

引力、电磁和自旋的一种经典统一场论

—— I. 基础

余 燊

(中国科学院北京天文台)

摘 要

基于 Einstein 关于物理强几何化的原理,本文提出了一种引力和电磁的经典统一场论. 这种统一场论的数学基础是约化丛 $P[M, SU(2)]$, 以复酉群 $SU(2)$ 的实表示作为结构群. $SU(2)$ 丛给出运动学背景,而 M 上的广义 Einstein 方程确定了宇宙的动力学内容;如果在给定的主纤维丛上定义了仿射联络,它们就完全确定了空-时结构. 这样确定的空-时结构自动地蕴含了电磁和内蕴自旋的存在. 在引力和电磁(其中自旋是重要因素)的交互作用下,发现存在某种类似“磁荷和磁流”的东西.

一、引 论

Einstein-Maxwell 的引力及电磁的理论,长期以来被认为有缺陷: 电磁场方程是人为地通过 Einstein 方程“粘”到引力上的. 否则,电磁场就象是完全来自给定的 Riemann 几何以外. 这种不明确的哲学概念,在文献中(例如见 Coley^[1]),其意义已引起混乱. 很简单,在 E-M 方程中,电磁场经过它的能量动量张量 (EMT) 和 Einstein 方程来确定时空曲率,反之则不真. 这是因为,设给定度量张量 $g_{\lambda\mu}$, 它确定几何背景;一般我们不能找到电磁场张量 $F_{\alpha\beta}$, 同时满足 Einstein 方程及 Maxwell 方程. 数学上这种不相容性在真空电磁场的情形是可以补救的. 如果 Rainich 条件也满足的话(例如 Rainich^[2], Misner 和 Wheeler^[3]),在此情形下我们就有“已经统一的场论”.

然而, E-M 理论的问题,还不在于是否能给予电磁场一种几何的“解释”,使它在电磁场和物质(因此引力)交互作用的一切情形下都成立. 由于 E-M 理论和它的 Riemann 背景,物质和电磁场的总能量动量张量总是假设为对称的. 因此,每当有一个非对称的电磁 EMT,例如 Minkowski 的 EMT,总是提出一个物质的 EMT 使其反称部分正好消去电磁 EMT 的反称部分(例如见 Möller^[4] 和 Israel 和 Stewart^[5]). 然而,最近 De Groot 和 Suttorp^[6] 证明,至少对于宏观介质,总 EMT (场+物质)是非对称的. 显然, Einstein-Maxwell 理论不能容纳非对称的 EMT. 此外, E-M 理论并不产生内蕴自旋(在弯曲的空时结构中),它在粒子领域中与电磁是紧密联系的. 根据 Wheeler^[7] 不包含 $1/2$ 自旋的引力理论不可能作为基本粒子物理的基础.

仅就这一点就要求推广 E-M 理论。因此,所有那些统一场论,仅仅想要给予电磁场某种几何解释,最后归结为具有 Riemann 背景的 E-M 理论,都是不正确的。一方面它们不能容纳一般的非对称 EMT,一方面它们不能证明在弯曲的空时中内蕴自旋的存在。

另一方面,我们注意到,在 Einstein-Cartan 理论中(例如见 Cartan^[8], Trautman^[9], Hehl 等^[10], Cumeyroll^[11] 和 Krechet 等^[12])。自旋(它在广义相对论中至今没有明确定义)是预先假定存在于弯曲的空时中,然后带 n 分推测地硬把它与挠率张量联系起来。最近,Barducci 等^[13]指出,当“纯”引力场作为规范场处理时,经典的自旋粒子是不能与挠率耦合的。因此,弯曲时空中的自旋的存在性是必须证明的,而它与挠率的关系(如果可能有的话)也必须严格地证明。虽然,现在我们有 Sourian^[14] 的综合表述,它考虑到引力、电磁和自旋量的同时存在,但真正几何方面的基本问题尚未解决。总之,他的运动方程组不是封闭的,需要作进一步的假设。本文指出,在引力和电磁同时存在下,自旋是自然地蕴含在空时几何中,而且它是内蕴地与挠率相关的。事实上,应用 $SU(2)$ 的实表示作为空时流形上主纤维丛的结构群。我们将证明引力和电磁是同一个统一场的不同表现,这个场确定空时流形,而自旋的存在是自然地蕴含于这个空时流形之中。

二、基本原理

跟随 Weyl^[15] 的开创性工作, Einstein-Weyl 学派(例如, Tonnelat^[16], Sachs^[17] 和 Klotz^[18])超过了单纯几何解释的要求,建立了物理强几何化原理:有一个且仅有一个统一的场,它描述空时流形的几何。而物质所有力的表现,如引力和电磁只不过是同一个统一场的不同表现。这个统一的几何原理是由下列论据支持的。因为,据狭义相对论,任何形式的能量都有质量,因电磁场具有能量,它也具有质量。据等效原理,引力场可以定义为物质的惯性表现,因而有电磁场的地方必有引力场,这就蕴含了电磁的存在总是伴随着空时曲率。更进一步的支持基于最近由 M. Sachs^[17] 提出的广义 Mach 原理:宇宙中任何物质必定受到宇宙中其他物质的影响,宇宙因此形成“封闭”系统。一切形式的能量可以互相转换,因此任何人不能说,这是引力场而那是电磁场。

可能要问,描述宇宙中一切形式的事物的统一场是什么。在广义相对论中,度规张量 $g_{\mu\nu}$ 是特别与引力场相关的,但它是对称张量,而电磁场由反对称张量 $F_{\alpha\beta}$ 所描述。这可能是 Einstein 考虑非对称张量 $g_{\mu\nu}^0$ 作为统一场的原因^[19]。实际上,若不首先探讨几何在描述物理定律中所起的作用,这个问题是不能直接回答的。广义相对论的原理蕴含着以下原理,没有物质,空时是没有意义的;强几何化原理说,给出世界的物质内容,它的几何结构就完全确定了;反之,给出空时的几何结构,这结构的一切推论必有物理意义。特别,在一种给定的具有仿射联络的世界几何中, Cartan 结构方程, Bianchi 恒等式等等,必定是自然定律的描述或者以某种基本方式参加描述这些定律。事实上,适当选择宇宙的 G-结构,我们发现 Cartan 结构方程, Bianchi 恒等式和 Einstein 方程构成描述一种统一场论的完备方程组,倘若我们把曲率张量 R 作为统一场,而挠率张量 S 作为某种意义的“自旋”。

三、物理约束条件

我们试图利用具有最一般仿射联络的微分流形来描述统一场论。然而,现实的空时可能

有某些性质是这种最一般流形所不具备的,因此,必须把这些物理约束条件加在仿射联络(因而曲率)上,使所得的几何模型在物理上更为现实.最基本的约束条件是 EMT 的一般非对称性.下面我们使用 Schonten^[20]的记号.

