^n \widetilde{d^{n-1}} = 0.$$

从而存在唯一的态射 $\delta^{n-1} : \text{Im } d^{n-1} \rightarrow \text{Ker } d^n$ 使得 $\widetilde{d^{n-1}} = k^n \delta^{n-1}$. 因 $\widetilde{d^{n-1}}$ 是容许单态射以及 $(\mathcal{A}, \mathcal{E})$ 是弱幂等完备正合范畴, 故 $\delta^{n-1} : \text{Im } d^{n-1} \rightarrow \text{Ker } d^n$ 是容许单态射. 因此 $\text{Ker } d^n / \text{Im } d^{n-1}$ 是良定的. 定义容许复形 X 的第 n 次上调对象 $H^n(X)$ 为

$$H^n(X) := \text{Ker } d^n / \text{Im } d^{n-1} = \text{Coker } \delta^{n-1}, \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

3.2 主定理

定理 3.1 设 $(\mathcal{A}, \mathcal{E})$ 是弱幂等完备正合范畴. 则以下 5 条结论均成立, 并且等价.

(1) (弱形式蛇引理) 设下图是 $\mathcal{A}$ 中正合列的交换图, 且竖直方向的态射均为容许态射:

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & X_1 & \xrightarrow{x_1} & X_2 & \xrightarrow{x_2} & X_3 \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow f_1 & & \downarrow f_2 & & \downarrow f_3 \\
 0 & \longrightarrow & Y_1 & \xrightarrow{y_1} & Y_2 & \xrightarrow{y_2} & Y_3 \longrightarrow 0.
 \end{array}$$

则有典范的容许态射的序列

$$0 \longrightarrow \text{Ker } f_1 \longrightarrow \text{Ker } f_2 \longrightarrow \text{Ker } f_3 \xrightarrow{c} \text{Coker } f_1 \longrightarrow \text{Coker } f_2 \longrightarrow \text{Coker } f_3 \longrightarrow 0 \quad (3.1)$$

并且它是正合列, 且连接态射 c 具有函子性.

(2) (强形式蛇引理) 设下图是 $\mathcal{A}$ 中正合列的交换图, 且竖直方向的态射均为容许态射:

$$\begin{array}{ccccccc}
 X_0 & \xrightarrow{x_0} & X_1 & \xrightarrow{x_1} & X_2 & \xrightarrow{x_2} & X_3 \xrightarrow{x_3} X_4 \\
 \downarrow f_0 & & \downarrow f_1 & & \downarrow f_2 & & \downarrow f_3 \\
 Y_0 & \xrightarrow{y_0} & Y_1 & \xrightarrow{y_1} & Y_2 & \xrightarrow{y_2} & Y_3 \xrightarrow{y_3} Y_4,
 \end{array}$$

其中 f_0 是容许满态射, f_4 是容许单态射. 则有典范的容许态射的序列

$$\text{Ker } f_1 \xrightarrow{\widetilde{x_1}} \text{Ker } f_2 \longrightarrow \text{Ker } f_3 \xrightarrow{c} \text{Coker } f_1 \longrightarrow \text{Coker } f_2 \xrightarrow{\overline{y_2}} \text{Coker } f_3$$

并且它是正合列, 且连接态射 c 具有函子性.

进一步, 若 x_1 是容许单态射, 则 $\widetilde{x_1}$ 是容许单态射; 若 y_2 是容许满态射, 则 $\overline{y_2}$ 是容许满态射.

(3) (蛇引理) 设下图是 $\mathcal{A}$ 中正合列的交换图, 且竖直方向的态射均为容许态射:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & X_1 & \xrightarrow{x_1} & X_2 & \xrightarrow{x_2} & X_3 \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow f_1 & & \downarrow f_2 & & \downarrow f_3 \\
 0 & \longrightarrow & Y_1 & \xrightarrow{y_1} & Y_2 & \xrightarrow{y_2} & Y_3.
 \end{array}$$

则有典范的容许态射的序列

$$\operatorname{Ker} f_1 \xrightarrow{\widetilde{x_1}} \operatorname{Ker} f_2 \longrightarrow \operatorname{Ker} f_3 \xrightarrow{c} \operatorname{Coker} f_1 \longrightarrow \operatorname{Coker} f_2 \xrightarrow{\overline{y_2}} \operatorname{Coker} f_3$$

并且它是正合列, 且连接态射 c 具有函子性.

进一步, 若 x_1 是容许单态射, 则 $\widetilde{x_1}$ 是容许单态射; 若 y_2 是容许满态射, 则 $\overline{y_2}$ 是容许满态射.

(4) (同调代数基本定理) 设 $0 \longrightarrow X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \longrightarrow 0$ 是 $\mathcal{A}$ 上容许复形的短正合列. 则有上同调对象的典范长正合列

$$\cdots \longrightarrow H^{n-1}(Z) \xrightarrow{\partial^{n-1}} H^n(X) \xrightarrow{H^n(u)} H^n(Y) \xrightarrow{H^n(v)} H^n(Z) \xrightarrow{\partial^n} H^{n+1}(X) \longrightarrow \cdots,$$

其中连接态射 ∂^n ($\forall n \in \mathbb{Z}$) 都具有函子性.

(5) (3×3 引理) 设下图是 $\mathcal{A}$ 中三行均正合的交换图:

$$\begin{array}{ccccccc} & & 0 & & 0 & & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & X_1 & \xrightarrow{u_1} & Y_1 & \xrightarrow{v_1} & Z_1 \longrightarrow 0 \\ & & x_1 \downarrow & & y_1 \downarrow & & z_1 \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & X_2 & \xrightarrow{u_2} & Y_2 & \xrightarrow{v_2} & Z_2 \longrightarrow 0 \\ & & x_2 \downarrow & & y_2 \downarrow & & z_2 \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & X_3 & \xrightarrow{u_3} & Y_3 & \xrightarrow{v_3} & Z_3 \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & 0 & & 0 & & 0. \end{array}$$

(i) 设中间列正合. 则左边列正合当且仅当右边列正合;

(ii) 设左边列和右边列均正合, y_1 和 y_2 均为容许态射并且 $y_2 y_1 = 0$. 则中间列也为正合列.

注 3.1 (1) 文献 [16] 已证明 (5) 以及 (5) $\implies$ (1), 即 3×3 引理成立以及 3×3 引理可推导出弱形式蛇引理. 文献 [17] 已证明 3 种形式的蛇引理是等价的, 即 (1) $\iff$ (2) $\iff$ (3). 特别地, 强形式蛇引理是成立的.

(2) 我们强调, 正合范畴中 (3 种形式的) 蛇引理不能由 Abel 范畴中蛇引理和 Gabriel-Quillen 嵌入定理推导出来. 利用弱幂等完备正合范畴中的强形式蛇引理可以容易地推导出单 4 引理、满 4 引理、5 引理和短 5 引理 (参见文献 [17, 第 3.2 和 3.3 小节]).

3.3 定理 3.1 的证明

如注 3.1(1) 所述, 以下只需要证明 (3) $\implies$ (4) $\implies$ (5), 即蛇引理可推导出同调代数基本定理, 以及同调代数基本定理可推导出 3×3 引理.

(3) $\implies$ (4) 用 d_X^n 表示复形 X 的第 n 次微分. 根据假设, 所有这些微分都是容许态射, 因此它们的核和余核都是存在的.

断言 1 我们有如下正合列的交换图:

$$\begin{array}{ccccccc} \operatorname{Coker} d_X^{n-1} & \xrightarrow{\widetilde{u^n}} & \operatorname{Coker} d_Y^{n-1} & \xrightarrow{\widetilde{v^n}} & \operatorname{Coker} d_Z^{n-1} & \longrightarrow & 0 \\ \widehat{d_X^n} \downarrow & & \widehat{d_Y^n} \downarrow & & \widehat{d_Z^n} \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & \operatorname{Ker} d_X^{n+1} & \xrightarrow{\widetilde{u^{n+1}}} & \operatorname{Ker} d_Y^{n+1} & \xrightarrow{\widetilde{v^{n+1}}} & \operatorname{Ker} d_Z^{n+1}, \end{array} \quad (3.2)$$

其中竖直方向的态射均为容许态射.

第 1 步 构造图 (3.2) 中的两个正合列. 根据假设, 对任意的 $n \in \mathbb{Z}$, 有如下正合列的交换图:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & X^{n-1} & \xrightarrow{u^{n-1}} & Y^{n-1} & \xrightarrow{v^{n-1}} & Z^{n-1} \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow d_X^{n-1} & & \downarrow d_Y^{n-1} & & \downarrow d_Z^{n-1} \\ 0 & \longrightarrow & X^n & \xrightarrow{u^n} & Y^n & \xrightarrow{v^n} & Z^n \longrightarrow 0 \end{array}$$

且竖直方向的态射均是容许态射. 因此, 可以对这个交换图应用弱形式蛇引理, 从而得到正合列

$$\text{Coker } d_X^{n-1} \xrightarrow{\overline{u^n}} \text{Coker } d_Y^{n-1} \xrightarrow{\overline{v^n}} \text{Coker } d_Z^{n-1} \longrightarrow 0$$

满足

$$p_Y^{n-1} u^n = \overline{u^n} p_X^{n-1}, \quad p_Z^{n-1} v^n = \overline{v^n} p_Y^{n-1},$$

其中 $p_X^{n-1}: X^n \rightarrow \text{Coker } d_X^{n-1}$ 是 d_X^{n-1} 的余核.