假设 Einstein 方程成立

$$G_{\lambda\mu} = \alpha T_{\lambda\mu}; \quad \alpha = \text{常数}. \quad (3.1)$$

这里 Einstein 张量 $G_{\lambda\mu}$ 为

$$G_{\lambda\mu} = R_{\lambda\mu} - \frac{1}{2} g_{\lambda\mu}(R - 2\Lambda); \quad \Lambda = \text{常数}. \quad (3.2)$$

总 EMT 的非对称性要求

$$R_{[\lambda\mu]} \approx 0. \quad (3.3)$$

由 Bianchi 第一恒等式,我们有

$$R_{[\lambda\mu]} = -\frac{1}{2} V_{\lambda\mu} + \nabla_\alpha S_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\alpha} + 2\nabla_{[\lambda} S_{\mu]}^{\cdot\cdot\alpha} + 2S_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\beta} S_{\beta}^{\cdot\cdot\alpha} \quad (3.4)$$

此处

$$V_{\lambda\mu} = 2\partial_{[\lambda} H_{\mu]}^{\cdot\cdot\alpha}, \quad (3.5)$$

$$H_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\alpha} = g^{\alpha\beta} \left[\frac{1}{2} Q_{(\lambda\beta\mu)} - S_{(\lambda\beta\mu)} \right], \quad (3.6)$$

$$\overset{\text{def}}{\phi}_{(\mu\lambda x)} = \phi_{\mu\lambda x} + \phi_{x\mu\lambda} - \phi_{\lambda x\mu}, \quad (3.7)$$

$$\nabla_\mu g_{\alpha\beta} = -Q_{\mu\alpha\beta}. \quad (3.8)$$

因此若下列条件之一满足, (3.3) 式被满足:

$$\mathbf{Q} \approx 0, \mathbf{S} \approx 0, S_{\alpha\lambda}^{\cdot\cdot\lambda} \approx 0. \quad (3.9)$$

Weyl 在其规范不变的统一场论中,应用条件 $\mathbf{Q} \approx 0, \mathbf{S} = 0$, 而 Ponomarev 等^[21] 在更新的理论中,假定了 (3.9) 式的所有条件. 如 Einstein 指出,长度在平移下的不可积性 (即 $\mathbf{Q} \approx 0$) 蕴含了原子发出的谱线对路径的依赖性,与实验证据不符. Harris 等^[22]最近的实验检验了 Weyl 的非度量的假设,得出否定结果. 另一个反对非度量联络的理由是 Trautman^[9], El-kholy^[23], Datta^[24] 及 Kopczynski^[25] 提出的: Dirac 场和引力场的拟经典交互作用只能在度量理论中描述,因非度量联络不能化为 M 上么正交系的 Lorentz 丛. 所有这些考虑使我们相信,非度量条件并不成立. 为了保持条件 (3.3) 式,我们还有 $\mathbf{S} \approx 0$ 及 $S_{\alpha\lambda}^{\cdot\cdot\lambda} \approx 0$. 事实上,下面将看到,本文中所应用的物理约束条件为 $\mathbf{S} \approx 0$ 及 $S_{\alpha\lambda}^{\cdot\cdot\lambda} = 0$.

四、经典宇宙的主纤维丛结构

我们想象宇宙是由空时事件组成的集合 M , 具有唯一的微分结构,且在 M 的每一点上有假想的观察者. 观察者由在每一点的参考系的活动标架确定,其变换法则由一般线性群 $GL(4, R)$ 规定. 因而,可能想要定义宇宙为集 $[M, GL(4, R)]$; 然而这样就可能有某些实际空时具有的性质,在这个更一般的集中却没有. 一方面,也许在 M 上不能整体地定义唯一的一般线性群,因在整体结构上可能有“扭曲”或者有坐标奇点,由于这个原因,宇宙至少需要具有局部平凡性的主标架丛 $P[M, GL(4, R)]$ 的结构 (例如见 Kobayashi 和 Nomizu^[26]). 但由 $GL(4, R)$ 决定的变换规则可能过于一般,不能符合现实;例如,我们可能要求交换时保持长

度,因此要求某个闭子群 $G \subset GL(4, R)$ 来作为切空间 $T_x(M)$ 的自同构群, $x \in M$. 换言之, 我们要求“约化丛” $P(M, G)$ (称为 G -结构, 例如, Sternberg^[27]) 作为宇宙的模型. 显然, $P(M, G)$ 是否近似地描述了宇宙依赖于 G 的选择. 现在, 因 G 是切空间的自同构群, 该空间应符合狭义相对论和量子力学的规律, G 必须包含在狭义相对论和量子力学的不变子群的公共子群中(我们仅考虑通用的不变子群而非那些内部对称群, 它们服从特别的场模型). 我们注意, 基于广义相对论和 Mach 原理的统一场论比平坦的空时物理是更准确的, 后者仅是非线性统一场论的渐近(或切向)逼近. 根据等效性原理, 在极限情形下, 当平坦空时物理与非线性理论接近时, 非线性空时 M 的切空间与狭义相对论和量子力学的平坦空时重合. 然而, 虽然 M 局部具有平坦空时的性质, M 的某些其他性质却可能不为平坦空时所具有. 因此, 确定 $P(M, G)$ 的性质的结构群 G 必是比平坦空时物理的通用不变子群更“小”的子群. 现在还不确切清楚这个子群是什么, 但我们依据下列考虑来作选择; 它的最终检验当然是看我们提出的模型是否成功. 熟知, 在基本粒子领域中, 物理定律在时间反演、宇称及电荷共轭的共同作用下的不变性 (PCT), 是由厄米性及因果律的要求推出的. 这两个要求被特殊复酉群 $SU(2)$ 所满足, 而它还容许旋量, 这是 Einstein 和 Mayer^[28] 认为是相对论中最原始形式的变量. 同时为了符合第三节中考虑的物理要求, 我们将选择 G 为 $SU(2)$ 的实表示, 而我们的宇宙模型将用 $P[M, SU(2)]$ 表示. 现在依 Kobayashi^[29],

$$SU(2) = \{A \in GL(4, R) | AJ = JA, A^t A = I, \det A = 1\}, \quad (4.1)$$

其中

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{pmatrix}, \quad I = \text{单位矩阵}.$$

把 $AJ = JA$ 左乘以 A^t , 得

$$A^t A J = A^t J A,$$

即

$$J = A^t J A, \quad (4.2)$$

因 $A^t A = I$. 因此 (4.1) 式成为

$$SU(2) = \{A \in GL(4, R) | A^t J A = J, A^t A = I, \det A = 1\}, \quad (4.3)$$

即

$$SU(2) = SP(4, R) \cap SO(4). \quad (4.4)$$

因此由定义, 辛群为:

$$SP(4, R) = \{A \in GL(4, R) | A^t J A = J\}. \quad (4.5)$$

因此, 我们的宇宙可以写作

$$P[M, SP(4, R) \cap SO(4)].$$

$SU(2)$ 由 (4.4) 式给出的实表示同时保持度量形式 $dS^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta$ 和辛形式 $\Omega = \frac{1}{2!} a_{\alpha\beta} dx^\alpha$

$\wedge dx^\beta$ 不变, 它们都是 M 上整体定义的. 张量 $(g_{\alpha\beta}, a_{\alpha\beta})$ 构成一个有 16 个分量的位势场.

物理定律是由张量场的微分方程来描述的; 为了比较邻近点的活动标架, 来定义 M 上张量场的不变微分, 我们需要一个“联络”, 它给出 $P[M, SU(2)]$ 的邻近点的同构. 用李代数值的 1-形式 ω 来定义联络, 我们得出

$$\omega' + \omega = 0 \text{ (正交性)}, \quad (4.6)$$

$$\omega' J + J\omega = 0 \text{ (辛性)}. \quad (4.7)$$

因 $SU(2)$ 的李代数是

$$SU(2) = SO(4) \oplus SP(4) \quad (4.8)$$

给出, 此处 $SO(4) = SO(4)$ 的李代数,

$SP(4) = SP(4)$ 的李代数.

条件(4.6)和(4.7)式分别等价于

$$Dg_{\alpha\beta} = 0 \quad (4.9)$$

和

$$Da_{\alpha\beta} = 0, \quad (4.10)$$

这里 D 表示绝对微分,

设 $[e_1, \dots, e_4]$ 表示切于邻域 $U \subset M$ 的活动标架, 则切于 $x \in U$ 的无穷小向量 dx 由

$$dx = \omega^\alpha e_\alpha \quad (4.11)$$

给出, 这里 ω^α 是在 $P[M, SU(2)]$ 上整体定义的典则 1-形式; 基的运动由

$$De_\beta = \omega_\beta^\alpha e_\alpha \quad (4.12)$$

定义, 这里 ω_β^α 是联络 1-形式 $\omega = \omega_\beta^\alpha E_\alpha^\beta$ 的分量, E_α^β 是 $SU(2)$ 的基. 于是得

$$D(dx) = Q^\alpha e_\alpha, \quad (4.13)$$

$$D(De_\beta) = Q_\beta^\alpha e_\alpha, \quad (4.14)$$

此处

$$Q^\alpha = d\omega^\alpha + \omega_\beta^\alpha \wedge \omega^\beta, \quad (4.15)$$

$$Q_\beta^\alpha = d\omega_\beta^\alpha + \omega_\mu^\alpha \wedge \omega_\beta^\mu. \quad (4.16)$$

(4.15) 和 (4.16) 式即 “Cartan 结构方程”. (4.15) 和 (4.16) 式的“可积性条件”为

$$DQ^\alpha = Q_\beta^\alpha \wedge \omega^\beta, \quad (4.17)$$

$$DQ_\beta^\alpha = 0. \quad (4.18)$$

它们分别是 Bianchi 第一和第二恒等式. 方程组 (4.9)–(4.18) 式完全确定了标架丛 $P[M, SU(2)]$, 构成宇宙的运动结构; 它称为 Riemann-几乎辛流形, 它是“几乎”辛的, 因为一般说基本形式 $Q = \frac{1}{2!} a_{\alpha\beta} dx^\alpha \wedge dx^\beta$ 不是闭的:

$$dQ \neq 0. \quad (4.19)$$

要完成整个图象, 我们现在还需要宇宙的“动力内容”, 这是由广义 Einstein 方程给出的,

$$G_{1\mu} = \alpha T_{1\mu}. \quad (4.20)$$

五、统一场论的基本场方程

在本节中, 我们把一切由标架丛拉到 M 上, 这过程的合理性在 Kobayashi 和 Nomizu^[26] 中有证明. 度量条件 (4.9) 式蕴含 (附录 I) 挠率张量对它的一切指标为完全反对称的:

$$S_{\alpha\beta\gamma} = S_{[\alpha\beta\gamma]}, \quad (5.1)$$

这又蕴含两个事实. 首先, 通过 M 的给定点的自平行线和极值曲线重合, 其次有

$$S_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\cdot\alpha} = S_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\cdot\alpha} = 0. \quad (5.2)$$

又在 M 的一个坐标邻域 U 中, (4.9) 式蕴含

$$\Gamma_{\mu\alpha}^\beta = \left\{ \begin{matrix} \beta \\ \mu \alpha \end{matrix} \right\} + H_{\mu\alpha}^{\cdot\cdot\cdot\beta}. \quad (5.3)$$

此处

$$\left\{ \begin{matrix} \beta \\ \mu \quad \alpha \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2} g^{\beta\lambda} \left(\frac{\partial g_{\lambda\alpha}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial g_{\alpha\mu}}{\partial x^\lambda} \right), \quad (5.4)$$

而

$$H_{\mu\alpha}^{\cdot\cdot\beta} = g^{\beta\lambda} (g_{\lambda\rho} S_{\mu\alpha}^{\cdot\cdot\rho} + g_{\mu\rho} S_{\lambda\alpha}^{\cdot\cdot\rho} + g_{\alpha\rho} S_{\mu\lambda}^{\cdot\cdot\rho}). \quad (5.5)$$

而辛性条件 (4.10) 式给出

$$\frac{\partial a_{\lambda\alpha}}{\partial x^\mu} = \Gamma_{\mu\lambda}^\rho a_{\rho\alpha} + \Gamma_{\mu\alpha}^\rho a_{\lambda\rho}, \quad (5.6)$$

$$\frac{\partial a_{\mu\lambda}}{\partial x^\alpha} = \Gamma_{\alpha\mu}^\rho a_{\rho\lambda} + \Gamma_{\alpha\lambda}^\rho a_{\mu\rho}, \quad (5.7)$$

$$\frac{\partial a_{\alpha\mu}}{\partial x^\lambda} = \Gamma_{\lambda\alpha}^\rho a_{\rho\mu} + \Gamma_{\lambda\mu}^\rho a_{\alpha\rho}, \quad (5.8)$$