同理, 对如下正合列交换图应用弱形式蛇引理:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & X^{n+1} & \xrightarrow{u^{n+1}} & Y^{n+1} & \xrightarrow{v^{n+1}} & Z^{n+1} \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow d_X^{n+1} & & \downarrow d_Y^{n+1} & & \downarrow d_Z^{n+1} \\ 0 & \longrightarrow & X^{n+2} & \xrightarrow{u^{n+2}} & Y^{n+2} & \xrightarrow{v^{n+2}} & Z^{n+2} \longrightarrow 0 \end{array}$$

得到正合列

$$0 \longrightarrow \text{Ker } d_X^{n+1} \xrightarrow{\widetilde{u^{n+1}}} \text{Ker } d_Y^{n+1} \xrightarrow{\widetilde{v^{n+1}}} \text{Ker } d_Z^{n+1}$$

满足

$$k_Y^{n+1} \widetilde{u^{n+1}} = u^{n+1} k_X^{n+1}, \quad k_Z^{n+1} \widetilde{v^{n+1}} = v^{n+1} k_Y^{n+1},$$

其中 $k_X^{n+1}: \text{Ker } d_X^{n+1} \rightarrow X^{n+1}$ 是 d_X^{n+1} 的核.

第 2 步 构造图 (3.2) 中竖直方向的容许态射. 记微分 d_X^n 的容许满 - 容许单 - 分解为

$$d_X^n = \widetilde{d_X^n} \overline{d_X^n}.$$

因 $\overline{d_X^n} \widetilde{d_X^{n-1}} = 0$ 且 p_X^{n-1} 是 d_X^{n-1} 的余核, 故存在唯一的态射 μ_X^n 使得 $\mu_X^n p_X^{n-1} = \overline{d_X^n}$.

因 $\widetilde{d_X^{n+1}} \overline{d_X^n} = 0$ 且 k_X^{n+1} 是 d_X^{n+1} 的核, 故存在唯一的态射 δ_X^n 使得 $k_X^{n+1} \delta_X^n = \widetilde{d_X^{n+1}}$.

因 $\widetilde{d_X^{n+1}} \widetilde{d_X^n} \mu_X^n = 0$ 且 k_X^{n+1} 是 d_X^{n+1} 的核, 故存在唯一的态射 $\widehat{d_X^n}$ 使得

$$\widetilde{d_X^{n+1}} \mu_X^n = k_X^{n+1} \widehat{d_X^n}.$$

图示如下:

$$\begin{array}{ccccccc} X^{n-1} & \xrightarrow{d_X^{n-1}} & X^n & \xrightarrow{d_X^n} & X^{n+1} & \xrightarrow{d_X^{n+1}} & X^{n+2} \\ & \searrow & \downarrow p_X^{n-1} & \searrow \mu_X^n & \downarrow k_X^{n+1} & \searrow & \\ & & \bullet & \xrightarrow{\widehat{d_X^n}} & \bullet & & \\ & & \text{Coker } d_X^{n-1} & \xrightarrow{\widetilde{d_X^n}} & \text{Ker } d_X^{n+1} & & \end{array}$$

因

$$k_X^{n+1} \widehat{d_X^n} p_X^{n-1} = \widehat{d_X^n} \mu_X^n p_X^{n-1} = k_X^{n+1} \delta_X^n \mu_X^n p_X^{n-1}$$

以及 k_X^{n+1} 是单态射和 p_X^{n-1} 是满态射, 故

$$\widehat{d_X^n} = \delta_X^n \mu_X^n.$$

因 $\mu_X^n p_X^{n-1} = \widehat{d_X^n}$ 是容许满态射且 $(\mathcal{A}, \mathcal{E})$ 是弱幂等完备正合范畴, 由引理 2.1(iii) 知 μ_X^n 是容许满态射. 同理, 因 $k_X^{n+1} \delta_X^n = \widehat{d_X^n}$ 是容许单态射, 故 δ_X^n 是容许单态射. 从而

$$\widehat{d_X^n} : \text{Coker } d_X^{n-1} \longrightarrow \text{Ker } d_X^{n+1}$$

是容许态射, $\widehat{d_X^n} = \delta_X^n \mu_X^n$ 是 $\widehat{d_X^n}$ 的容许满 - 容许单 - 分解, 并且

$$d_X^n = \widehat{d_X^n} \overline{d_X^n} = k_X^{n+1} \delta_X^n \mu_X^n p_X^{n-1} = k_X^{n+1} \widehat{d_X^n} p_X^{n-1}.$$

同理, 对复形 Y 和 Z 有容许态射

$$\widehat{d_Y^n} : \text{Coker } d_Y^n \longrightarrow \text{Ker } d_Y^{n+1}, \quad \widehat{d_Z^n} : \text{Coker } d_Z^n \longrightarrow \text{Ker } d_Z^{n+1},$$

其容许满 - 容许单 - 分解为 $\widehat{d_Y^n} = \delta_Y^n \mu_Y^n$, $\widehat{d_Z^n} = \delta_Z^n \mu_Z^n$, 满足

$$d_Y^n = k_Y^{n+1} \widehat{d_Y^n} p_Y^{n-1}, \quad d_Z^n = k_Z^{n+1} \widehat{d_Z^n} p_Z^{n-1}.$$

第 3 步 证明图 (3.2) 是交换图. 考虑如下态射图:

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & X^n & \xrightarrow{u^n} & Y^n & \xrightarrow{v^n} & Z^n \longrightarrow 0 \\
 & & \searrow p_X^{n-1} & & \searrow p_Y^{n-1} & & \searrow p_Z^{n-1} \\
 & & \text{Coker } d_X^{n-1} & \xrightarrow{\overline{u^n}} & \text{Coker } d_Y^{n-1} & \xrightarrow{\overline{v^n}} & \text{Coker } d_Z^{n-1} \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow \widehat{d_X^n} & & \downarrow \widehat{d_Y^n} & & \downarrow \widehat{d_Z^n} \\
 0 & \longrightarrow & \text{Ker } d_X^{n+1} & \xrightarrow{\widetilde{u^{n+1}}} & \text{Ker } d_Y^{n+1} & \xrightarrow{\widetilde{v^{n+1}}} & \text{Ker } d_Z^{n+1} \\
 & & \downarrow k_X^{n+1} & & \downarrow k_Y^{n+1} & & \downarrow k_Z^{n+1} \\
 0 & \longrightarrow & X^{n+1} & \xrightarrow{u^{n+1}} & Y^{n+1} & \xrightarrow{v^{n+1}} & Z^{n+1} \longrightarrow 0
 \end{array}$$

由上述构造知

$$k_Y^{n+1} \widehat{d_Y^n} \overline{u^n} p_X^{n-1} = k_Y^{n+1} \widehat{d_Y^n} p_Y^{n-1} u^n = d_Y^n u^n = u^{n+1} d_X^n = u^{n+1} k_X^{n+1} \widehat{d_X^n} p_X^{n-1} = k_Y^{n+1} \widetilde{u^{n+1}} \widehat{d_X^n} p_X^{n-1}.$$

因 k_Y^{n+1} 是单态射且 p_X^{n-1} 是满态射, 故

$$\widehat{d_Y^n} \overline{u^n} = \widetilde{u^{n+1}} \widehat{d_X^n}.$$

同理, $\widehat{d_Z^n} \overline{v^n} = \widetilde{v^{n+1}} \widehat{d_Y^n}$. 从而 (3.2) 是交换图.

至此证得断言 1.

断言 2 我们有如下 6 个同构关系:

$$\begin{aligned}
 \text{Ker } \widehat{d_X^n} &\cong \text{H}^n(X), & \text{Ker } \widehat{d_Y^n} &\cong \text{H}^n(Y), & \text{Ker } \widehat{d_Z^n} &\cong \text{H}^n(Z); \\
 \text{Coker } \widehat{d_X^n} &\cong \text{H}^{n+1}(X), & \text{Coker } \widehat{d_Y^n} &\cong \text{H}^{n+1}(Y), & \text{Coker } \widehat{d_Z^n} &\cong \text{H}^{n+1}(Z).
 \end{aligned} \tag{3.3}$$

事实上, $\text{Ker } \widehat{d}_X^n = \text{Ker}(k_X^{n+1} \widehat{d}_X^n)$; 而由定理 2.1 知,

$$H^n(X) = \text{Ker } d_X^n / \text{Im } d_X^{n-1} = \text{Ker}(k_X^{n+1} \widehat{d}_X^n p_X^{n-1}) / \text{Ker } p_X^{n-1} \cong \text{Ker}(k_X^{n+1} \widehat{d}_X^n) = \text{Ker } \widehat{d}_X^n.$$

即, 得到同构 $a_X^n : H^n(X) \rightarrow \text{Ker } \widehat{d}_X^n$, 且 a_X^n 具有函子性.

同理, 可以得到同构 $a_Y^n : H^n(Y) \rightarrow \text{Ker } \widehat{d}_Y^n$ 和同构 $a_Z^n : H^n(Z) \rightarrow \text{Ker } \widehat{d}_Z^n$.

另一方面, 由事实 2.2 知, $\text{Im } \widehat{d}_X^n = \text{Im } \mu_X^n = \text{Im } \overline{d}_X^n = \text{Im } d_X^n$. 由事实 2.2 知,

$$\text{Coker } \widehat{d}_X^n \cong \text{Ker } d_X^{n+1} / \text{Im } \widehat{d}_X^n = \text{Ker } d_X^{n+1} / \text{Im } d_X^n = H^{n+1}(X).$$

为了简化记号, 将这个同构写成等号, 这不会造成任何问题. 同理,

$$\text{Coker } \widehat{d}_Y^n = H^{n+1}(Y), \quad \text{Coker } \widehat{d}_Z^n = H^{n+1}(Z).$$

至此证得断言 2.