把 (5.6), (5.7), (5.8) 式相加, 考虑到 $a_{\alpha\rho}$ 的反称性, 得

$$\phi_{\alpha\mu\lambda} = A_{\alpha\mu\lambda} + A_{\lambda\alpha\mu} + A_{\mu\lambda\alpha}, \quad (5.9)$$

其中

$$\phi_{\alpha\mu\lambda} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial a_{\lambda\alpha}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial a_{\mu\lambda}}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial a_{\alpha\mu}}{\partial x^\lambda} \right), \quad (5.10)$$

$$A_{\alpha\mu\lambda} = a_{\rho\alpha} S_{\mu\lambda}^{\cdot\cdot\rho} \quad (5.11)$$

由 $a_{\lambda\alpha}$ 的反称性, (5.10) 式蕴含

$$\phi_{\alpha\mu\lambda} = \phi_{[\alpha\mu\lambda]}, \quad (5.12)$$

即 ϕ 是完全反称的, 因此 (5.9) 式和 S 的完全反称性说明

$$A_{\alpha\mu\lambda} = A_{[\alpha\mu\lambda]}. \quad (5.13)$$

方程 (5.9) 给出

$$a_{\rho\alpha} S_{\mu\lambda}^{\cdot\cdot\rho} = \frac{1}{3} \phi_{\alpha\mu\lambda}. \quad (5.14)$$

现在, 我们定义秩为 2 的反称逆变张量 $a^{\mu\lambda}$:

$$a^{\mu\lambda} = \frac{1}{a} \frac{\partial a}{\partial a_{\mu\lambda}}.$$

此处, $a = \det |a_{\mu\lambda}| \neq 0$, 易见

$$a^{\mu\rho} a_{\lambda\rho} = \delta_\lambda^\mu. \quad (5.16)$$

把 (5.14) 式乘以 $a^{\nu\alpha}$, 得

$$S_{\mu\lambda}^{\cdot\cdot\nu} = \frac{1}{3} a^{\nu\alpha} \phi_{\alpha\mu\lambda}. \quad (5.17)$$

把 (5.17) 式代入 (5.5) 式, 得

$$H_{\mu\alpha}^{\cdot\cdot\nu} = \frac{1}{3} g^{\sigma\lambda} a^{\rho\nu} (g_{\lambda\rho} \phi_{\nu\mu\alpha} + g_{\mu\rho} \phi_{\nu\lambda\alpha} + g_{\alpha\rho} \phi_{\nu\lambda\mu}). \quad (5.18)$$

故张量 H 是用基本张量 $a_{\alpha\beta}$ 的一阶导数的线性函数表示的. 联络系数 $\Gamma_{\alpha\beta}^\lambda$ 就用基本张量的 16 个分量 $g_{\alpha\beta}$ 和 $a_{\alpha\beta}$ 表示出来, 于是 M 的 Riemann 曲率 R 的分量, 由 (4.16) 式在 M 上的“拉回”给出:

$$R_{\lambda\mu\beta}^{\cdot\cdot\cdot\alpha} = \frac{\partial \Gamma_{\mu\beta}^{\alpha}}{\partial x^{\lambda}} - \frac{\partial \Gamma_{\lambda\beta}^{\alpha}}{\partial x^{\mu}} + \Gamma_{\mu\beta}^{\rho} \Gamma_{\lambda\rho}^{\alpha} - \Gamma_{\lambda\beta}^{\rho} \Gamma_{\mu\rho}^{\alpha}. \quad (5.19)$$

因此, 16 个 Einstein 方程

$$G_{\lambda\mu} = \alpha T_{\lambda\mu}, \quad (5.20)$$

有 16 个未知量, 倘若“源” $T_{\lambda\mu}$ 已知.

因此原则上, 若 $(g_{\alpha\beta}, a_{\alpha\beta})$ 的边界条件在“空时的边界”给出, “位势” $(g_{\alpha\beta}, a_{\alpha\beta})$, 因而曲率 R 和挠率 S 也完全确定, 因此空时结构就建立了. 通常的四个自由度由下恒等式得出

$$\nabla_{\alpha} G_{\beta}^{\alpha} = K_{\beta}, \quad (5.21)$$

此处

$$K_{\beta} = S_{\beta\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\sigma} R_{\sigma}^{\lambda} + \frac{1}{2} S_{\beta\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\sigma} R_{\sigma\beta}^{\cdot\cdot\cdot\rho\lambda}. \quad (5.22)$$

恒定式 (5.21) 很容易得到, 只要先把 (4.18) 式拉回然后进行通常的缩并.

广义 Einstein 方程 (5.20) 构成我们的统一场论的基本方程.

六、宇宙结构中电磁与旋量的存在

我们的宇宙结构已由基本方程建立, 需要看这结构是否蕴含电磁和自旋的存在. 为此, 我们引进首先由 Eddington^[30] 提出的恒同原理: “由几何表述转换为物理表述, 仅只要把测量物理量的张量等同于出现在纯几何中的张量; 我们必须首先知道该物理张量具有的实验性质, 然后, 根据数学恒等式寻求具有同样性质的几何张量.

若能完全做到这一点, 则我们将能构造出世界结构的本原关系, 它们服从和物理实验认识的量所服从的同样规律”.

把 (4.18) 式拉回 $U \in M$ 上, 有

$$\nabla_{\lambda}^* R_{\mu\nu\beta}^{\cdot\cdot\cdot\alpha} + \nabla_{\mu}^* R_{\nu\lambda\beta}^{\cdot\cdot\cdot\alpha} + \nabla_{\nu}^* R_{\lambda\mu\beta}^{\cdot\cdot\cdot\alpha} = 0, \quad (6.1)$$

此处

$$\nabla_{\lambda}^* R_{\mu\nu\beta}^{\cdot\cdot\cdot\alpha} = \nabla_{\lambda} R_{\mu\nu\beta}^{\cdot\cdot\cdot\alpha} - S_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\cdot\rho} R_{\rho\nu\beta}^{\cdot\cdot\cdot\alpha}, \quad (6.2)$$

而 D_{λ} 是协变微分算子.

由 (4.9) 式, 恒等式 (6.1) 可重写为:

$$\nabla_{\lambda}^* R_{\mu\nu}^{\cdot\cdot\beta\alpha} + \nabla_{\mu}^* R_{\nu\lambda}^{\cdot\cdot\beta\alpha} + \nabla_{\nu}^* R_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\beta\alpha} = 0, \quad (6.3)$$

故 (4.10) 及 (6.3) 式蕴含

$$\nabla_{\lambda}^* F_{\mu\nu} + \nabla_{\mu}^* F_{\nu\lambda} + \nabla_{\nu}^* F_{\lambda\mu} = 0. \quad (6.4)$$

此处置

$$F_{\lambda\mu} = a_{\alpha\beta} R_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\alpha\beta}, \quad (6.5)$$

于是方程 (6.4) 可写为:

$$D\phi = 0. \quad (6.6)$$

此处 $\phi = \frac{1}{2!} F_{\alpha\beta} dx^{\alpha} \wedge dx^{\beta}.$ (6.7)

因拉回 (4.13) 式得

$$D(dx^{\alpha}) = -\frac{1}{2} S_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\alpha} dx^{\lambda} \wedge dx^{\mu}. \quad (6.8)$$

因此,把绝对微分 D 作用于(6.7)和(6.6)式,得出(6.4), (6.4)或(6.6)式可作为(广义)齐次 Maxwell 方程,倘若我们取 $F_{\alpha\beta}$ 为 Faraday-Maxwell 张量,而 ϕ 作为电磁 2-形式. 由 U 理论 (Einstein-Cartan) 与(6.4)式形式上相同的方程,已由 Prassanna^[31] 应用不同的方法和概念得出.

广义非齐次 Maxwell 方程可以这样得出,若我们将 $D^*\phi$ 与电流 3-形式认同:

$$D^*\phi = J, \quad (6.9)$$

此处

$$*\phi = \frac{1}{2!} \sqrt{|g|} F^{\alpha\beta} \varepsilon_{\alpha\beta\lambda\mu} dx^\lambda \wedge dx^\mu, \quad (6.10)$$

而

$$J = \frac{\beta}{3!} \sqrt{|g|} J^\lambda \varepsilon_{\lambda\mu\nu\rho} dx^\mu \wedge dx^\nu \wedge dx^\rho. \quad (6.11)$$

在(6.11)式中, J^λ 是电流 4-向量, β 为物理常数, $\varepsilon_{\lambda\mu\nu\rho}$ 是 Levi-Civita 记号. 由 S 的完全反称性, (6.9)式简化为(附录 II)

$$\nabla_\mu F^{\lambda\mu} = \beta J^\lambda. \quad (6.12)$$

因此,我们找到(6.5)式定义的 $F_{\lambda\mu}$ 和 Faraday-Maxwell 张量的关系,故宇宙结构已经包含电磁.

现把 Bianchi 第一恒等式(4.17)式拉回 $U \subset M$, 我们得(3.4)式. 度量条件(4.9)式和 S 的完全反称性蕴含 $S_{\mu\alpha}^{\cdot\cdot\alpha} = 0$ 及 $H_{\alpha\mu}^{\cdot\cdot\alpha} = 0$. 因此(3.4)式化为

$$R_{[\lambda\mu]} = \nabla_\alpha S_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\alpha}. \quad (6.13)$$

取(5.20)式的反称部分,我们有

$$R_{[\lambda\mu]} = \alpha T_{[\lambda\mu]}. \quad (6.14)$$

故(6.13)和(6.14)式给出

$$\frac{1}{\alpha} \nabla_\beta S_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\beta} = T_{[\lambda\mu]}. \quad (6.15)$$

方程(6.15)式具有角动量守恒定律的形状,因 $T_{[\lambda\mu]}$ 与“力矩”或“力偶”密切相关. 若(6.15)式取作角动量守恒定律,则量 $\frac{1}{\alpha} S_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\beta}$ 的意义不是别的,就是“典则自旋角动量张量”. 这自旋角动量,当然不是和绕某一旋转中心的距离相关,仅表示 M 上一种“内蕴自旋”的量度. 因此,最后我们证明了如此构造的空时几何蕴含了内蕴自旋的存在.

由(6.15)式, Einstein 方程(5.20)可写为:

$$G_{\lambda\nu} = \alpha T_{(\lambda\nu)} + \nabla_\rho S_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\rho}. \quad (6.16)$$

这证明了下列很重要的事实: 不管最初的 EMT 取什么形式,我们在基本方程中仅需它的对称部分. 特别,让我们取

$$T_{(\lambda\mu)} = M_{\lambda\mu} + \frac{1}{\beta} \left(F_{\lambda\gamma} F^\gamma_{\mu} - \frac{1}{4} g_{\lambda\mu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \right). \quad (6.17)$$

此处 $M_{\lambda\mu}$ 是对称物质 EMT, (6.17)式的右边第二项表示对称电磁 EMT. 故(6.16)式成为:

$$\begin{aligned} G_{\lambda\mu} - \frac{\alpha}{\beta} \left((a_{\alpha\beta} a_{\rho\sigma} R_{\lambda\gamma}^{\cdot\cdot\alpha\beta} R^\gamma_{\mu}{}^{\rho\sigma} - \frac{1}{4} g_{\lambda\mu} a_{\alpha\beta} a_{\gamma\nu} R_{\rho\sigma}^{\cdot\cdot\alpha\beta} R^{\rho\sigma\gamma\nu}) \right. \\ \left. - \nabla_\rho S_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\rho} \right) = \alpha M_{\lambda\mu}. \end{aligned} \quad (6.18)$$

这里 $F_{\lambda\mu}$ 代以它在(6.5)式中的值。在特殊形式(6.18)中,基本 Einstein 方程的解仅需要 $M_{\lambda\mu}$ 。所以 $M_{\lambda\mu}$ 是仅有的“源”,而(6.18)式的其他项构成方程的“场”的部分。

七、广义 Maxwell 方程

我们的统一场论的电磁部分和E-M理论的电磁部分的形式上的差别还需要说明。等置齐次 Maxwell 方程于几何结构中,我们发现

$$D\phi = 0, \quad (7.1)$$

代替了通常的方程

$$d\phi = 0. \quad (7.2)$$

这情形类似于在经典连续介质电动力学中,那里,对一个 E^3 中变形的电路,我们有

$$\oint_{\partial s} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} + \frac{d}{dt} \int_s \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = 0, \quad (7.3)$$

代替对应的静止介质中的方程:

$$\oint_{\partial s} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} + \frac{\partial}{\partial t} \int_s \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = 0. \quad (7.4)$$

这是因为对变形的介质

$$\frac{d}{dt} (d\mathbf{s}) \approx 0.$$

方程(7.3)也可写为

$$\oint_{\partial s} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} + \frac{\partial}{\partial t} \int_s \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \oint_{\partial s} \mathbf{V} \wedge \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r}. \quad (7.5)$$