断言 3 我们有如下正合列的交换图:

$$\begin{array}{ccccccccccc} H^n(X) & \xrightarrow{H^n(u)} & H^n(Y) & \xrightarrow{H^n(v)} & H^n(Z) & \xrightarrow{\partial^n} & H^{n+1}(X) & \xrightarrow{H^{n+1}(u)} & H^{n+1}(Y) & \xrightarrow{H^{n+1}(v)} & H^{n+1}(Z) \\ \cong \downarrow a_X^n & & \cong \downarrow a_Y^n & & \cong \downarrow a_Z^n & & \parallel & & \parallel & & \parallel \\ \text{Ker } \widehat{d}_X^n & \xrightarrow{\widetilde{u}^n} & \text{Ker } \widehat{d}_Y^n & \xrightarrow{\widetilde{v}^n} & \text{Ker } \widehat{d}_Z^n & \xrightarrow{c^n} & \text{Coker } \widehat{d}_X^n & \xrightarrow{\widetilde{u}^{n+1}} & \text{Coker } \widehat{d}_Y^n & \xrightarrow{\widetilde{v}^{n+1}} & \text{Coker } \widehat{d}_Z^n, \end{array} \quad (3.4)$$

其中连接态射 ∂^n 由连接态射 c^n 和相应的同构确定, 使得中间的方块是交换的.

事实上, 对容许态射的正合列交换图 (3.2) 使用蛇引理得到 6 项正合列

$$\text{Ker } \widehat{d}_X^n \xrightarrow{\widetilde{u}^n} \text{Ker } \widehat{d}_Y^n \xrightarrow{\widetilde{v}^n} \text{Ker } \widehat{d}_Z^n \xrightarrow{c^n} \text{Coker } \widehat{d}_X^n \xrightarrow{\widetilde{u}^{n+1}} \text{Coker } \widehat{d}_Y^n \xrightarrow{\widetilde{v}^{n+1}} \text{Coker } \widehat{d}_Z^n. \quad (3.5)$$

态射图 (3.4) 中中间方块的交换性是由连接态射 ∂^n 的构造决定的. 为说明整个图是交换的, 只需要说明两端的 4 个方块是交换的, 因此, 只需要说明第一和四个方块是交换的即可.

先说明第一个方块是交换的, 即下图中包含 $H^n(X)$ 和 $\text{Ker } \widehat{d}_X^n$ 的平行四边形是交换的:

$$\begin{array}{ccccccc} X^{n-1} & \xrightarrow{d_X^{n-1}} & X^n & \xrightarrow{d_X^n} & X^{n+1} \\ \downarrow u^{n-1} & \nearrow \widehat{d}_X^{n-1} & \downarrow k_X^n & \nearrow p_X^{n-1} & \downarrow k_X^{n+1} \\ \text{Im } d_X^{n-1} & \xrightarrow{\delta_X^{n-1}} & \text{Ker } d_X^n & \xrightarrow{\pi'_X} & H^n(X) & \xrightarrow{b_X^n} & \text{Coker } d_X^{n-1} & \xrightarrow{\widehat{d}_X^n} & \text{Ker } d_X^{n+1} \\ \downarrow \widetilde{u}^n & \downarrow \widetilde{u}^n & \downarrow \widetilde{u}^n & \downarrow \widetilde{u}^n & \downarrow \widetilde{u}^n & \downarrow \widetilde{u}^n & \downarrow \widetilde{u}^n & \downarrow \widetilde{u}^n & \downarrow \widetilde{u}^n \\ Y^{n-1} & \xrightarrow{d_Y^{n-1}} & Y^n & \xrightarrow{d_Y^n} & Y^{n+1} \\ \downarrow u^{n-1} & \nearrow \widehat{d}_Y^{n-1} & \downarrow k_Y^n & \nearrow p_Y^{n-1} & \downarrow k_Y^{n+1} \\ \text{Im } d_Y^{n-1} & \xrightarrow{\delta_Y^{n-1}} & \text{Ker } d_Y^n & \xrightarrow{\pi'_Y} & H^n(Y) & \xrightarrow{b_Y^n} & \text{Coker } d_Y^{n-1} & \xrightarrow{\widehat{d}_Y^n} & \text{Ker } d_Y^{n+1} \\ \downarrow \widetilde{u}^n & \downarrow \widetilde{u}^n & \downarrow \widetilde{u}^n & \downarrow \widetilde{u}^n & \downarrow \widetilde{u}^n & \downarrow \widetilde{u}^n & \downarrow \widetilde{u}^n & \downarrow \widetilde{u}^n & \downarrow \widetilde{u}^n \\ & & \text{Ker } \widehat{d}_Y^n & & & & & & \end{array}$$

为了应用定理 2.1, 令

$$g := p_X^{n-1}, \quad h := k_X^{n+1} \widehat{d}_X^n,$$

则 $hg = d_X^n$. 定理 2.1 中的 k_{hg} 就是上图中的 k_X^n , k_g 就是 $k_X^n \delta_X^{n-1}$, k_h 就是 $\widehat{k_X^n}$, π 就是 $a_X^n \pi'_X$. 根据定理 2.1 可得 $gk_{hg} = k_h \pi$, 即

$$p_X^{n-1} k_X^n = \widehat{k_X^n} a_X^n \pi'_X.$$

因 π'_X 是 δ_X^{n-1} 的余核且 $p_X^{n-1} k_X^n \delta_X^{n-1} = 0$, 故存在唯一的态射 b_X^n 使得 $p_X^{n-1} k_X^n = b_X^n \pi'_X$. 同理, 存在唯一的态射 b_Y^n 使得 $p_Y^{n-1} k_Y^n = b_Y^n \pi'_Y$. 又因 $p_X^{n-1} k_X^n = \widehat{k_X^n} a_X^n \pi'_X$, 由 b_X^n 的唯一性知,

$$b_X^n = \widehat{k_X^n} a_X^n.$$

同理, $b_Y^n = \widehat{k_Y^n} a_Y^n$.

根据构造有如下等式:

$$\begin{aligned} \widehat{k_Y^n} \widetilde{u^n} &= \overline{u^n} \widehat{k_X^n}, & b_X^n \pi'_X &= p_X^{n-1} k_X^n, & \overline{u^n} p_X^{n-1} &= p_Y^{n-1} u^n, \\ u^n k_X^n &= k_X^n \widetilde{u^n}, & p_Y^{n-1} k_Y^n &= b_Y^n \pi'_Y, & \pi'_Y \widetilde{u^n} &= H^n(u) \pi'_X. \end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned} \widehat{k_Y^n} \widetilde{u^n} a_X^n \pi'_X &= \overline{u^n} \widehat{k_X^n} a_X^n \pi'_X = \overline{u^n} b_X^n \pi'_X = \overline{u^n} p_X^{n-1} k_X^n = p_Y^{n-1} u^n k_X^n \\ &= p_Y^{n-1} k_Y^n \widetilde{u^n} = b_Y^n \pi'_Y \widetilde{u^n} = b_Y^n H^n(u) \pi'_X \\ &= \widehat{k_Y^n} a_Y^n H^n(u) \pi'_X, \end{aligned}$$

因 $\widehat{k_Y^n}$ 是单态射以及 π'_X 是满态射, 故 $\widetilde{u^n} a_X^n = a_Y^n H^n(u)$.

再说明态射图 (3.4) 中第四个方块是交换的. 根据第 2 步可知, $\widehat{d_X^n} = \delta_X^n \mu_X^n$ 和 $\widehat{d_Y^n} = \delta_Y^n \mu_Y^n$ 分别是 $\widehat{d_X^n}$ 和 $\widehat{d_Y^n}$ 的容许满 - 容许单 - 分解. 将 δ_X^n 的余核记为 $\widehat{p_X^n}$. 因 $\text{Coker } \widehat{d_X^n} = \text{Coker } \delta_X^n$, 故 $\widehat{p_X^n}$ 也是 $\widehat{d_X^n}$ 的余核. 同理, 将 $\widehat{d_Y^n}$ 和 δ_Y^n 的余核均记为 $\widehat{p_Y^n}$, 则在如下态射图:

$$\begin{array}{ccccc} \text{Coker } d_X^{n-1} & \xrightarrow{\widehat{d_X^n}} & \text{Ker } d_X^{n+1} & \xrightarrow{\widehat{p_X^n}} & \text{Coker } \widehat{d_X^n} \\ & \searrow \mu_X^n & \nearrow \delta_X^n & \searrow \widehat{p_X^n} & \parallel \\ & & \text{Im } d_X^n & & H^{n+1}(X) \\ & & \nearrow \widetilde{u^{n+1}} & \searrow p_X^n & \parallel \\ & & & & \text{Coker } \widehat{d_X^n} \\ & & & & \downarrow \widetilde{u^{n+1}} \\ \text{Coker } d_Y^{n-1} & \xrightarrow{\widehat{d_Y^n}} & \text{Ker } d_Y^{n+1} & \xrightarrow{\widehat{p_Y^n}} & \text{Coker } \widehat{d_Y^n} \\ & \searrow \mu_Y^n & \nearrow \delta_Y^n & \searrow \widehat{p_Y^n} & \parallel \\ & & \text{Im } d_Y^n & & H^{n+1}(Y) \\ & & & & \downarrow H^{n+1}(u) \\ & & & & \text{Coker } \widehat{d_Y^n} \end{array}$$

中有

$$\widehat{p_Y^n} \widetilde{u^{n+1}} = H^{n+1}(u) \widehat{p_X^n}, \quad \widehat{p_Y^n} \widetilde{u^{n+1}} = \overline{u^{n+1}} \widehat{p_X^n}.$$

由 $\widehat{p_X^n}$ 是满态射即得 $H^{n+1}(u) = \overline{u^{n+1}}$. 也就是说, 态射图 (3.4) 中第四个方块是交换的.