额外的项称为由于电路在场 $\mathbf{B}$ 中运动产生的“诱导 EMF”。类似地,因为对具有自旋的流形

$$D(dx^\alpha \wedge dx^\beta) \approx 0.$$

方程(7.1)可写为:

$$d\phi = \frac{1}{2!} S_{\lambda\mu}^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} dx^\lambda \wedge dx^\mu. \quad (7.6)$$

(7.6) 式右边的额外项可解释为自旋诱导的电磁场。

现设 ϕ 在 $U \subset M$ 中有紧致支柱,应用 Stokes 定理于(7.6)式得,

$$\oint_{\partial C_3} F_{\lambda\mu} dx^\lambda \wedge dx^\mu = \int_{C_3} S_{\lambda\mu}^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} dx^\lambda \wedge dx^\mu. \quad (7.7)$$

此处 C_3 是 U 中的 3-链。因此张量 $S_{\lambda\mu}^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta}$ 可看为 $F_{\lambda\mu} dx^\lambda \wedge dx^\mu$ 通过该链边界的“流量”的“源”。

现因 $d\phi \approx 0$, 不存在位势 1-形式,使 $\phi = dA$, 因而与(7.5)式很不相同,方程(7.6)有深远的推论。首先,它蕴含“磁荷”的存在,虽然这可能是由自旋导出的。至今普遍接受的是“纯”电磁学,磁荷不存在,但在引力和电磁的联合影响下,不能排除“磁荷”在某种意义下的存在。我们只要回忆电磁波在电动力学的统一场论中存在,但当电学和磁学分离时却不存在。

八、回 顾

我们构造了包含引力、电磁和内蕴自旋的统一场论的空时流形。它是一个单一的几何模

型,除了总 EMT 的非对称性和度量性外,没有其它假设;理论的结构仅包含广义 Einstein 方程和缩并 Bianchi 恒等式。所有这些都有一个共同的基础,即 $SU(2)$ 丛,其结构群是

$$SU(2) = SO(4) \cap SP(4)$$

的实表示,它保持度量形式 $ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta$ 和辛形式 $\Omega = \frac{1}{2!} a_{\alpha\beta} dx^\alpha \wedge dx^\beta$ 的不变性,这些形式都在 M 上整体定义。通常认为构造统一场论的主要困难在于群 $SO(4)$ 和 $SP(4)$ 的不同维数,前者与引力场有关,而后者与电磁场有关。由于应用了 $SU(2)$ 作为构造群,我们有一个维数为 $2^2 - 1 = 3$ 的群。这是在 Einstein 意义下的统一场论,其中我们发现了单一的宇宙场,即曲率张量 R ,引力场及电磁场不是别的,就是这个统一场的不同方面,它们各表现在 (5.20) 和 (6.5) 式中。在此结构中,内蕴自旋的存在由缩约 Bianchi 第 1 恒等式 (6.13) 及给出 (6.15) 式的 Einstein 方程指出。

作为自旋在世界结构中存在的立即推论,Maxwell 方程可写成对称形式

$$d\phi = J_m, \quad (8.1)$$

$$d^*\phi = J, \quad (8.2)$$

其中磁流 3-形式 J_m 由 (7.6) 式给出。对偶方程 (8.2) 取现在的形式是由于 (6.12) 式。因此内蕴自旋不仅给出了引力和电磁的联系,也弥补了纯电磁场中缺乏对称性的缺陷。

附 录 I

要证明度量性蕴含挠率张量的完全反对称性,命

$$\theta_\mu^\pi = (S_{\mu\lambda}^{\pi\cdot\cdot\cdot} - S_{\lambda\mu}^{\pi\cdot\cdot\cdot} + S_{\cdot\cdot\cdot}^{\pi\mu\lambda}) dx^\lambda, \quad (1.1)$$

$$\hat{\omega}_\mu^\pi = \left\{ \begin{matrix} \pi \\ \mu \lambda \end{matrix} \right\} dx^\lambda, \quad (1.2)$$

$$\omega_\mu^\pi = \hat{\omega}_\mu^\pi + \theta_\mu^\pi. \quad (1.3)$$

设 D 表示关于联络 1-形式 ω_μ^π 的绝对微分,而 $\hat{D}$ 表示关于 $\hat{\omega}_\mu^\pi$ 的绝对微分。则我们有

$$\hat{D}g_{\alpha\beta} = 0, \quad (1.4)$$

$$Dg_{\alpha\beta} = 0. \quad (1.5)$$

方程 (1.4) 是通常的 Riemann 条件,而 (1.5) 式是 $SU(2)$ 丛的度量条件。把 (1.3) 式代入 (1.5) 式,得

$$dg_{\lambda\mu} - (\hat{\omega}_\lambda^\rho + \theta_\lambda^\rho)g_{\rho\mu} - (\hat{\omega}_\mu^\rho + \theta_\mu^\rho)g_{\lambda\rho} = 0. \quad (1.6)$$

由 (1.6) 式减去 (1.4) 式,得

$$\theta_\lambda^\rho g_{\rho\mu} + \theta_\mu^\rho g_{\rho\lambda} = 0, \quad (1.7)$$

即

$$\theta_{\mu\sigma} + \theta_{\sigma\mu} = 0. \quad (1.8)$$

把 (1.8) 式代入 (1.1) 式,得

$$[g_{\alpha\lambda}(S_{\mu\lambda}^{\pi\cdot\cdot\cdot} - S_{\lambda\mu}^{\pi\cdot\cdot\cdot} + S_{\cdot\cdot\cdot}^{\pi\mu\lambda}) + g_{\mu\lambda}(S_{\lambda\lambda}^{\pi\cdot\cdot\cdot} + S_{\lambda\cdot\cdot}^{\pi\cdot\cdot} + S_{\cdot\cdot\cdot}^{\pi\lambda\lambda})] dx^\lambda = 0. \quad (1.9)$$

这给出

$$S_{\mu\lambda\sigma} - S_{\lambda\sigma\mu} + S_{\sigma\mu\lambda} + S_{\sigma\lambda\mu} - S_{\lambda\mu\sigma} + S_{\mu\sigma\lambda} = 0. \quad (1.10)$$

由定义, $S_{\alpha\beta\gamma}$ 是关于前两个下标反对称的,故 (1.10) 式给出

$$S_{\lambda\mu\sigma} + S_{\lambda\sigma\mu} = 0, \quad (1.11)$$

即

$$S_{\lambda\mu\sigma} = S_{[\lambda\mu\sigma]}. \quad (1.12)$$

而现在有

$$S_{\lambda\mu}^{\pi\cdot\cdot\cdot} = g^{\rho\lambda} S_{\lambda\mu\rho}, \quad (1.13)$$