从而由正合列 (3.5) 知态射图 (3.4) 中第一行也是正合列. 由此得同调代数基本定理, 其中连接态射 ∂^n ($n \in \mathbb{Z}$) 的函子性由连接态射 c^n ($n \in \mathbb{Z}$) 的函子性和 a_Z^n ($n \in \mathbb{Z}$) 的函子性推导出来.

(4) $\implies$ (5) 将 3×3 引理中的 3 列分别记为 X 、 Y 和 Z .

(i) 设 Y 是正合列. 若 X 是正合列, 考虑左边和中间两列, 即如下正合列的交换图:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & X_1 & \xrightarrow{x_1} & X_2 & \xrightarrow{x_2} & X_3 \longrightarrow 0 \\ & & u_1 \downarrow & & u_2 \downarrow & & \downarrow u_3 \\ 0 & \longrightarrow & Y_1 & \xrightarrow{y_1} & Y_2 & \xrightarrow{y_2} & Y_3 \longrightarrow 0. \end{array}$$

根据假设知, u_1 、 u_2 和 u_3 均是容许单态射, 特别地, 它们均是容许态射. 对这个交换图使用弱形式蛇引理, 得到如下正合列:

$$0 \longrightarrow \operatorname{Coker} u_1 \xrightarrow{\overline{y_1}} \operatorname{Coker} u_2 \xrightarrow{\overline{y_2}} \operatorname{Coker} u_3 \longrightarrow 0,$$

其中 $\overline{y_1}$ 和 $\overline{y_2}$ 分别是由 y_1 和 y_2 诱导的 (容许) 态射. 因 (u_i, v_i) 是容许短正合列, 故 $\operatorname{Coker} u_i \cong Z_i$ ($i = 1, 2, 3$). 不失一般性, 不妨设 $\operatorname{Coker} u_i = Z_i$ ($i = 1, 2, 3$). 因 $\overline{y_i}$ 是使得 $v_{i+1}y_i = \overline{y_i}v_i$ 成立的唯一态射 ($i = 1, 2$), 故 $\overline{y_i} = z_i$ ($i = 1, 2$). 这证得 Z 也是正合列.

对偶地, 若 Z 是正合列, 则 X 也是正合列.

(ii) 由题设知, X 、 Y 和 Z 均为容许复形且

$$0 \longrightarrow X \longrightarrow Y \longrightarrow Z \longrightarrow 0$$

为容许复形短正合列. 应用同调代数基本定理即得

$$0 \rightarrow H^1(X) \rightarrow H^1(Y) \rightarrow H^1(Z) \rightarrow H^2(X) \rightarrow H^2(Y) \rightarrow H^2(Z) \rightarrow H^3(X) \rightarrow H^3(Y) \rightarrow H^3(Z) \rightarrow 0.$$

由于 X 和 Z 均为正合列, 故 $H^i(X) = H^i(Z) = 0$ ($i = 1, 2, 3$). 从而 $H^i(Y) = 0$ ($i = 1, 2, 3$). 即 Y 是正合列.

至此, 定理 3.1 证明完毕.

4 广义 Abel 范畴中的蛇引理

4.1 定理的表述与注记

本小节证明在广义 Abel 范畴中三种形式的蛇引理均成立, 并且它们彼此可以互相推导出来. 即有如下定理.

定理 4.1 设 $\mathcal{A}$ 是广义 Abel 范畴. 则以下结论均成立, 并且等价.

(1) (弱形式蛇引理) 设下图是 $\mathcal{A}$ 中两行均正合的态射交换图:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & X_1 & \xrightarrow{x_1} & X_2 & \xrightarrow{x_2} & X_3 \longrightarrow 0 \\ & & f_1 \downarrow & & f_2 \downarrow & & \downarrow f_3 \\ 0 & \longrightarrow & Y_1 & \xrightarrow{y_1} & Y_2 & \xrightarrow{y_2} & Y_3 \longrightarrow 0, \end{array}$$

则有 $\mathcal{A}$ 中的正合列

$$0 \longrightarrow \operatorname{Ker} f_1 \xrightarrow{\widetilde{x_1}} \operatorname{Ker} f_2 \xrightarrow{\widetilde{x_2}} \operatorname{Ker} f_3 \xrightarrow{c} \operatorname{Coker} f_1 \xrightarrow{\overline{y_1}} \operatorname{Coker} f_2 \xrightarrow{\overline{y_2}} \operatorname{Coker} f_3 \longrightarrow 0, \quad (4.1)$$

其中 $\widetilde{x_1}$ 、 $\widetilde{x_2}$ 、 $\overline{y_1}$ 和 $\overline{y_2}$ 分别由 x_1 、 x_2 、 y_1 和 y_2 诱导; 并且连接态射 c 具有函子性, 即若有如下 4 行均正合的交换图 (故有 11 个交换的方块):

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & X_1 & \xrightarrow{x_1} & X_2 & \xrightarrow{x_2} & X_3 \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow f_1 & \searrow \alpha_1 & \downarrow f_2 & \searrow \alpha_2 & \downarrow f_3 \searrow \alpha_3 \\
 0 & \longrightarrow & X'_1 & \xrightarrow{x'_1} & X'_2 & \xrightarrow{x'_2} & X'_3 \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow f'_1 & \searrow \alpha'_1 & \downarrow f'_2 & \searrow \alpha'_2 & \downarrow f'_3 \searrow \alpha'_3 \\
 0 & \longrightarrow & Y_1 & \xrightarrow{y_1} & Y_2 & \xrightarrow{y_2} & Y'_3 \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow f'_1 & \searrow \alpha'_1 & \downarrow f'_2 & \searrow \alpha'_2 & \downarrow f'_3 \searrow \alpha'_3 \\
 0 & \longrightarrow & Y'_1 & \xrightarrow{y'_1} & Y'_2 & \xrightarrow{y'_2} & Y'_3 \longrightarrow 0,
 \end{array}$$

则有如下正合列的交换图:

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
 0 & \longrightarrow & \text{Ker } f_1 & \xrightarrow{\widetilde{x_1}} & \text{Ker } f_2 & \xrightarrow{\widetilde{x_2}} & \text{Ker } f_3 & \xrightarrow{c} & \text{Coker } f_1 & \xrightarrow{\overline{y_1}} & \text{Coker } f_2 & \xrightarrow{\overline{y_2}} & \text{Coker } f_3 & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow \widetilde{\alpha_1} & & \downarrow \widetilde{\alpha_2} & & \downarrow \widetilde{\alpha_3} & & \downarrow \overline{\alpha_1} & & \downarrow \overline{\alpha_2} & & \downarrow \overline{\alpha_3} & & \\
 0 & \longrightarrow & \text{Ker } f'_1 & \xrightarrow{\widetilde{x'_1}} & \text{Ker } f'_2 & \xrightarrow{\widetilde{x'_2}} & \text{Ker } f'_3 & \xrightarrow{c'} & \text{Coker } f'_1 & \xrightarrow{\overline{y'_1}} & \text{Coker } f'_2 & \xrightarrow{\overline{y'_2}} & \text{Coker } f'_3 & \longrightarrow & 0.
 \end{array} \quad (4.2)$$

(2) (强形式蛇引理) 设下图是 $\mathcal{A}$ 中两行均正合的态射交换图:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 X_0 & \xrightarrow{x_0} & X_1 & \xrightarrow{x_1} & X_2 & \xrightarrow{x_2} & X_3 & \xrightarrow{x_3} & X_4 \\
 f_0 \downarrow & & f_1 \downarrow & & f_2 \downarrow & & f_3 \downarrow & & f_4 \downarrow \\
 Y_0 & \xrightarrow{y_0} & Y_1 & \xrightarrow{y_1} & Y_2 & \xrightarrow{y_2} & Y_3 & \xrightarrow{y_3} & Y_4,
 \end{array}$$

其中 f_0 是满态射, f_4 是单态射. 则有正合列

$$\text{Ker } f_1 \xrightarrow{\widetilde{x_1}} \text{Ker } f_2 \longrightarrow \text{Ker } f_3 \xrightarrow{c} \text{Coker } f_1 \longrightarrow \text{Coker } f_2 \xrightarrow{\overline{y_2}} \text{Coker } f_3,$$

并且连接态射 c 具有函子性.

若 x_1 是单态射, 则 $\widetilde{x_1}$ 是单态射; 若 y_2 是满态射, 则 $\overline{y_2}$ 是满态射.

(3) (蛇引理) 设下图是 $\mathcal{A}$ 中正合列的交换图:

$$\begin{array}{ccccccc}
 X_1 & \xrightarrow{x_1} & X_2 & \xrightarrow{x_2} & X_3 & \longrightarrow & 0 \\
 f_1 \downarrow & & f_2 \downarrow & & f_3 \downarrow & & \\
 0 & \longrightarrow & Y_1 & \xrightarrow{y_1} & Y_2 & \xrightarrow{y_2} & Y_3.
 \end{array}$$

则有正合列

$$\text{Ker } f_1 \xrightarrow{\widetilde{x_1}} \text{Ker } f_2 \longrightarrow \text{Ker } f_3 \xrightarrow{c} \text{Coker } f_1 \longrightarrow \text{Coker } f_2 \xrightarrow{\overline{y_2}} \text{Coker } f_3$$

并且连接态射 c 具有函子性.

若 x_1 是单态射, 则 $\widetilde{x_1}$ 是单态射; 若 y_2 是满态射, 则 $\overline{y_2}$ 是满态射.

注 4.1 (1) 广义 Abel 范畴中强形式蛇引理由 Iversen^[15] 给出; 而这三种形式的蛇引理的等价性在之前文献中没有表述. 可能受当时作图不便的影响, 文献 [15] 只给出强形式蛇引理证明的一个概要, 其中关键的连接态射的构造没有明确给出. 本节先证明弱形式蛇引理, 再证明弱形式蛇引理可以推导出强形式蛇引理, 从而证明定理 4.1.

(2) Abel 范畴中利用拉回和推出来证明蛇引理的方法 (参见文献 [4, 第 297 页] 和 [5, 第 87 页]) 并不适用证明广义 Abel 范畴中的蛇引理. 因为在广义 Abel 范畴中拉回和推出的存在性并不能保证.

(3) 利用广义 Abel 范畴中的蛇引理可以推导出同调代数基本定理、 3×3 引理、单 4 引理、满 4 引理、5 引理和短 5 引理等正合性定理.

4.2 预备引理

引理 4.1 设 $\mathcal{A}$ 是广义 Abel 范畴. 对于 $\mathcal{A}$ 中态射 $f_i : X_i \rightarrow Y_i$ ($i = 0, 1, 2, 3$), 记 f_i 的核为 $k_i : \text{Ker } f_i \rightarrow X_i$, 记 f_i 的余核为 $\pi_i : Y_i \rightarrow \text{Coker } f_i$.

(1) 设下图是 $\mathcal{A}$ 中正合列的交换图:

$$\begin{array}{ccccc} X_1 & \xrightarrow{x_1} & X_2 & \xrightarrow{x_2} & X_3 \\ f_1 \downarrow & & f_2 \downarrow & & f_3 \downarrow \\ Y_1 & \xrightarrow{y_1} & Y_2 & \xrightarrow{y_2} & Y_3. \end{array}$$

(i) 若 x_1 和 y_1 均为单态射, 则有正合列

$$0 \longrightarrow \text{Ker } f_1 \xrightarrow{\widetilde{x_1}} \text{Ker } f_2 \xrightarrow{\widetilde{x_2}} \text{Ker } f_3,$$

并且满足 $k_2 \widetilde{x_1} = x_1 k_1$, $k_3 \widetilde{x_2} = x_2 k_2$.

(i') 若 x_2 和 y_2 均为满态射, 则有正合列

$$\text{Coker } f_1 \xrightarrow{\overline{y_1}} \text{Coker } f_2 \xrightarrow{\overline{y_2}} \text{Coker } f_3 \longrightarrow 0,$$

并且满足 $\overline{y_1} \pi_1 = \pi_2 y_1$, $\overline{y_2} \pi_2 = \pi_3 y_2$.

(ii) 设 f_1 、 x_2 和 y_2 均为满态射. 则 (i) 中的态射 $\widetilde{x_2} : \text{Ker } f_2 \rightarrow \text{Ker } f_3$ 是满态射. 若 x_2 还是单态射, 则 $\widetilde{x_2}$ 也是单态射.

(2) 设下图是 $\mathcal{A}$ 中正合列的交换图:

$$\begin{array}{ccccccc} X_0 & \xrightarrow{x_0} & X_1 & \xrightarrow{x_1} & X_2 & \xrightarrow{x_2} & X_3 \\ f_0 \downarrow & & f_1 \downarrow & & f_2 \downarrow & & f_3 \downarrow \\ Y_0 & \xrightarrow{y_0} & Y_1 & \xrightarrow{y_1} & Y_2 & \xrightarrow{y_2} & Y_3. \end{array}$$

(i) 设 f_0 是满态射. 则有正合列

$$\text{Ker } f_1 \xrightarrow{\widetilde{x_1}} \text{Ker } f_2 \xrightarrow{\widetilde{x_2}} \text{Ker } f_3$$

满足 $k_2 \widetilde{x_1} = x_1 k_1$, $k_3 \widetilde{x_2} = x_2 k_2$. 若 x_1 还是单态射, 则 $\widetilde{x_1}$ 也是单态射.

(i') 设 f_3 是单态射. 则有正合列

$$\text{Coker } f_1 \xrightarrow{\overline{y_1}} \text{Coker } f_2 \xrightarrow{\overline{y_2}} \text{Coker } f_3$$

满足 $\pi_2 y_1 = \overline{y_1} \pi_1$, $\pi_3 y_2 = \overline{y_2} \pi_2$. 若 y_2 还是满态射, 则 $\overline{y_2}$ 也是满态射.

证明 (1) (i) 因 $f_2 x_1 k_1 = y_1 f_1 k_1 = 0$, 故存在唯一的态射 $\widetilde{x_1} : \text{Ker } f_1 \rightarrow \text{Ker } f_2$ 使得

$$k_2 \widetilde{x_1} = x_1 k_1.$$

因 k_2 、 x_1 和 k_1 均为单态射, 故 $\widetilde{x_1}$ 也是单态射. 因 $f_3 x_2 k_2 = y_3 f_2 k_2 = 0$, 故存在唯一的态射 $\widetilde{x_2} : \text{Ker } f_2 \rightarrow \text{Ker } f_3$ 使得 $k_3 \widetilde{x_2} = x_2 k_2$.

易知 $\widetilde{x_2} \widetilde{x_1} = 0$. 下证 $\widetilde{x_1}$ 是 $\widetilde{x_2}$ 的核. 事实上, 任取 $z : Z \rightarrow \text{Ker } f_2$ 使得 $\widetilde{x_2} z = 0$, 则

$$x_2 k_2 z = k_3 \widetilde{x_2} z = 0,$$

故存在唯一的态射 $\beta : Z \rightarrow X_1$ 使得 $x_1 \beta = k_2 z$. 又因 $y_1 f_1 \beta = f_2 x_1 \beta = f_2 k_2 z = 0$, 故由 y_1 是单态射即知 $f_1 \beta = 0$. 从而存在唯一的态射 $\alpha : Z \rightarrow \text{Ker } f_1$ 使得 $k_1 \alpha = \beta$. 参见下图:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & Z & & \\ & & & & \downarrow z & & \\ & & & \alpha & \swarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & \text{Ker } f_1 & \xrightarrow{\widetilde{x_1}} & \text{Ker } f_2 & \xrightarrow{\widetilde{x_2}} & \text{Ker } f_3 \\ & & \downarrow k_1 & \searrow \beta & \downarrow k_2 & & \downarrow k_3 \\ 0 & \longrightarrow & X_1 & \xrightarrow{x_1} & X_2 & \xrightarrow{x_2} & X_3 \\ & & \downarrow f_1 & & \downarrow f_2 & & \downarrow f_3 \\ 0 & \longrightarrow & Y_1 & \xrightarrow{y_1} & Y_2 & \xrightarrow{y_2} & Y_3. \end{array}$$

于是 $k_2 \widetilde{x_1} \alpha = x_1 k_1 \alpha = x_1 \beta = k_2 z$. 因 k_2 是单态射, 故 $z = \widetilde{x_1} \alpha$. 这证明了 $\widetilde{x_1}$ 是 $\widetilde{x_2}$ 的核.

(i') 在反范畴 $\mathcal{A}^{\text{op}}$ 中利用 (i) 即得.

(ii) 记 $\sigma_i : \text{Ker } x_i \rightarrow X_i$ 为 x_i 的核, $\iota_i : \text{Ker } y_i \rightarrow Y_i$ 为 y_i 的核, $\overline{\sigma}_i : X_i \rightarrow \text{Im } x_i$, $\overline{\iota}_i : Y_i \rightarrow \text{Im } y_i$ 为典范满态射, $\overline{k}_i : X_i \rightarrow \text{Im } f_i$ 为典范满态射, $\widetilde{\pi}_i : \text{Im } f_i \rightarrow Y_i$ 为典范单态射, 其中 $i = 1, 2$.

由 (i') 得到正合列

$$0 \longrightarrow \text{Coker } f_2 \xrightarrow{\overline{y_2}} \text{Coker } f_3 \longrightarrow 0.$$

由 y_1 的容许满 - 容许单 - 分解知 $y_1 = \iota_2 \overline{\iota}_1$, 故

$$\pi_2 f_2 x_1 = 0 = \pi_2 y_1 f_1 = \pi_2 \iota_2 \overline{\iota}_1 f_1.$$

因 $\overline{\iota}_1 f_1$ 是满态射, 故 $\pi_2 \iota_2 = 0$. 从而有如下交换图:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \text{Ker } y_2 & \xrightarrow{\iota_2} & Y_2 & \xrightarrow{y_2} & Y_3 \\ & & \downarrow & & \downarrow \pi_2 & & \downarrow \pi_3 \\ 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \text{Coker } f_2 & \xrightarrow{\overline{y_2}} & \text{Coker } f_3. \end{array}$$

对上图应用 (i) 即得正合列

$$0 \longrightarrow \text{Ker } y_2 \xrightarrow{\widetilde{\iota}_2} \text{Im } f_2 \xrightarrow{\widetilde{y_2}} \text{Im } f_3,$$

并且满足 $\widetilde{\pi_3} \widetilde{y_2} = y_2 \widetilde{\pi_2}$.