故

$$S_{\lambda}^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} S_{\lambda\mu\rho} = 0. \quad (I.14)$$

由于 S 的完全反对称性。类似地有

$$S_{\mu\lambda}^{\lambda} = S_{\lambda}^{\lambda\lambda} = S_{\mu\lambda}^{\lambda} = 0. \quad (I.15)$$

把上述代入 (I.1) 式, 我们最后有

$$\theta_a^a = 0. \quad (I.16)$$

附 录 II

为导出 (6.12) 式, 命

$$*\phi = \frac{1}{2!} \sqrt{|g|} F^{\alpha\beta} \varepsilon_{\alpha\beta\lambda\mu} dx^\lambda \wedge dx^\mu, \quad (II.1)$$

则 (6.9) 式给出 (考虑到 (6.8) 式)

$$\begin{aligned} D*\phi &= \frac{1}{2!} \sqrt{|g|} (\nabla_\nu F^{\alpha\beta} \varepsilon_{\alpha\beta\lambda\mu} - S_{\nu\lambda}^{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \varepsilon_{\alpha\beta\lambda\mu}) dx^\nu \wedge dx^\lambda \wedge dx^\mu \\ &= \frac{\beta}{3!} \sqrt{|g|} \varepsilon_{\rho\nu\lambda\mu} J^\rho dx^\nu \wedge dx^\lambda \wedge dx^\mu, \end{aligned} \quad (II.2)$$

即

$$\delta_{\alpha\beta\gamma}^{\nu\lambda\mu} \left(\nabla_\nu F^{\sigma\rho} \varepsilon_{\sigma\rho\lambda\mu} - S_{\nu\lambda}^{\sigma\rho} F^{\sigma\rho} \varepsilon_{\sigma\rho\lambda\mu} - \frac{\beta}{3} J^\rho \varepsilon_{\rho\nu\lambda\mu} \right) = 0. \quad (II.3)$$

现在

$$\delta_{\alpha\beta\gamma}^{\nu\lambda\mu} = \delta_{\rho\alpha}^{\rho\nu} \delta_{\beta\gamma}^{\lambda\mu}, \quad (II.4)$$

因此

$$\begin{aligned} \delta_{\rho\alpha}^{\rho\nu} \delta_{\beta\gamma}^{\lambda\mu} \nabla_\nu F^{\sigma\rho} \varepsilon_{\sigma\rho\lambda\mu} &= \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \nabla_\nu F^{\sigma\rho} \delta_{\sigma\gamma}^{\nu\lambda} \varepsilon_{\sigma\rho\lambda\mu} \\ &= \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \nabla_\nu F^{\sigma\rho} \delta_{\sigma\gamma}^{\nu\lambda} \delta_{\rho\lambda}^{\lambda\mu} \\ &= \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \nabla_\nu F^{\sigma\rho} (\delta_{\sigma}^{\nu\lambda} \delta_{\rho}^{\lambda\mu} - \delta_{\rho}^{\nu\lambda} \delta_{\sigma}^{\lambda\mu}) \\ &= \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} (\nabla_\nu F^{\nu\mu} - \nabla_\nu F^{\nu\mu}) \\ &= 2\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \nabla_\nu F^{\nu\mu}. \end{aligned} \quad (II.5)$$

类似地,

$$\begin{aligned} \delta_{\sigma\alpha}^{\sigma\nu} \delta_{\beta\gamma}^{\lambda\mu} S_{\nu\lambda}^{\rho\eta} F^{\sigma\eta} \varepsilon_{\sigma\eta\rho\mu} &= \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} S_{\nu\lambda}^{\rho\eta} F^{\sigma\eta} \delta_{\sigma\alpha}^{\nu\lambda} \delta_{\beta\gamma}^{\lambda\mu} \\ &= \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} S_{\nu\lambda}^{\rho\eta} F^{\sigma\eta} (\delta_{\sigma}^{\nu\lambda} \delta_{\beta}^{\lambda\mu} + \delta_{\eta}^{\nu\lambda} \delta_{\beta}^{\lambda\mu} + \delta_{\rho}^{\nu\lambda} \delta_{\beta}^{\lambda\mu} - \delta_{\eta}^{\nu\lambda} \delta_{\beta}^{\lambda\mu} - \delta_{\rho}^{\nu\lambda} \delta_{\beta}^{\lambda\mu} - \delta_{\sigma}^{\nu\lambda} \delta_{\beta}^{\lambda\mu}) \\ &= \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} (S_{\nu\lambda}^{\rho\eta} F^{\sigma\eta} + S_{\nu\sigma}^{\rho\eta} F^{\sigma\eta} + S_{\sigma\eta}^{\rho\eta} F^{\sigma\eta} - S_{\sigma\lambda}^{\rho\eta} F^{\sigma\eta} - S_{\nu\eta}^{\rho\eta} F^{\sigma\eta} - S_{\eta\sigma}^{\rho\eta} F^{\sigma\eta}) \\ &= 2\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} S_{\sigma\eta}^{\rho\eta} F^{\sigma\eta}. \end{aligned} \quad (II.6)$$

最后,

$$\frac{\beta}{3} \delta_{\rho\alpha}^{\rho\nu} \delta_{\beta\gamma}^{\lambda\mu} J^\rho \varepsilon_{\sigma\rho\lambda\mu} = \frac{\beta}{3} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} J^\rho \delta_{\rho}^{\lambda\mu} \times 3! = 2\beta \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} J^\rho. \quad (II.7)$$

把 (II.5), (II.6), (II.7) 式代入 (II.3) 式, 得

$$\nabla_\nu F^{\nu\mu} - S_{\sigma\eta}^{\rho\eta} F^{\sigma\eta} = \beta J^\mu. \quad (II.8)$$

现由 S 的完全反对称性, 有

$$\frac{\partial}{\partial x^\lambda} (F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}) = \nabla_\lambda (F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}) = \nabla_\lambda (F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}), \quad (II.9)$$

且

$$\nabla_\lambda (F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}) = (\nabla_\lambda F_{\alpha\beta}) F^{\alpha\beta} + F_{\alpha\beta} \nabla_\lambda F^{\alpha\beta}. \quad (II.10)$$

但

$$\stackrel{*}{\nabla}_\lambda F_{\alpha\beta} \stackrel{\text{def}}{=} \nabla_\lambda F_{\alpha\beta} - S_{\lambda\alpha}^{\mu\nu} F_{\mu\beta},$$

即

$$\nabla_\lambda F_{\alpha\beta} = \stackrel{*}{\nabla}_\lambda F_{\alpha\beta} + S_{\lambda\alpha}^{\mu\nu} F_{\mu\beta}. \quad (\text{II.11})$$