由 $\widetilde{\pi_3} \widetilde{y_2} \overline{k_2} = y_2 \widetilde{\pi_2} \overline{k_2} = y_2 f_2 = f_3 x_2 = \widetilde{\pi_3} \overline{k_3} x_2$ 以及 $\widetilde{\pi_3}$ 是单态射, 得到 $\widetilde{y_2} \overline{k_2} = \overline{k_3} x_2$, 并且 $\widetilde{y_2}$ 是满态射. 又由于

$$\text{Ker } \widetilde{y_2} = \text{Ker}(\widetilde{\pi_3} \widetilde{y_2}) = \text{Ker } y_2 = \text{Im } y_1 = \text{Im}(\widetilde{\pi_2} \widetilde{y_1}) = \text{Im } \widetilde{y_1},$$

故有正合列

$$Y_1 = \text{Im } f_1 \xrightarrow{\widetilde{y_1}} \text{Im } f_2 \xrightarrow{\widetilde{y_2}} \text{Im } f_3 \longrightarrow 0.$$

即有如下正合列的交换图:

$$\begin{array}{ccccccc}
 X_1 & \xrightarrow{x_1} & X_2 & \xrightarrow{x_2} & X_3 & \xrightarrow{\quad} & 0 \\
 \downarrow f_1 & \searrow \overline{k_1=f_1} & \downarrow \tilde{y}_1 & \searrow \overline{k_2} & \downarrow \tilde{y}_2 & \searrow \overline{k_3} & \\
 & \text{Im } f_1 & \xrightarrow{\tilde{y}_1} & \text{Im } f_2 & \xrightarrow{\tilde{y}_2} & \text{Im } f_3 & \longrightarrow 0 \\
 & \downarrow \pi_2 & & \downarrow \pi_3 & & & \\
 Y_1 & \xrightarrow{y_1} & Y_2 & \xrightarrow{y_2} & Y_3 & \xrightarrow{\quad} & 0
 \end{array}$$

考虑 $k_3\widetilde{x_2}$ 的余核 $\pi: X_3 \rightarrow \text{Coker}(k_3\widetilde{x_2})$. 参见如下行列均正合的交换图:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & \text{Ker } f_2 & \xrightarrow{\widetilde{x_2}} & \text{Ker } f_3 & & \\
 & & \downarrow k_2 & & \downarrow k_3 & & \\
 X_1 & \xrightarrow{x_1} & X_2 & \xrightarrow{x_2} & X_3 & \xrightarrow{\quad} & 0 \\
 \downarrow f_1 & & \downarrow \overline{k_2} & & \downarrow \overline{k_3} & \searrow \pi & \\
 & & \text{Im } f_2 & \xrightarrow{\tilde{y}_2} & \text{Im } f_3 & \xrightarrow{\quad} & \text{Coker}(k_3\widetilde{x_2}) \\
 & & \downarrow \gamma & & \downarrow \delta' & \searrow \delta & \\
 Y_1 & \xrightarrow{\tilde{y}_1} & Y_2 & \xrightarrow{\tilde{y}_2} & Y_3 & \xrightarrow{\quad} & 0
 \end{array}$$

因 $\pi x_2 k_2 = \pi k_3 \widetilde{x_2} = 0$, 根据 $\text{Im } f_2$ 的泛性质可知, 存在唯一的态射 $\gamma: \text{Im } f_2 \rightarrow \text{Coker}(k_3\widetilde{x_2})$ 使得 $\pi x_2 = \gamma \overline{k_2}$, 并且 γ 是满态射. 因 $\gamma \tilde{y}_1 f_1 = \gamma \overline{k_2} x_1 = \pi x_2 x_1 = 0$ 且 f_1 是满态射, 故 $\gamma \tilde{y}_1 = 0$. 根据 $\text{Im } f_3 = \text{Coker } \tilde{y}_1$ 的泛性质可知, 存在唯一的态射 $\delta: \text{Im } f_3 \rightarrow \text{Coker}(k_3\widetilde{x_2})$ 使得 $\delta \tilde{y}_2 = \gamma$, 并且 δ 是满态射. 因 $\overline{k_3} k_3 \widetilde{x_2} = 0$, 根据 $\text{Coker}(k_3\widetilde{x_2})$ 的泛性质可知, 存在唯一的态射 $\delta': \text{Coker}(k_3\widetilde{x_2}) \rightarrow \text{Im } f_3$ 使得 $\delta' \pi = \overline{k_3}$, 且 δ' 是满态射. 因 $\delta \overline{k_3} x_2 = \delta \tilde{y}_2 \overline{k_2} = \gamma \overline{k_2} = \pi x_2$ 以及 x_2 是满态射, 故 $\delta \overline{k_3} = \pi$. 于是 $\delta' \delta \overline{k_3} = \delta' \pi = \overline{k_3}$, 由 $\overline{k_3}$ 是满态射即知 $\delta' \delta = \text{Id}$. 又因 $\delta \delta' \pi = \delta \overline{k_3} = \pi$, 故由 π 是满态射即知 $\delta \delta' = \text{Id}$, 从而 δ 是同构. 这证明了 $\text{Ker } \pi \cong \text{Ker } \overline{k_3} = \text{Ker } f_3$. 从而

$$\text{Im } \widetilde{x_2} \cong \text{Im}(k_3\widetilde{x_2}) = \text{Ker } \pi \cong \text{Ker } f_3,$$

即 $\widetilde{x_2}$ 是满态射.

(2) (i) 所给的交换图可以拆成如下两个正合列的交换图:

$$\begin{array}{ccccccc}
 X_0 & \xrightarrow{x_0} & X_1 & \xrightarrow{\overline{\sigma_1}} & \text{Im } x_1 & \longrightarrow & 0 \\
 f_0 \downarrow & & f_1 \downarrow & & \overline{f_1} \downarrow & & \\
 Y_0 & \xrightarrow{y_0} & Y_1 & \xrightarrow{\overline{\iota_1}} & \text{Im } y_1 & \longrightarrow & 0, \\
 0 & \longrightarrow & \text{Im } x_1 & \xrightarrow{\sigma_2} & X_2 & \xrightarrow{x_2} & X_3 \\
 & & \overline{f_1} \downarrow & & f_2 \downarrow & & f_3 \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & \text{Im } y_1 & \xrightarrow{\iota_2} & Y_2 & \xrightarrow{y_2} & Y_3.
 \end{array}$$

对左边的交换图应用上述 (1)(ii) 即得满态射 $\text{Ker } f_1 \rightarrow \text{Ker } \overline{f_1}$. 对右边的交换图应用上述 (1)(i) 得到正合列

$$0 \longrightarrow \text{Ker } \overline{f_1} \longrightarrow \text{Ker } f_2 \xrightarrow{\widetilde{x_2}} \text{Ker } f_3.$$

接在一起即得所需的正合列.

(i') 在反范畴 $\mathcal{A}^{\text{op}}$ 中利用 (i) 即得. □

4.3 定理 4.1 的证明

我们先证明 (1) 成立, 即 $\mathcal{A}$ 中弱形式蛇引理成立.

由引理 4.1(1), 有正合列

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow \operatorname{Ker} f_1 \xrightarrow{\widehat{x}_1} \operatorname{Ker} f_2 \xrightarrow{\widehat{x}_2} \operatorname{Ker} f_3, \\ \operatorname{Coker} f_1 \xrightarrow{\widehat{y}_1} \operatorname{Coker} f_2 \xrightarrow{\widehat{y}_2} \operatorname{Coker} f_3 \longrightarrow 0. \end{aligned} \quad (4.3)$$

现只需构造连接态射 c , 并证明 (4.1) 在 $\operatorname{Ker} f_3$ 和 $\operatorname{Coker} f_1$ 处的正合性.

第 1 步 构造连接态射 $c: \operatorname{Ker} f_3 \longrightarrow \operatorname{Coker} f_1$. 考虑如下正合列的交换图:

$$\begin{array}{ccccccc} & X_1 & & \operatorname{Ker}(f_3 x_2) & & \operatorname{Ker} f_3 & \\ & \parallel & & \downarrow k'_2 & & \downarrow k_3 & \\ 0 \longrightarrow & X_1 & \xrightarrow{x_1} & X_2 & \xrightarrow{x_2} & X_3 & \longrightarrow 0 \\ & \downarrow & & \downarrow y_2 f_2 & & \downarrow f_3 & \\ 0 \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & Y_3 & \xlongequal{\quad} & Y_3 & \longrightarrow 0, \end{array}$$

其中 $k'_2: \operatorname{Ker}(f_3 x_2) \longrightarrow X_2$ 是 $f_3 x_2: X_2 \longrightarrow Y_3$ 的核. 对上述的交换图应用两次引理 4.1(2)(i), 得到正合列

$$0 \longrightarrow X_1 \xrightarrow{\widehat{x}_1} \operatorname{Ker}(f_3 x_2) \xrightarrow{\widehat{x}_2} \operatorname{Ker} f_3 \longrightarrow 0,$$

并且满足

$$k'_2 \widehat{x}_1 = x_1, \quad k_3 \widehat{x}_2 = x_2 k'_2.$$

类似地, 考虑如下正合列的交换图:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \longrightarrow & X_1 & \xlongequal{\quad} & X_1 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow 0 \\ & \downarrow f_1 & & \downarrow f_2 x_1 & & \downarrow & \\ 0 \longrightarrow & Y_1 & \xrightarrow{y_1} & Y_2 & \xrightarrow{y_2} & Y_3 & \longrightarrow 0 \\ & \downarrow \pi_1 & & \downarrow \pi'_2 & & \parallel & \\ & \operatorname{Coker} f_1 & & \operatorname{Coker}(f_2 x_1) & & Y_3, & \end{array}$$