把 (II.11) 式代入 (II.10) 式, 得

$$\begin{aligned} \nabla_\lambda (F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}) &= (\stackrel{*}{\nabla}_\lambda F^{\alpha\beta}) F_{\alpha\beta} + F_{\alpha\beta} \nabla_\lambda F^{\alpha\beta} + F^{\alpha\beta} S_{\lambda\alpha}^{\mu\nu} F_{\mu\beta} \\ &= (\stackrel{*}{\nabla}_\lambda F^{\alpha\beta}) F_{\alpha\beta} + F_{\alpha\beta} (\nabla_\lambda F^{\alpha\beta} + S_{\lambda\mu}^{\alpha\nu} F^{\mu\beta}). \end{aligned} \quad (\text{II.12})$$

但 (II.9) 式给出

$$\nabla_\lambda (F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}) = \nabla_\lambda (F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}) = (\nabla_\lambda F_{\alpha\beta}) F^{\alpha\beta} + F_{\alpha\beta} \nabla_\lambda F^{\alpha\beta}, \quad (\text{II.13})$$

故 (II.12) 及 (II.13) 式蕴含

$$\stackrel{*}{\nabla}_\lambda F^{\alpha\beta} = \nabla_\lambda F^{\alpha\beta} + S_{\lambda\mu}^{\alpha\nu} F^{\mu\beta}. \quad (\text{II.14})$$

置 $\lambda = \beta$, 得

$$\stackrel{*}{\nabla}_\beta F^{\alpha\beta} = \nabla_\beta F^{\alpha\beta} + S_{\beta\mu}^{\alpha\nu} F^{\mu\beta}; \quad (\text{II.15})$$

置 $\lambda = \alpha$, 得

$$\stackrel{*}{\nabla}_\alpha F^{\alpha\beta} = \nabla_\alpha F^{\alpha\beta} + S_{\alpha\mu}^{\alpha\nu} F^{\mu\beta}.$$

这等价于

$$\nabla_\beta F^{\beta\alpha} = \nabla_\beta F^{\beta\alpha} + S_{\beta\mu}^{\beta\nu} F^{\mu\alpha}. \quad (\text{II.16})$$

把 (II.15) 与 (II.16) 式相加, 由 $F^{\alpha\beta}$ 的反称性得,

$$0 = 0 + S_{\beta\mu}^{\alpha\nu} F^{\mu\beta} + S_{\beta\mu}^{\beta\nu} F^{\mu\alpha}.$$

但 $S_{\beta\mu}^{\beta\nu} = 0$, 因此

$$S_{\beta\mu}^{\alpha\nu} F^{\mu\beta} = -S_{\mu\beta}^{\alpha\nu} F^{\mu\beta} = 0, \quad (\text{II.17})$$

因此 (II.8) 式成为

$$\nabla_\nu F^{\nu\mu} = \beta J^\mu. \quad (\text{II.18})$$

参 考 文 献

- [1] Coley, A., *Gen. Rel. Grav.*, 16(1984), 5: 459.
- [2] Rainich, G. Y., *Trans. Am. Math. Soc.*, 27(1925), 106.
- [3] Misner, C. W. and Wheeler, J. A., *Ann. Phys.* (N. Y.), 2(1957), 525.
- [4] Moller, C., *The Theory of Relativity*, Clarendon Press, Oxford, 1972.
- [5] Israel, W. and Stewart, J., In *General Relativity and Gravitation* (Ed. Held, A.), Vol. II Plenum Press, N. Y., 1980.
- [6] De Groot, S. R. and Suttorp, L. G., *Foundations of Electrodynamics*, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1972.
- [7] Wheeler, J. A., *Geometrodynamics*, Academic Press, N. Y., 1962.
- [8] Cartan, E., *Ann. Ec. Norm.*, 40(1923), 325.
- [9] Trautman, A., *Bull. Acad. Pol. Sci. Ser. Sci. Math. Astr. Phys.*, 20(1972), 185, 503.
- [10] Hehl, F. W. et al., *Phys. Rev.*, D10(1974), 1066.
- [11] Crumeyroll, A., *Ann. Inst. Henri Poincare*, A23(1975), 259.
- [12] Krechet, V. G. and Ponomarev, V. N., *Acta. Phys. Pol.*, B7(1976), 553.
- [13] Barducci, A. et al., *Nucl. Phys.*, B24(1977), 521.
- [14] Souriau, J. M., *Ann. Inst. Henri Poincare*, 20(1974), 315.
- [15] Weyl, H., in *The Principle of Relativity: A Collection of Original Memoirs on the Special and General Theory of Relativity*, Dover, 1952.
- [16] Tonnelat, M. A., *Les Theories Unitaires de L'Electromagnetisme et de la Gravitation*, Gauthiers-Villars, Paris 1965.
- [17] Sachs, M., *General Relativity and Matter*, D. Reidel, Dordrecht, Holland, 1982.
- [18] Klotz, A. M., *Macrophysics and Geometry*, Cambridge Univ. Press, 1982.

- [19] Einstein, A., *The Meaning of Relativity*, 6th ed., Princeton Univ. Press, 1956.
- [20] Schouten, J. A., *Ricci Calculus*, Springer-Verlag, Berlin, 1954.
- [21] Ponomariov, V. N. and Obuchov, Ju., *Gen. Rel. and Grav.*, 14(1982), 309.
- [22] Harries, E. G. et al., *Phys. Rev.*, D7(1973), 2326.
- [23] El-Kohly, A. A., *Ann. Inst. Henri Poincaré*, 18(1973), 121.
- [24] Datta, B. K., *Nuovo Cimento*, B6(1971), 1, 16.
- [25] Kopczynski, W., *Bull. Acad. Pol. Sci., Ser. Sci. Math., Astr. Phys.*, 23(1975), 467.
- [26] Kobayashi, S. and Nomizu, K., *Foundations of Differential Geometry*, Vol. I, Interscience, N. Y., 1963.
- [27] Sternberg, S., *Lectures on Differential Geometry*, Prentice-Hall, N. J., 1964.
- [28] Einstein, A. and Meyer, W., *Preuss. Acad. Phys. Math. Klass. Sitz.*, 1932, 522.
- [29] Kobayashi, S., *Transformation Groups in Differential Geometry*, Springer-Verlag, Berlin, 1972.
- [30] Eddington, A. S., *Mathematical Theory of Relativity*, 2nd ed., Cambridge Univ. Press, 1957.
- [31] Prassanna, A. R., *Phys. Lett.*, 54A(1975), 17.