其中 $\pi'_2: Y_2 \longrightarrow \operatorname{Coker}(f_2 x_1)$ 是 $f_2 x_1: X_1 \longrightarrow Y_2$ 的余核. 对上述交换图应用两次引理 4.1(2)(i'), 得到正合列

$$0 \longrightarrow \operatorname{Coker} f_1 \xrightarrow{\widehat{y}_1} \operatorname{Coker}(f_2 x_1) \xrightarrow{\widehat{y}_2} Y_3 \longrightarrow 0,$$

并且满足

$$\pi'_2 y_1 = \widehat{y}_1 \pi_1, \quad \widehat{y}_2 \pi'_2 = y_2.$$

因为 $\pi'_2 f_2 k'_2 \widehat{x}_1 = \pi'_2 f_2 x_1 = 0$ 且 $\widehat{x}_2$ 是 $\widehat{x}_1$ 的余核, 故存在唯一的态射 $\alpha: \operatorname{Ker} f_3 \longrightarrow \operatorname{Coker}(f_2 x_1)$ 使得 $\pi'_2 f_2 k'_2 = \alpha \widehat{x}_2$. 又因为

$$\widehat{y}_2 \alpha \widehat{x}_2 = \widehat{y}_2 \pi'_2 f_2 k'_2 = y_2 f_2 k'_2 = f_3 x_2 k'_2 = 0,$$

且 $\widehat{x}_2$ 是满态射, 故 $\widehat{y}_2\alpha = 0$. 又因 $\widehat{y}_1$ 是 $\widehat{y}_2$ 的核, 故存在唯一的态射 $c: \text{Ker } f_3 \rightarrow \text{Coker } f_1$ 使得 $\widehat{y}_1c = \alpha$. 因 $\widehat{y}_1$ 是单态射, 故 $\text{Ker } \alpha = \text{Ker}(\widehat{y}_1c) = \text{Ker } c$. 参见如下交换图:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & \text{Ker}(f_3x_2) & \xrightarrow{\widehat{x}_2} & \text{Ker } f_3 & \rightarrow & 0 \\
 & \nearrow \widehat{x}_1 & \searrow k'_2 & & \searrow c & & \downarrow k_3 \\
 0 \rightarrow & X_1 & \xrightarrow{x_1} & X_2 & \xrightarrow{x_2} & X_3 & \rightarrow 0 \\
 & \downarrow f_1 & & \downarrow f_2 & & \downarrow f_3 & \\
 0 \rightarrow & Y_1 & \xrightarrow{y_1} & Y_2 & \xrightarrow{y_2} & Y_3 & \rightarrow 0 \\
 & \downarrow \pi_1 & & \downarrow \pi'_2 & & \downarrow \widehat{y}_2 & \\
 & \text{Coker } f_1 & \xrightarrow{\widehat{y}_1} & \text{Coker}(f_2x_1) & & &
 \end{array}$$

第 2 步 证明 $\text{Ker } f_2 \xrightarrow{\widetilde{x}_2} \text{Ker } f_3 \xrightarrow{c} \text{Coker } f_1$ 正合. 考虑如下正合列的交换图:

$$\begin{array}{ccccccc}
 X_1 & \xrightarrow{\widehat{x}_1} & \text{Ker}(f_3x_2) & \xrightarrow{\widehat{x}_2} & \text{Ker } f_3 & \rightarrow & 0 \\
 \parallel & & \downarrow f_2k'_2 & & \downarrow \alpha & & \\
 X_1 & \xrightarrow{f_2x_1} & Y_2 & \xrightarrow{\pi'_2} & \text{Coker}(f_2x_1) & \rightarrow & 0.
 \end{array}$$

使用引理 4.1(1)(ii) 得到满态射 $\widetilde{x}_2: \text{Ker}(f_2k'_2) \rightarrow \text{Ker } \alpha$ 使得 $k_\alpha\widetilde{x}_2 = \widehat{x}_2k$, 其中 $k_\alpha: \text{Ker } \alpha \rightarrow \text{Ker } f_3$ 是 α 的核, $k: \text{Ker}(f_2k'_2) \rightarrow \text{Ker}(f_3x_2)$ 是 $f_2k'_2$ 的核.

因 $f_3x_2k_2 = y_2f_2k_2 = 0$, 故存在唯一的态射 $\beta: \text{Ker } f_2 \rightarrow \text{Ker}(f_3x_2)$ 使得 $k'_2\beta = k_2$, 并且 β 是单态射. 因 $f_2k'_2k = 0$, 故存在唯一的态射 $\gamma: \text{Ker}(f_2k'_2) \rightarrow \text{Ker } f_2$ 使得 $k_2\gamma = k'_2k$, 并且 γ 是单态射. 因 $k'_2\beta\gamma = k_2\gamma = k'_2k$ 以及 k'_2 是单态射, 故 $\beta\gamma = k$. 参见下图:

$$\begin{array}{ccccccc}
 \text{Ker}(f_2k'_2) & \xrightarrow{\widetilde{x}_2} & \text{Ker } \alpha & & & & \\
 \downarrow k & \nearrow \gamma & \downarrow k_\alpha & & & & \\
 & \text{Ker } f_2 & & & & & \\
 \downarrow k'_2 & \nearrow \beta & \downarrow k_2 & \xrightarrow{\widetilde{x}_2} & \text{Ker } f_3 & \xrightarrow{c} & \text{Coker } f_1 \\
 & \text{Ker}(f_3x_2) & & & \downarrow k_3 & \searrow \alpha & \downarrow \widehat{y}_1 \\
 & X_2 & & & X_3 & & \text{Coker}(f_2x_1).
 \end{array}$$

因 $f_2k'_2\beta = f_2k_2 = 0$, 故存在唯一的态射 $\varepsilon: \text{Ker } f_2 \rightarrow \text{Ker}(f_2k'_2)$ 使得 $k\varepsilon = \beta$, 并且 ε 是单态射.

因此 $k\varepsilon\gamma = \beta\gamma = k$. 由 k 是单态射知 $\varepsilon\gamma = \text{Id}$. 另一方面, $k_2\gamma\varepsilon = k'_2\beta\gamma\varepsilon = k'_2k\varepsilon = k'_2\beta = k_2$, 由 k_2 是单态射知 $\gamma\varepsilon = \text{Id}$. 因此 γ 和 ε 均为同构. 于是

$$k_3\widetilde{x}_2 = x_2k_2 = x_2k'_2\beta = x_2k'_2\beta\gamma\varepsilon = x_2k'_2k\varepsilon = k_3\widehat{x}_2k\varepsilon = k_3k_\alpha\widetilde{x}_2\varepsilon.$$

由 k_3 是单态射知 $\widetilde{x}_2 = k_\alpha\widehat{x}_2\varepsilon$. 因此

$$\text{Im } \widetilde{x}_2 \cong \text{Im}(k_\alpha\widehat{x}_2\varepsilon) \cong \text{Im}(k_\alpha\widehat{x}_2) \cong \text{Im}(\widetilde{x}_2) = \text{Ker } \alpha.$$

因此 $\text{Ker } f_2 \xrightarrow{\widetilde{x}_2} \text{Ker } f_3 \xrightarrow{c} \text{Coker}(f_2x_1)$ 是正合列. 又由于 $\text{Ker } \alpha = \text{Ker } c$, 故有正合列

$$\text{Ker } f_2 \xrightarrow{\widetilde{x}_2} \text{Ker } f_3 \xrightarrow{c} \text{Coker } f_1.$$

第 3 步 证明 $\text{Ker } f_3 \xrightarrow{c} \text{Coker } f_1 \xrightarrow{\overline{y_1}} \text{Coker } f_2$ 正合. 在 $\mathcal{A}^{\text{op}}$ 中应用第 2 步即得.

第 4 步 将第 1 步中的正合列 (4.3) 与第 2 和 3 步中得到的正合列连接起来, 即得需要证明的正合列 (4.1).

第 5 步 连接态射 c 的函子性的证明. 根据事实 2.3 可知, $\text{Mor}(\mathcal{A})$ 也是广义 Abel 范畴. 对广义 Abel 范畴 $\text{Mor}(\mathcal{A})$ 中的正合列交换图

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \alpha_1 & \xrightarrow{(x_1, x'_1)} & \alpha_2 & \xrightarrow{(x_2, x'_2)} & \alpha_3 \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow (f_1, f'_1) & & \downarrow (f_2, f'_2) & & \downarrow (f_3, f'_3) \\ 0 & \longrightarrow & \alpha'_1 & \xrightarrow{(y_1, y'_1)} & \alpha'_2 & \xrightarrow{(y_2, y'_2)} & \alpha'_3 \longrightarrow 0 \end{array}$$

应用正合列 (4.1) 即得到 $\text{Mor}(\mathcal{A})$ 中的正合列

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow \text{Ker}(f_1, f'_1) & \xrightarrow{(\widetilde{x_1, x'_1})} \text{Ker}(f_2, f'_2) \xrightarrow{(\widetilde{x_2, x'_2})} \text{Ker}(f_3, f'_3) \\ & \xrightarrow{(c, c')} \text{Coker}(f_1, f'_1) \xrightarrow{(\overline{y_1, y'_1})} \text{Coker}(f_2, f'_2) \xrightarrow{(\overline{y_2, y'_2})} \text{Coker}(f_3, f'_3) \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

这恰是交换图 (4.2).

至此广义 Abel 范畴中的弱形式蛇引理得证.

(1) $\implies$ (2) 即弱形式蛇引理 $\implies$ 强形式蛇引理. 记 $\sigma_i : \text{Ker } x_i \longrightarrow X_i$ ($i = 0, 1, 2, 3$) 为 x_i 的核, $\iota_i : \text{Ker } y_i \longrightarrow Y_i$ ($i = 0, 1, 2, 3$) 为 y_i 的核. 记 $\overline{\sigma}_i : X_i \longrightarrow \text{Im } x_i$, $\overline{\iota}_i : Y_i \longrightarrow \text{Im } y_i$ ($i = 0, 1, 2, 3$) 为典范满态射.

因 $y_0 f_0 \sigma_0 = f_1 x_0 \sigma_0 = 0$, 故存在唯一的态射 $\widetilde{f}_0 : \text{Ker } x_0 \longrightarrow \text{Ker } y_0$ 使得 $f_0 \sigma_0 = \iota_0 \widetilde{f}_0$. 于是存在唯一的态射 $\overline{f}_0 : \text{Im } x_0 \longrightarrow \text{Im } y_0$ 使得下图是交换的:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \text{Ker } x_0 & \xrightarrow{\sigma_0} & X_0 & \xrightarrow{\overline{\sigma}_0} & \text{Im } x_0 \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \widetilde{f}_0 & & \downarrow f_0 & & \downarrow \overline{f}_0 \\ 0 & \longrightarrow & \text{Ker } y_0 & \xrightarrow{\iota_0} & Y_0 & \xrightarrow{\overline{\iota}_0} & \text{Im } y_0 \longrightarrow 0. \end{array}$$

因为 f_0 是满态射, 故 $\overline{f}_0$ 是满态射. 类似地得到如下正合列的交换图:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \text{Im } x_0 & \xrightarrow{\sigma_1} & X_1 & \xrightarrow{\overline{\sigma}_1} & \text{Im } x_1 \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \overline{f}_0 & & \downarrow f_1 & & \downarrow \overline{f}_1 \\ 0 & \longrightarrow & \text{Im } y_0 & \xrightarrow{\iota_1} & Y_1 & \xrightarrow{\overline{\iota}_1} & \text{Im } y_1 \longrightarrow 0. \end{array}$$

对此图应用弱形式蛇引理得到如下满态射和同构:

$$\widetilde{\sigma}_1 : \text{Ker } f_1 \longrightarrow \text{Ker } \overline{f}_1, \quad \overline{\iota}_1 : \text{Coker } f_1 \xrightarrow{\cong} \text{Coker } \overline{f}_1. \quad (4.4)$$

同理, 对如下正合列的交换图使用弱形式蛇引理:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \text{Im } x_1 & \xrightarrow{\sigma_2} & X_2 & \xrightarrow{\overline{\sigma}_2} & \text{Im } x_2 \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \overline{f}_1 & & \downarrow f_2 & & \downarrow \overline{f}_2 \\ 0 & \longrightarrow & \text{Im } y_1 & \xrightarrow{\iota_2} & Y_2 & \xrightarrow{\overline{\iota}_2} & \text{Im } y_2 \longrightarrow 0 \end{array}$$

得到正合列

$$0 \longrightarrow \operatorname{Ker} \bar{f}_1 \longrightarrow \operatorname{Ker} f_2 \longrightarrow \operatorname{Ker} \bar{f}_2 \longrightarrow \operatorname{Coker} \bar{f}_1 \longrightarrow \operatorname{Coker} f_2 \longrightarrow \operatorname{Coker} \bar{f}_2 \longrightarrow 0. \quad (4.5)$$

对偶地, 有如下正合列的交换图:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \operatorname{Im} x_3 & \longrightarrow & X_4 & \longrightarrow & \operatorname{Coker} x_3 \longrightarrow 0 \\ & & \bar{f}_3 \downarrow & & f_4 \downarrow & & \bar{f}_4 \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \operatorname{Im} y_3 & \longrightarrow & Y_4 & \longrightarrow & \operatorname{Coker} y_3 \longrightarrow 0 \end{array}$$

和正合列的交换图

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \operatorname{Im} x_2 & \xrightarrow{\sigma_3} & X_3 & \xrightarrow{\bar{\sigma}_3} & \operatorname{Im} x_3 \longrightarrow 0 \\ & & \bar{f}_2 \downarrow & & f_3 \downarrow & & \bar{f}_3 \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \operatorname{Im} y_2 & \xrightarrow{\iota_3} & Y_3 & \xrightarrow{\bar{\iota}_3} & \operatorname{Im} y_3 \longrightarrow 0. \end{array}$$

因 f_4 是单态射, 故 $\bar{f}_3$ 是单态射. 对这两个交换图使用弱形式蛇引理得到单态射和同构

$$\operatorname{Coker} \bar{f}_2 \longrightarrow \operatorname{Coker} f_3, \quad \operatorname{Ker} \bar{f}_2 \xrightarrow{\cong} \operatorname{Ker} f_3. \quad (4.6)$$

最后, 将上述正合列 (4.5) 中的相关项用 (4.4) 和 (4.6) 中的态射替换, 即得所需的正合列. 至此, 强形式蛇引理得证.

(2) $\implies$ (3) 即强形式蛇引理 $\implies$ 蛇引理. 在蛇引理中的交换图第一行的左端之前添加典范单态射 $\operatorname{Ker} x_1 \longrightarrow X_1$, 在第二行右端添加典范满态射 $Y_4 \longrightarrow \operatorname{Coker} y_2$, 则容易验证所得的新方块仍然是交换的, 再使用强形式蛇引理即得.

(3) $\implies$ (1) 即蛇引理可以推导出弱形式蛇引理. 这是显然的.

致谢 作者感谢审稿人仔细审理本文并提出宝贵的建议.

参考文献

- Cartan H, Eilenberg S. Homological Algebra. New Jersey: Princeton University Press, 1956
- Grothendieck A. Sur quelques points d'algèbre homologique, I. Tohoku Math J (2), 1957, 9: 119–221
- Osborne M. Basic Homological Algebra. Graduate Texts in Mathematics, vol. 196. Berlin: Springer-Verlag, 2000
- Kashiwara M, Schapira P. Categories and Sheaves. Berlin-Heidelberg: Springer-Verlag, 2006
- Li K Z. Commutative Algebra and Homological Algebra, 2nd ed (in Chinese). Beijing: Science Press, 2017 [李克正. 交换代数与同调代数 (第二版). 北京: 科学出版社, 2017]
- Zhang P, Wu Q S. Lectures on Basic Algebra (in Chinese). Foundations of Modern Mathematics, vol. 66. Beijing: Higher Education Press, 2018 [章璞, 吴泉水. 基础代数学讲义. 现代数学基础, 66. 北京: 高等教育出版社, 2018]
- Weibel C. An Introduction to Homological Algebra. Cambridge: Cambridge University Press, 1994
- Rotman J. An Introduction to Homological Algebra, 2nd ed. Berlin: Springer, 2009
- Bergman G M. On diagram-chasing in double complexes. Theory Appl Categ, 2012, 26: 60–96
- Bourn D. 3 $\times$ 3 lemma and protomodularity. J Algebra, 2001, 236: 778–795
- Janelidze T. Snake lemma in incomplete relative homological categories. Theory Appl Categ, 2010, 23: 76–91
- Vitale E M. The snail lemma. Theory Appl Categ, 2016, 31: 480–501
- Quillen D. Higher algebraic K-theory I. In: Higher K-Theories. Lecture Notes in Mathematics, vol. 341. Berlin-Heidelberg: Springer-Verlag, 1973, 85–147
- Puppe D. Korrespondenzen in abelschen Kategorien. Math Ann, 1962, 148: 1–30
- Iversen B. Cohomology of Sheaves. Universitext. Berlin: Springer-Verlag, 1986
- Bühler T. Exact categories. Expo Math, 2010, 28: 1–69
- Rong S, Zhang P. Strong version of Snake Lemma in exact categories. Homology Homotopy Appl, 2021, 23: 151–163

- 18 Keller B. Chain complexes and stable categories. *Manuscripta Math*, 1990, 67: 379–417
- 19 Dräxler P, Reiten I, Smalø S O, et al. Exact categories and vector space categories. *Trans Amer Math Soc*, 1999, 351: 647–682
- 20 Thomason R W, Trobaugh T. Higher algebraic K -theory of schemes and of derived categories. In: *The Grothendieck Festschrift*, vol. III. *Progress in Mathematics*, vol. 88. Boston: Birkhäuser, 1990, 247–435
- 21 Mitchell B. *Theory of Categories*. *Pure and Applied Mathematics*, vol. XVII. New York: Academic Press, 1965

Lemmas on exactness in exact categories and in generalized Abelian categories

Shi Rong & Pu Zhang

Abstract Weakly idempotent complete exact categories and generalized Abelian categories are two important generalizations of Abelian categories. Snake lemma is one of the most fundamental lemmas in homological algebra. In this paper, we point out that the three forms of Snake lemma, the fundamental theorem of homological algebra, and the 3×3 lemma, are true and equivalent, in the weakly idempotent complete exact categories; and they imply other lemmas on exactness. In generalized Abelian categories, the three forms of Snake lemma are true and equivalent; and they imply the fundamental theorem of homological algebra and other lemmas on exactness.

Keywords weakly idempotent complete exact category, generalized Abelian category, exactness, Snake lemma, fundamental theorem of homological algebra, 3×3 lemma

MSC(2020) 18C10, 18G50, 18E10, 18E20

doi: 10.1360/SSM-2020-0347